

数值求解 Navier-Stokes 方程的迎风 紧致差分格式

朱庆勇¹, 马延文²

(1. 中山大学 数学与计算科学学院, 广州 510275; 2. 中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

摘要: 从迎风紧致逼近^[1]出发, 提出数值求解可压 Navier-Stokes 方程的一种高精度的数值方法. 利用 Steger-Warming 的通量分裂技术^[2]将守恒型方程中的流通向量分裂成两部分, 在此基础上据风向构造逼近于无粘项的三阶迎风紧致有限差分格式. 对方程中的粘性部分采用通常的二阶差分逼近. 所建立的差分格式被用来数值求解了三维粘性绕流问题.

关键词: 迎风紧致格式; NS 方程

中图分类号: O 351 **文献标识码:** A

0 引言

近年来高精度差分格式的研究引起国内外的普遍重视, 目的是更准确地模拟复杂流场的流动. 众所周知, 传统的二阶 TVD 类格式虽然能较好地捕捉激波, 但却存在局部极值点降阶的问题, 而且由于一些格式的数值粘性过大, 当用该格式计算粘性流特别是高雷诺数问题时, 格式本身的数值粘性可能掩盖了流场的物理粘性, 从而降低了格式对边界层的分辨率, 因而无法正确计算热流值. 中心差分格式(Beam-Warming)在亚跨音速流动计算中已得到普遍应用, 但需加入人工粘性项才能使计算稳定, 而人工粘性系数的确定具有较大的人为因素, 给计算带来了不确定性. 另外在使用二阶精度格式计算复杂流场分离流动和热流计算等问题时, 只有采用足够密的网格才能满足要求. 文献[3]指出, 采用高精度格式可适当放松对网格雷诺数的要求, 因此发展三阶或三阶以上的格式是需要的. 文献[4]对三阶迎风紧致格式进行了群速度控制, 使激波的分辨率得到了改进, 优于通常二阶精度 TVD 格式.

本文在文献[4]的基础上给出了数值求解 NS 方程的迎风紧致有限差分格式. 对于方程中的无粘部分利用 Steger-Warming 的通量分裂技术将流通向量分裂成两部分, 在此基础上据风向构造逼近于无粘项的三阶迎风紧致格式. 对方程中的粘性部分采用通常的二阶中心差分格式. 本文利用对 Burgers 方程边值问题的特征分析, 研究了为正确模拟边界层内的流动特征对网格雷诺数的限制条件. 通过对超声速粘性绕流的数值模拟表明: 迎风紧致格式具有良好的模拟边界层特征的能力, 结果是令人满意的.

1 模型问题的数值方法

考虑一维 Burgers 方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + K \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x^2}$ 的定常形式

$$u(x) - Ku(x) = 0, \quad x \in [0, 1] \quad (1a)$$

收稿日期: 2000-03-05

基金项目: 广东省博士后基金资助.

作者简介: 朱庆勇(1969~), 男, 博士后.

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0 \quad (1b)$$

这里 K 为大于零的常数。上述问题的理论解是

$$u(x) = (e^{Kx} - e^k)/(1 - e^k) \quad (2)$$

随着 K 的增加, 一个很薄的边界层在 $x = 1$ 的附近发展起来。将区间 $[0, 1]$ 等分, 空间步长为 $h = 1/N$, $x_j = jh, j = 0, 1, 2, \dots, N$ 。记 $v_j = v(x_j)$, 定义如下差分算子:

$$\begin{aligned} \delta_x^0 v_j &= (v_{j+1} - v_{j-1})/2, \quad \delta_x^2 v_j = v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1} \\ \delta_x v_j &= \frac{\delta_x^0 - 2\epsilon\delta_x^2}{1 - 2\epsilon\delta_x^0 + \frac{1}{6}\delta_x^2} v_j \end{aligned} \quad (3)$$

这里 δ_x 是迎风紧致差分算子。Taylor 展开后不难发现当 $\epsilon = 0$ 时, $T. E. = O(h^3)$, 当 $\epsilon = 0$ 时, $T. E. = O(h^4)$ 。对(1)式中的一阶导数项采用迎风紧致算子 δ_x 逼近, 二阶导数项采用通常的二阶中心差分逼近。这样处理是为了在三维流场模拟中简化计算, 另外这样做也是完全合理的, 因为通常的 TVD 格式之所以对边界层分辨率不高, 主要就是对无粘项的逼近时带入了较大的数值粘性, 从而掩盖了其真实的物理粘性, 因此, 要提高对边界层的分辨率, 主要是提高无粘项的逼近精度。现在来讨论对应于(1)式的分析, 相应的差分逼近式为:

$$\delta_x^2 v_j / h^2 - K \cdot \delta_x v_j / h = 0, \quad j = 0, \dots, N \quad (4)$$

这里 $v_j = u(x_j)$, 由(3), (4)两式不难推出

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{6} - \epsilon \right] v_{j+2} + \left[\frac{1}{3} + 2\epsilon - \left[\frac{1}{2} - 2\epsilon \right] hk \right] v_{j+1} - \\ & (1 + 4\epsilon h K) v_j + \left[\frac{1}{3} - 2\epsilon + \left[\frac{1}{2} + 2\epsilon \right] hk \right] v_{j-1} + \left[\frac{1}{6} + \epsilon \right] v_{j-2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

上式的特征方程给出四个根: $\lambda = 1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 满足的方程为

$$\left[\frac{1}{6} - \epsilon \right] \lambda^3 + \left[\frac{1}{2} + \epsilon - \left[\frac{1}{2} - 2\epsilon \right] hk \right] \lambda^2 - \left[\frac{1}{2} - \epsilon + \left[\frac{1}{2} + 2\epsilon \right] hk \right] \lambda - \left[\frac{1}{6} + \epsilon \right] = 0 \quad (6)$$

下面讨论在 $\epsilon = 0$ 时(6)式的根的情况, 这时(6)式可写为

$$\frac{1}{6} \lambda^3 + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} hk \right] \lambda^2 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} hk \right] \lambda - \frac{1}{6} = 0 \quad (7)$$

这实际就是一阶导数项取四阶中心紧致逼近时的特征方程, 相应的差分格式数值解为

$$v_j = A + B \lambda_1^j + C \lambda_2^j + D \lambda_3^j \quad (8)$$

这里 A, B, C 和 D 是常数。下面我们给出一个定理。

定理 对于逼近于(1)式的差分格式(4)式, 当算子 δ_x 取为中心紧致差分算子时, 数值解是振荡的。

证明 令 $\lambda = 6 \left[\mu - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} L \right], L = hK$

这样(7)式可改写为

$$\mu^3 + 3H\mu + G = 0 \quad (9)$$

这里

$$H = -\frac{1}{36} L^2 + \frac{1}{36} L - \frac{1}{18}, \quad G = -\frac{1}{108} L^3 + \frac{1}{72} L^2 - \frac{1}{36} L + \frac{1}{54} \quad (10)$$

据 Tartaglia 条件^[5], 当 $G^2 + 4H^3 < 0$ 时, 方程(9)的三个根是实根。由(10)式得 $G^2 + 4H^3 = -$

$\frac{1}{216^2}(3L^4 + 12L^2 + 16) < 0$ 恒成立, 这就是说, 无论 L 为何值, 方程 (9) 都有三个实根, 那么方程 (7) 也有三实根。

分析三次实多项式 $f(\eta) = \frac{1}{6}\eta + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}L\right)\eta - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}L\right)\eta - \frac{1}{6}$, 方程 (7) 的三根实际上是 $f(\eta)$ 和 η 轴的交点, 不妨设此三点为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 并且 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ 。

由 $f(\eta) = 0$ 得

$$\eta^3 + 2(1-L)\eta - (1+L) = 0 \quad (11)$$

两根为 α, β 显然, $\alpha + \beta = -2(1-L), \alpha\beta = -(1+L), L > 0$, 这里我们看到 $\alpha\beta < 0$ 总是成立的。这就是说, α 和 β 总是异号的, 总是存在小于 0 的根, 不妨设 $\alpha < 0$, 显然存在关系 $\lambda_1 < \alpha < \lambda_2 < \beta < \lambda_3$, 这就是说方程 (7) 总有一根 $\lambda_1 < 0$, 由 (8) 式容易看出该数值解是振荡的。证毕。

从该定理可以看到, 为了克服数值振荡, 采用迎风紧致差分格式逼近一阶导数项是必要的。为了简化计算, 取 $\epsilon = 1/6$, 下面分析当 $\epsilon = 1/6$ 时, 对网格雷诺数的要求。这时的特征方程为

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}hK\right)\lambda^2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6}hK\right)\lambda - \frac{1}{3} = 0 \quad (12)$$

考虑两种情况: 1. $hK < 4$, 2. $hK > 4$ 。

对于第一种情况, 解是振荡的且不符合要求。对于第二种情况不难得到它的两根分别为

$$\lambda_1 = \frac{2 + 5hK + \sqrt{25(hK)^2 + 12hK + 36}}{2(4 - hK)}, \quad hK < 4 \quad (13)$$

$$\lambda_2 = \frac{2 + 5hK - \sqrt{25(hK)^2 + 12hK + 36}}{2(4 - hK)}, \quad hK < 4 \quad (14)$$

根据 $\lambda_1(hK)$ 与 $\exp(hK)$ 的逼近程度可大致估计 hK 的范围, 如果要求 $\frac{|\lambda_1(hK) - \exp(hK)|}{\exp(hK)} < 0.185$, 这时 hK 可大约取为 3.36。作为比较, 我们给出对一阶导数项

采用通常的中心差分格式时对网格雷诺数的要求。这时的特征方程为

$$\left(1 - \frac{hK}{2}\right)\lambda^2 - 2\lambda + \left(1 + \frac{hK}{2}\right) = 0 \quad (15)$$

显然当 $hK > 2$ 时, 两根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{2-hK}{2+hK} < 0$, 不符合要求, $hK = 2$ 时也不符合要求, 这时对网格雷诺数的要求是 $hK < 2$ 。从这里可以看出采用三阶迎风紧致格式确实可以放宽对网格雷诺数的要求。

2 三维可压缩 NS 方程的数值方法

2.1 控制方程

在曲线坐标下, 三维可压缩 NS 方程可写为

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{\alpha}} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\eta}} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{\zeta}} = \frac{\partial \tilde{E}_v}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial \tilde{F}_v}{\partial \tilde{\eta}} + \frac{\partial \tilde{G}_v}{\partial \tilde{\zeta}} \quad (16)$$

其中

$$\tilde{Q} = J^{-1}Q$$

$$\tilde{E} = J^{-1}[\xi E + \eta F + \zeta G], \quad \tilde{F} = J^{-1}[\eta E + \xi F + \zeta G],$$

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= J^{-1}[\zeta E + \zeta F + \zeta G], \quad \tilde{E}_v = J^{-1}[\xi_x E_v + \xi_y F_v + \xi_z G_v], \\ \tilde{F}_v &= J^{-1}[\eta E_v + \eta F_v + \eta G_v], \quad \tilde{G}_v = J^{-1}[\zeta E_v + \zeta F_v + \zeta G_v] \\ Q &= [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^T \\ E &= [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (e + p)u]^T, \\ F &= [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vw, (e + p)v]^T, \\ G &= [\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + p, (e + p)w]^T, \\ E_v &= \text{Re}^{-1}[0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{xu} + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w + q_x]^T, \\ F_v &= \text{Re}^{-1}[0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, \tau_{yu} + \tau_{yy}v + \tau_{yz}w + q_y]^T, \\ G_v &= \text{Re}^{-1}[0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, \tau_{zu} + \tau_{yz}v + \tau_{zz}w + q_z]^T. \end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \tau_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ q_x &= \frac{\mu}{(\gamma - 1)M^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = \frac{\mu}{(\gamma - 1)M^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = \frac{\mu}{(\gamma - 1)M^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

这里动力粘性系数 μ 用 Sutherland 公式给出 $\mu = T^{3/2} \frac{1+C}{T+C}$, λ 满足 Stokes 假定 $3\lambda + 2\mu = 0$,

单位体积内总内能 e 的表达式为 $e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2)$, 完全气体状态方程为 $T = M^2 P / \rho$. 这里 M 为来流马赫数, Pr 为普朗特数, γ 是比热比. 对于空气, 取 $Pr = 0.72, \gamma = 1.4, C = 110.4/T^*$. 坐标变换 Jacobin 行列式为

$$J = 1/J^{-1} = 1/[x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta \eta) - x\eta(y_\xi z_\zeta - y_\zeta \xi) + xz(y_\xi \eta - y_\eta \xi)] \quad (17)$$

2.2 差分格式

对 NS 方程采用隐式差分格式. 令 $\Delta \tilde{Q} = \tilde{Q}^{n+1} - \tilde{Q}^n, A = \frac{\partial \tilde{E}}{\partial Q}, B = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q}, C = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial Q}$, 有

$$\left[I + \frac{\Delta T}{2} (\tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{C}) \right] \Delta \tilde{Q} = RHS \quad (18)$$

差分格式(18)中左端隐式部分采用特殊矩阵分裂法构造差分格式^[6]. 右端无粘通量采用三阶迎风紧致格式:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \delta_\xi \tilde{E}_{i,j,k}^+ + \frac{1}{3} \delta_\xi \tilde{E}_{i-1,j,k}^+ = \frac{1}{6} \tilde{E}_{i+1,j,k}^+ + \frac{2}{3} \tilde{E}_{i,j,k}^+ - \frac{5}{6} \tilde{E}_{i-1,j,k}^+, & (i = 1, 2, \dots, I - 1) \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \delta_\xi \tilde{E}_{i+1,j,k}^+ + \frac{2}{3} \delta_\xi \tilde{E}_{i,j,k}^+ = \frac{5}{6} \tilde{E}_{i+1,j,k}^+ - \frac{2}{3} \tilde{E}_{i,j,k}^+ - \frac{1}{6} \tilde{E}_{i-1,j,k}^+ \\ \frac{2}{3} \delta_\eta \tilde{F}_{i,j,k}^+ + \frac{1}{3} \delta_\eta \tilde{F}_{i,j-1,k}^+ = \frac{1}{6} \tilde{F}_{i,j+1,k}^+ + \frac{2}{3} \tilde{F}_{i,j,k}^+ - \frac{5}{6} \tilde{F}_{i,j-1,k}^+, & (j = 1, 2, \dots, J - 1) \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \delta_\eta \tilde{F}_{i,j+1,k}^+ + \frac{2}{3} \delta_\eta \tilde{F}_{i,j,k}^+ = \frac{5}{6} \tilde{F}_{i,j+1,k}^+ - \frac{2}{3} \tilde{F}_{i,j,k}^+ - \frac{1}{6} \tilde{F}_{i,j-1,k}^+ \\ \frac{2}{3} \delta_\zeta \tilde{G}_{i,j,k}^+ + \frac{1}{3} \delta_\zeta \tilde{G}_{i,j,k-1}^+ = \frac{1}{6} \tilde{G}_{i,j,k+1}^+ + \frac{2}{3} \tilde{G}_{i,j,k}^+ - \frac{5}{6} \tilde{G}_{i,j,k-1}^+, & (k = 1, 2, \dots, K - 1) \end{cases} \quad (21)$$



这里 $\delta_\xi, \delta_\eta, \delta_\zeta$ 分别是 ξ, η, ζ 方向的迎风紧致算子。这样通过正负两个方向扫描即可求得 $\tilde{\delta}_\xi E_{i,j,k}^\pm, \tilde{\delta}_\eta F_{i,j,k}^\pm, \tilde{\delta}_\zeta G_{i,j,k}^\pm$ 。计算中采用了 Steger-Warming 方法对无粘通量进行分裂, 边界上采用二阶偏斜格式。

$$\begin{aligned}\tilde{E}^\pm &= \tilde{A}^\pm Q, & \tilde{A}^\pm &= R_\xi \Lambda_\xi^\pm R_\xi^{-1} \\ \tilde{F}^\pm &= \tilde{B}^\pm Q, & \tilde{B}^\pm &= R_\eta \Lambda_\eta^\pm R_\eta^{-1} \\ \tilde{G}^\pm &= \tilde{C}^\pm Q, & \tilde{C}^\pm &= R_\zeta \Lambda_\zeta^\pm R_\zeta^{-1}\end{aligned}\quad (22)$$

在利用 Steger-Warming 通量分裂技术时, 为了避免在声速点出现振荡, 对 Jacobi 矩阵的特征值做如下修正: $\lambda^\pm = \frac{1}{2} \left[\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + \kappa^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)} \right]$ 式中 κ 为一小量, k 分别对应于 ξ, η, ζ 为了抑制流场中的非物理振荡, 采用文[4]中的 UCGVC 格式捕捉激波。

2.3 边界条件

流场边界由物面、外边界、对称面和出口流场组成。物面采用速度无滑移及恒温壁条件, 物面压力 P 由物面法向动量方程在物面上的蜕化形式求出 $\hat{q}_p / \partial t = Q_0$ 。对称轴采用周向平均处理, 对称面采用对称条件。外边界采用自由来流条件。出口流场参数采用一阶外推。

2.4 计算结果及分析

本文分别计算了采用迎风紧致格式在不同网格雷诺数下的驻点热流值, 并与 Fay-Riddell 估算值^[7]进行了比较, 证实了前面的结论。在本文的球头绕流计算中, 计算条件为 $M = 7.0$, $Re = 1.48 \times 10^5$, $T = 67K$, $T_w = 300K$, 网格点为 $19 \times 31 \times 15$ 。这里定义波后网格雷诺数 $Re_{\Delta x}$,

$$Re_{\Delta x} = \frac{Re}{\sqrt{\gamma \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)}} \Delta x \quad (23)$$

其中 Re, M 为来流的雷诺数和马赫数, γ 是比热比, Q_0 是驻点热流值。表 1 给出了采用迎风紧致格式求解 NS 方程给出的球头驻点热流值与文献[7]中估算值的比较。

表 1 结果比较

	网格雷诺数 $Re_{\Delta x}$	计算值 Q_0	Fay-Riddell Q_0
迎风紧致格式	7.99	3.72×10^{-3}	3.83×10^{-3}
迎风紧致格式	2.10	3.83×10^{-3}	3.83×10^{-3}
耗散比拟法	7.99	2.32×10^{-3}	3.83×10^{-3}
耗散比拟法	2.10	3.75×10^{-3}	3.83×10^{-3}

从表 1 中可以明显看出采用迎风紧致格式能在较大的网格雷诺数下较好地计算驻点热流值, 这当然是迎风紧致格式的数值粘性较耗散比拟法小带来的改进。

在对双子座飞船绕流问题的求解中, 网格流向取 62 个网格点, 法向为 41 个网格点, 周向 $0 \sim 180^\circ$ 内为 21 个网格点。图 1 给出了攻角为 $\alpha = 20^\circ$ 时, 迎风紧致格式和二阶耗散比拟法得到的物面表面流态, 同时给出了在这一攻角下的实验照片, 从结果可明显地看出迎风紧致格式的计算结果可清晰地分辨出背风区的龙卷涡, 而二阶耗散比拟格式并不明显。迎风紧致格式确实比二阶耗散比拟格式在对分离区的分辨率上有了提高, 这无疑也是二阶耗散比拟格式数值耗散过大的原因造成的。

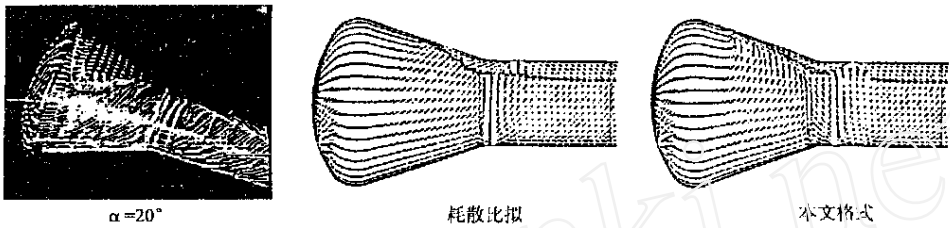


图1 物面表面流态和实验油流图($\alpha = 20^\circ$)

3 结论

本文基于迎风紧致格式求解了三维可压缩NS方程。数值实验表明,该格式对流场中的边界层有较高的分辨率。由于格式本身的数值耗散较二阶格式小,在对热流计算和三维大尺度分离流动的模拟中,结果是令人满意的。

参考文献:

- [1] Dexun Fu, Yanwen Ma. A high order accurate finite difference scheme for complex flow fields[J]. *J. of Comput Phys*, 1997, **134**: 1~ 15
- [2] Steger J L, Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods[J]. *J. of Comput Phys*, 1981, **40**: 263~ 293
- [3] Dexun Fu, Yanwen Ma. Computational fluid dynamics review [M]. 1995
- [4] 朱庆勇, 马延文. 求解双曲型守恒律方程的高精度迎风紧致群速度控制法[J]. *计算物理*, 1998, **15**(5): 531~ 536
- [5] Durell C V, Robson A. Advanced Algebra[M], Bell, London, 1937. Vol II, III
- [6] 郭文海, 马延文, 傅德薰. 一个求解 Euler 方程的特殊矩阵分裂格式[J]. *计算数学*, 1993, **2**: 225~ 234.
- [7] Fay J A, Riddell R F. Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air[J]. *J. of Aeronautical Sciences*, 1958, **25**: 73~ 85

A high order accurate upwind compact scheme for solving Navier-Stokes equations

ZHU Qing-yong¹, MA Yan-wen²

(1. Zhongshan University, Guangzhou 510275, China; 2 Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract: A upwind compact scheme^[1] for solving compressible Navier-Stokes equations is described in this paper. For the inviscid portion of the Navier-Stokes equations the flux vectors are split by using Steger-Warming's flux vectors splitting technique^[2]. The flux vectors are approximated by using the upwind compact scheme. Second order accurate difference approximation is used for the viscous portion. Obtained difference scheme is used to solve 3-D flow fields around a vehicle.

Key words: upwind compact scheme; NS equations