

# 迭代法求矩阵广义逆的 ERT 图像重建算法 \*

马艺馨<sup>1\*\*</sup> 董 峰<sup>2</sup> 郑之初<sup>1</sup> 吴应湘<sup>1</sup>

1. 中国科学院力学研究所, 北京 100080; 2. 天津大学电气自动化与能源工程学院, 天津 300072

**摘要** 电阻层析成像(ERT)技术是一种类似于 CT 图像的新型层析成像技术。在研究迭代法求矩阵广义逆的基础上, 提出一种新的 ERT 图像重建算法, 并对其性能进行了仿真试验。阐述了该算法的原理, 并给出部分图像重建结果。同两种反投影算法相比, 该算法重建的图像空间分辨力高且更为清晰。

**关键词** 电阻层析成像 图像重建 广义逆

电阻层析成像(Electrical Resistance Tomography, ERT)技术是一种类似于 CT 技术的新型层析成像技术, 由于具有成本低、无辐射、灵敏度高、速度快等优点, 受到医学和工业界的青睐, 已有应用性研究成果<sup>[1~3]</sup>。

典型的 ERT 系统的构成如图 1 所示。敏感阵列由等间隔地安装在圆形被测对象内壁上的 N 个相同尺寸的金属电极构成。电极表面与被测媒质接触, 但对被测媒质无扰动。数据采集单元的工作过程如下<sup>[1]</sup>:首先在一对相邻电极上施加激励电流, 在被测场域内建立起敏感场并形成一定的电位分布, 然后从其他的相邻电极对上测量边界电压; 再切换激励电流到下一相邻电极对, 重复前述测量过程, 直到所有的相邻电极对都激励过, 一幅图像的数据采集就完成了。当场内电导率分布变化时, 边界电压会随之变化。边界测量电压的变化反映了电导率分布的变化信息, 图像重建单元采用一定的算法, 可以根据边界电压重建场内的电导率分布或反映电导率分布情况的灰度分布, 然后由显示单元显示图像, 实现可视化测量。整个过程在计算机的控制下完成。

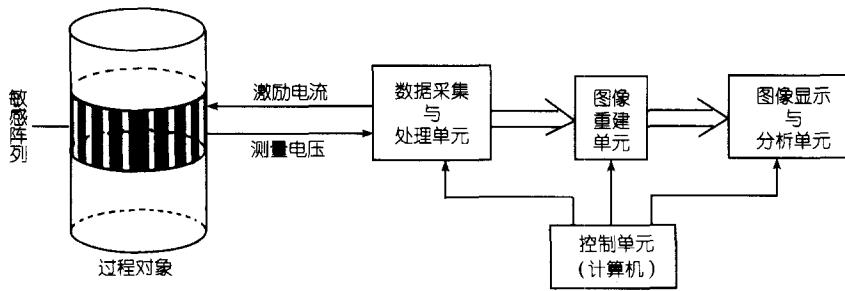


图 1 ERT 系统构成框图

2000-08-23 收稿, 2000-10-30 收修改稿

\* 中国科学院“九五”重大项目(KZ951-A1-405)和海洋“八六三”青年基金项目(820-Q-013)资助

\*\* E-mail: y.x.ma@263.net

ERT 技术的图像重建由于其敏感场的非线性和软场特性而比 CT 技术困难。已有的 3 种主要图像重建算法是基于等位线的反投影算法<sup>[4]</sup>、基于灵敏度系数分布的反投影算法<sup>[5]</sup>和改进的 Newton-Raphson(MNR) 算法<sup>[6]</sup>。其中 MNR 算法为定量的迭代算法,但计算量大、耗时且不稳定;两种反投影算法为定性算法,抗干扰性好、不需迭代、速度快,是目前主要采用的 ERT 图像重建算法,但图像清晰度差,重建结果为灰度图像而不是真实的电导率/电阻率分布图像。

本文在研究迭代法求矩阵广义逆的基础上,提出一种新的 ERT 图像重建算法,该算法同 Yang 等提出的基于 Landweber 迭代算法的电容层析成像(Electrical Capacitance Tomography, ECT) 系统的图像重建算法<sup>[7]</sup>具有相似之处,迭代过程稳定,并能获得直接的电导率/电阻率分布,缺点是速度仍然较慢。

## 1 算法原理

若将 ERT 敏感场剖分成  $M$  个单元,可以定义每个边界测量电压对每个单元的电导率变化的灵敏度系数,所有的灵敏度系数构成灵敏度系数矩阵  $S_{N \times M}$ (通常  $N \leq M$ ;  $N$  为独立测量次数;  $M$  为有限单元数目)。若测量阻抗向量为  $Z$ ,则测量阻抗向量的变化与各单元电导率的变化满足如下方程

$$\Delta Z = S \Delta \sigma, \quad (1)$$

其中  $\Delta Z = Z - Z_0$ ;  $\Delta \sigma = \sigma - \sigma_0$ ,  $\sigma_0$  与  $Z_0$  分别为参考电导率分布及参考电导率分布下的测量阻抗向量;  $\sigma$  与  $Z$  则分别为待求的电导率分布和相应的测量阻抗向量。

根据(1)式,有基于灵敏度系数的图像重建算法

$$\Delta \sigma = S^+ \Delta Z, \quad (2)$$

$S^+$  表示矩阵  $S$  的广义逆。用迭代法求  $S^+$  的格式如下<sup>[8]</sup>

$$X_{k+1} = X_k + X_0(I - SX_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (3)$$

$I$  表示单位矩阵。与(3)式对应的残差序列为

$$R_k = SS^+ - SX_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (4)$$

该残差序列满足  $\| R_{k+1} \| \leq \| R_0 \| \cdot \| R_k \|$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\| \cdot \|$  表示任一相容范数。当  $S^+$  的初始近似  $X_0 \in \mu(S^T, S^T)$  且初始残差矩阵  $R_0$  的谱半径  $\rho(R_0) < 1$  时,  $X_k \rightarrow S^+$ 。

令  $S^T$  为  $S^+$  的初始近似,于是

$$X_{k+1} = X_k + S^T(I - SX_k). \quad (5)$$

将(5)式两端右乘向量  $\Delta Z$ ,并将(2)式代入,得到电导率的迭代计算公式如下

$$\Delta \sigma_{k+1} = \Delta \sigma_k + S^T(\Delta Z - S \Delta \sigma_k). \quad (6)$$

根据(1)式,  $S \Delta \sigma_k = \Delta Z_k$ ,于是

$$\Delta \sigma_{k+1} = \Delta \sigma_k + S^T(\Delta Z - \Delta Z_k), \quad (7)$$

也即

$$\sigma_{k+1} - \sigma_0 = \sigma_k - \sigma_0 + S^T[Z - Z_0 - (Z_k - Z_0)], \quad (8)$$

得到电导率的迭代计算公式如下

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k + S^T(Z - Z_k). \quad (9)$$

当  $\| S^T S \|_2 < 2$  时,(9)式将收敛于真实图像。

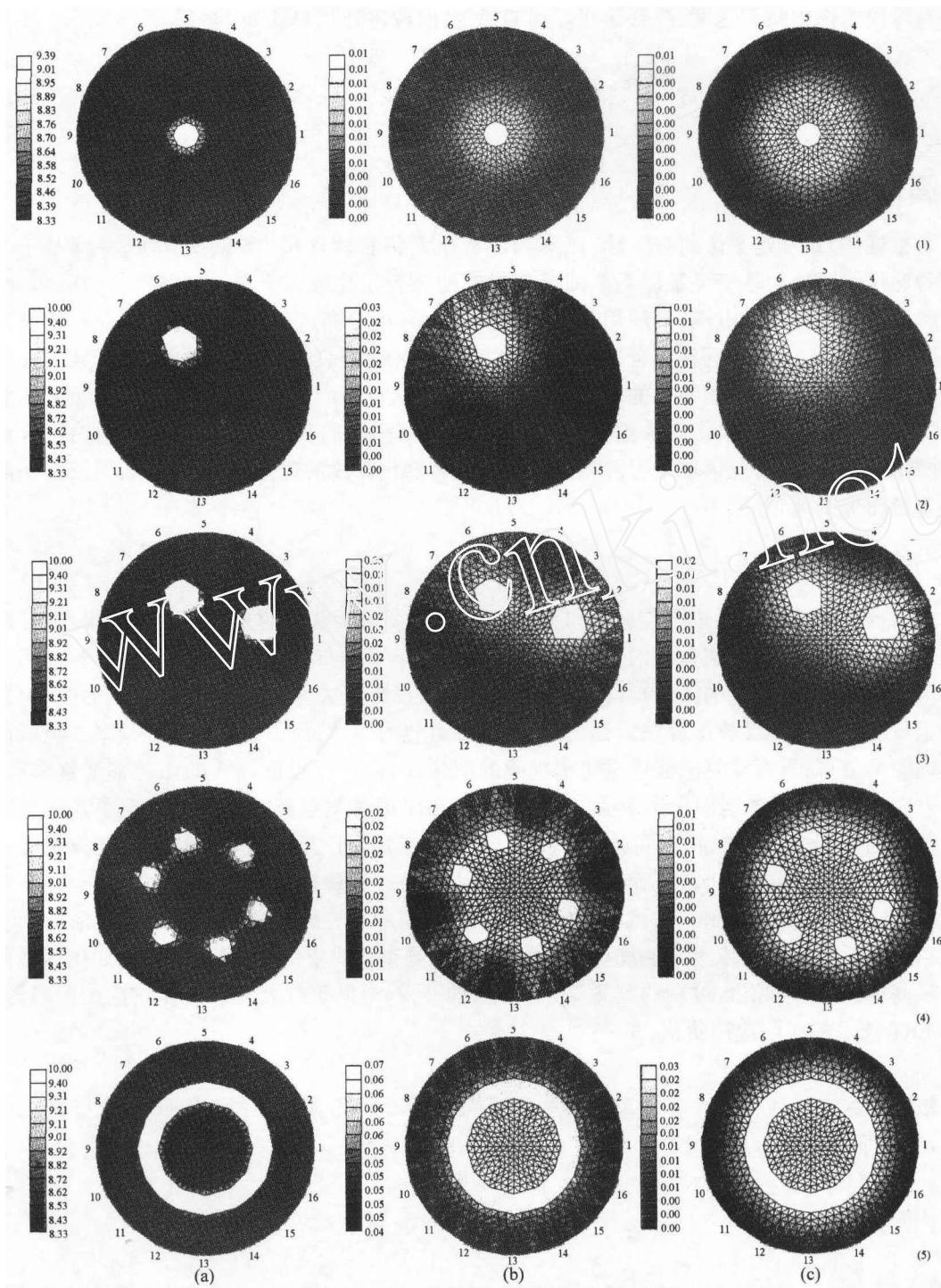


图 2 图像重建算法性能的仿真试验结果

(1) 场域中心有 1 个目标区域, (2) 场域边缘有 1 个目标区域, (3) 场域边缘有 2 个目标区域, (4) 场域边缘有 6 个目标区域, (5) 场域内有 1 个管状目标区域; (a) 迭代法求矩阵广义逆的 ERT 图像重建算法; (b) 等位线反投影算法; (c) 灵敏度系数反投影算法

为加快图像的收敛速度,改善迭代过程的稳定性,改进迭代格式如下

$$\sigma_{k+1} = f[\sigma_k + \alpha_k S^T(Z - Z_k)], \quad (10)$$

这里  $\alpha_k = \|S^T e^{(k)}\|^2 / \|SS^T e^{(k)}\|^2$ ,  $e_{k+1} = Z - S\sigma_{k+1} = e_k - \alpha_k SS^T e_k$ ,  $f$  为根据先验知识确定的图像阈值函数.

## 2 图像重建

为验证(9)式重建图像的有效性,以下利用有限元仿真软件包<sup>1)</sup>测试该算法,并同基于等位线的反投影算法和基于灵敏度系数的反投影算法进行了比较.首先设定电导率的分布,然后求解正问题得到测量电压,最后用测量电压反算电导率分布.几种不同电导率分布情况下的实验结果见图 2.其中网格覆盖区域的电阻率设定为  $8.33 \Omega \cdot m$ ;无网格(目标)区域的电阻率设定为  $10.00 \Omega \cdot m$ .重建结果的电阻率分布(迭代法求矩阵广义逆的图像重建算法重建的图像)或灰度分布(两种反投影算法重建的图像)参照每幅图像的灰度表.当图像中的白色区域与无网格区域重合、深色区域与有网格区域重合或者颜色深浅的过渡区域很窄,表明所采用的算法重建图像的效果好.

## 3 分析与结论

本文提出的迭代法求矩阵广义逆的 ERT 图像重建算法所获得的是直接的电阻率/电导率的分布,而两种反投影算法重建的是反映了电阻率/电导率分布的灰度分布.图 2 中各组用该算法重建的图像(见各组的图(a)),比基于等位线的反投影算法重建的图像(见各组的图(b)),和基于灵敏度系数的反投影算法重建的图像(见各组的图(c)),都更为清晰.尤其第 5 组所设定的电导率分布,只有该算法能够重建出准确的图像,而两种反投影算法的图像都严重失真.图 2 中的第 3 组和第 4 组图像则表明,本文提出的 ERT 图像重建算法比两种反投影算法具有更好的空间分辨力.总之,仿真实验结果表明,迭代法求矩阵广义逆的 ERT 图像重建算法能够反映电阻率/电导率的变化,具有较好的空间分辨力和很好的稳定性,图像清晰.其缺点是实时性不如等位线反投影算法和灵敏度系数反投影算法好,但收敛性和实时性均比 MNR 算法好.

本算法适用于对图像重建速度要求不高,而对电导率值要求准确分辨的场合,如化工过程中的一些扩散过程和混合过程的观测等.本算法的开发,有助于扩大 ERT 技术的应用范围,并提高 ERT 技术的实际应用价值.

**致谢** 本文得到中国科学院工程热物理研究所刘石研究员和英国 UMIST 杨武强博士的指点,在此谨致以衷心的感谢.

## 参 考 文 献

1 Dickin F J, et al. Electrical resistance tomography for process application. Measurement Science and Technology, 1993, 7(3): 247

1) 马艺馨. 电阻层析成像技术及其在气/液两相泡状流检测中的应用. 天津大学, 博士学位论文, 1999. 3

- 2 Loh W W, et al. Using ERT for multi-phase flow monitoring. In: Proceedings of 1st World Congress on Industrial Process Tomography. Buxton: Greater Manchester, 1999, 47
- 3 Sikora R, et al. Optimum selection of frequency for medical equipment using electrical impedance tomography. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 1999, 10(3): 193
- 4 Barber D C, et al. Applied potential tomography. J Phys E: Sci Instrum, 1984, 17: 723
- 5 Tadakuni M, et al. Electrical impedance computed tomography base on a finete element model. IEEE Trans Biom Engn, 1985, BME-32(3): 177
- 6 Yourkey T J, et al. Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography. IEEE Trans Biomed Engn, 1987, BME-34: 843
- 7 Yang W Q, et al. Electrical capacitance tomography with square sensor. Electronics Letters, 1999, 35(4): 1
- 8 蒋正新, 等. 矩阵理论及其应用. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1988