中 国 科 学 (A 辑)
第 30 卷 第 2 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2000 年 2 月

可压混合层流动转捩到湍流的直接数值模拟*

傅德薰① 马延文①②
(①中国科学院力学研究所, LNM 开放实验室; ②LHD 开放实验室 北京 100080)
张林波
(中国科学院计算数学与科学工程计算研究所, LSEC 开放实验室, 北京 100080)

摘要 采用五阶精度迎风紧致格式和六阶对称紧致格式, 结合三阶 R-K 方法求解可压缩三维 Navier-Stokes 方程, 直接数值模拟了时间发展平面混合层流. 给出了对流 Mach 数 $Mc = 0.8$, Reynolds 数 $Re = 200$ 时流动从初始扰动为一对相等且相反的斜波开始, 经过失稳发展形成 Λ 涡、马蹄涡和蘑菇云等拟序结构, 然后破碎为小尺度、再破碎为更小尺度的涡结构, 形成以小尺度运动为主导的流动, 最终达到湍流.

关键词 可压平面混合层 转捩机制 湍流 紧致格式

混合层流动是研究湍流机理的典型流动, 也是解决很多实际问题的基础. 如可压缩平面混合层流的研究是提高超声速冲压发动机燃烧效率的基础. 对不可压平面混合层流已有很多学者通过实验、分析和直接数值模拟的方法进行了研究. 而对于可压缩平面混合层流的研究是近年才开始的. 多数文章仅限于数值模拟涡形成的初期阶段. 很多问题尚不清楚.

早些时候 Sandham 等人[1]采用直接数值模拟的方法, 研究了时间发展可压平面混合层流. 给出了对流 Mach 数 $Mc = 0.8$ 时, 流动从失稳发展而形成 Λ 涡的过程, 并认为 Λ 涡之后将产生涡对并. 以后, Luo 等人[2]的直接数值模拟结果指出, 可压平面混合流的转捩机制与不可压混合流不同, 它是从初始不稳定直接转捩到湍流的. 没有二次失稳, 没有涡对并产生. 但他们认为在 $Mc = 0.8$ 时, 转捩过程中的拟序结构是对称结构. 有关可压缩混合层流动的转捩机理、可压缩效应及混合层增长率随对流 Mach 数增长而下降的原因等问题仍不清楚, 有待进一步研究.

本文采用文献[3]中提出的高精度差分方法, 求解三维可压缩 Navier-Stokes 方程, 直接数值模拟了时间发展的平面混合层流动. 对于对流 Mach 数(采用文献[1]中的对流 Mach 数定义, 即 $Mc = (u_1 - u_2)/(c_1 + c_2)$, u_1, u_2 和 c_1, c_2 为对应上、下流动的来流速度和声速) $Mc = 0.8$, Reynolds 数 $Re = 200$ 的流动, 给出了流动从初始失稳、转捩到湍流的整个过程. 指出

1999-06-18 收稿, 1999-10-20 收修改稿
*国家自然科学基金(批准号: 19872069)及科学技术部"九五"攀登 A 预选项目"流体与空气动力学关键基础问题研究"资助项目

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

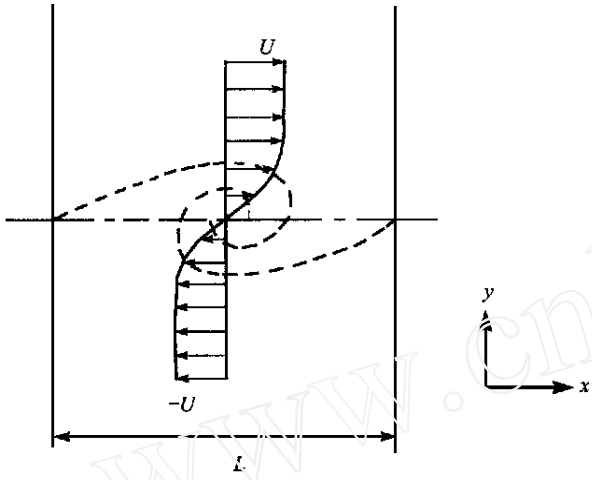

图 1 流动示意图

了拟序结构的非对称特征;证实了可压缩平面混合层流动不同于不可压平面混合层流,在本文给定的初始条件下,流动是直接从初始不稳定转捩到湍流,没有涡对并产生.

1 方程和计算方法

时间发展平面混合层流动的示意图如图 1 所示. 为了使计算域内法向中心区有较密的网格,采用了双曲正切函数的坐标变换[3]. 对于完全气体,在直角坐标系中的三维可压缩 Navier-Stokes 方程经坐标变换后有以下无量纲形式:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}, \tag{1}$$

其中

$$U=[\rho,\rho u,\rho v,\rho w,E,\rho g]^{\mathrm{T}}/N,$$

$$f_1=[\rho u,\rho u^2+p,\rho uv,\rho uw,u(E+p),\rho gu]^{\mathrm{T}}/N,$$

$$f_2=[\rho v,\rho uv,\rho v^2+p,\rho vw,v(E+p),\rho gv]^{\mathrm{T}},$$

$$f_3=[\rho w,\rho wu,\rho wv,\rho w^2+p,w(E+p),\rho gw]^{\mathrm{T}}/N,$$

$$E=\rho[CvT+(u^2+v^2+w^2)/2],$$

ρ, p, u, v, w 和 T 为对应密度、压力、速度的 3 个分量和温度. 它们的无量纲参数为对应 ρ_∞, $\rho_\infty u_\infty^2$, u_∞, u_∞, u_∞ 和 T_∞. 下标 ∞ 表示来流参数. 方程右端的 F_1, F_2 和 F_3 为粘性项. 在上面定义的无量纲形式下有

$$p=\rho T/rM_\infty^2,\ Cv=1/[r(r-1)M_\infty^2],$$

r 为比热比, M_∞ 为来流 Mach 数. 方程(1) 中的粘性系数 μ 由 Sutherlands 关系式确定. Reynolds 数定义为 $Re=\dfrac{\rho_\infty u_\infty \delta_{w0}}{\mu}$, δ_{w0} 为初始涡量厚度. 方程(1) 中的 ρg 表征单位体积内流体的组分浓度[3].

本文所采用的计算方法与文献[3]中的方法基本相同,只是这里未采用群速度控制方法,因在对流 Mach 数 $Mc=0.8$ 时,流场中没有激波出现. 计算方法的基本思想是利用五阶精度迎风紧致格式[4]离散方程(1) 中的对流项;采用六阶精度对称紧致格式[5]离散方程(1) 中的粘性项;三阶 R-K方法用以离散时间导数项. 在 (x,z) 方向的边界条件采用周期边界条件. 在 y 方向采用以下无反射边界条件.

为了便于描述,考虑一维方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}=0, \tag{2}$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

类似于文献[3],将流通矢量分裂,则方程(2)为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial f^{+}}{\partial y}+\frac{\partial f^{-}}{\partial y}=0.$$

考虑到 y 方向的边界位于远离扰动场,以下边界为例,在边界点 $j=1$ 处,二阶精度的无反射边界条件为

$$j=1: F_j^{+}=0,\ F_j^{-}=[3(f_{j+1}^{-}-f_j^{-})-(f_{j+2}^{-}-f_{j+1}^{-})]/2, \tag{3}$$

在近边界点上,文中构造了三阶精度的边界格式.

$$j=2:\ F_{j-1}^{+}=0,$$
$$\alpha F_j^{+}=a(f_{j+1}^{+}-f_j^{+})+b(f_j^{+}-f_{j-1}^{+}), \tag{4}$$

其中 $\alpha=4/3$, $a=1/2$, $b=5/6$, $F_j^{\pm}/\triangle y$ 为 $\partial f^{\pm}/\partial y$ 的差分逼近式. 类似可得 y 方向上边界的边界条件.

2　平面混合层流动的直接数值模拟和结论

2.1　初始值

初始流场取为平均流场加扰动场: $f=\bar{f}+f'$, $f=\rho, u, v, w, T$. 流向平均速度取双曲正切函数为初始平均速度剖面:

$$\bar{u}=A[B+\tanh(\beta y)],\ \beta>0,$$
$$\bar{v}=\bar{w}=0, \tag{5}$$
$$A=(u_1-u_2)/2,\ B=(u_1+u_2)/2,$$

这里 u_1 和 u_2 对应为上和下方的来流速度(参见图 1). 在本文的计算中取 $u_1=-u_2=1$, $\beta=2$, $Pr=1$. 初始温度的平均剖面取以下形式:

$$\bar{T}=1+M_1^2\frac{r-1}{2}(1-\bar{u}^2), \tag{6}$$

这里 M_1 为上平面来流 Mach 数. 初始平均压力假设为常数,则密度可由状态方程求出.

从线性稳定性分析[6]可知,当对流 Mach 数 $Mc=0.8$ 时,可压缩平面混合层流的最不稳定波是三维斜波. 故本文取初始扰动场为一对相等且相反的斜波:

$$f'=a\mathrm{Re}\{\hat{f}(\alpha,\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x+\beta z)}+\hat{f}(\alpha,-\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x-\beta z)}\},$$
$$f'=\rho', u', v', w', T', \tag{7}$$

式中 α,β 对应 x, z 方向的波数; $\hat{f}(\alpha,\beta)$ 和 $\hat{f}(\alpha,-\beta)$ 为线性稳定性理论分析得出的最不稳定波的特征函数,由文献[6]给出. 在本文的计算中取对流 Mach 数 $Mc=0.8$, Reynolds 数 $Re=\rho_\infty u_\infty\delta_{wo}/\mu=200$, $u_\infty=(u_1-u_2)/2$, δ_{wo} 为初始涡量厚度,定义为 $\delta_{wo}=(u_1-u_2)/|\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}y|_{\max}$, $\bar{u}$ 为初始平均流向速度. 对于 $Mc=0.8$, $Re=200$,线性理论给出 $\alpha=\beta=0.47$. 计算区域取为: $0\le x\le 2\pi/\alpha$; $-15\le y\le 15$; $0\le z\le 2\pi/\beta$.

2.2　计算结果与分析

计算中取初始网格点在 (x, y, z) 方向为 $64\times221\times64$,以后随着小尺度运动的激发网格点逐步增加到 $160\times245\times200$. 为保证插值精度,网格点的扩大采用了六阶精度的 Lagrange 插值

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

方法. 图 2 中给出了流场中总扰动能的二维平均能谱,其定义如下:

$$E_c(\alpha,\beta) = \frac{1}{2L_y}\int_{L_y}^{L_y}\hat{E}_c(\alpha,\beta,y)\,\mathrm{d}y,$$

$$\hat{E}_c(\alpha,\beta,y) = \frac{1}{L_xL_z}\left|\int_0^{L_x}\int_0^{L_z}E_c'(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-2\pi(\alpha x+\beta z)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right|,$$

$$E_c'(x,y,z) = \frac{1}{2}(u'^2+v'^2+w'^2),$$

且取 $f = \tilde{f} + f'$,这里 $\tilde{f}$ 为 Fevre 平均,即 $\tilde{f} = \overline{\rho f}/\bar{\rho}$,上标"-"表示 Reynolds 平均. 图 2 中是以基本模态的波数规整化的. 这里可以看出,最初时刻高波数扰动能为零,随着流动的发展,小尺度扰动能被激发,逐渐使得在较宽波数范围内扰动能都趋于同一量级. 这表明小尺度湍流运动可以从平均流吸收足够的能量来维持它自身的运动. 证实了本文数值模拟结果的正确性. 图 3 给出了流场中的最大和最小压力 $P_{\max}$ 和 $P_{\min}$ 随时间 t 的变化,它表征了流动的转捩发展过程. $P_{\min}$ 达到最小值的时刻对应于流动的不同发展阶段. 在图 4 中给出了 $t = 36.63$(对应于 $P_{\min}$ 的第 1 个最小值) 时刻流场的压力等值面(图 5(a),(b)) 和标量场的等值线. 从压力等值面可以看出 ∧涡结构的形成. 该结构类似于边界层流动中 H 型转捩的 ∧涡结构. 但这里是从流动的初始失稳发展而形成的,而在边界层流动中是从亚谐模失稳(二次失稳) 发展而形成的. 这一结果与文献[1,2] 中采用谱方法与有限差分的混合方法所得结果一致(参见文献[1] 中图 13(b) 和文献[2] 中的图 2). 标量场 g 的等值线(图 5(a),(c)) 表征了上下流动的混合特征. 这里给出了实验中发现的蘑菇云结构,且与文献[1] 中结果一致(参见文献[1] 中图 15). 只是文献[1] 中只给出了流动从失稳发展到 ∧涡的初始发展阶段的结果,并认为在 ∧涡之后将产生涡的对并. 本文计算结果表明,随着流动的发展, ∧涡的末端开始向垂直方向倾斜,其倾斜过程伴随着混合层周期性地快速增长. 在 ∧涡的倾斜开始,大致在 $t = 42$ 时混合层动量厚度突然增长(参见图 6(a)). 在图 6(b) 中还给出了流场中展向涡量的最大值 $w_{z\max}$ 随时间的变化. 可以看出在 $t < 36$ 时, w_z 皆为负值. ∧涡的形成伴随着正的展向涡量

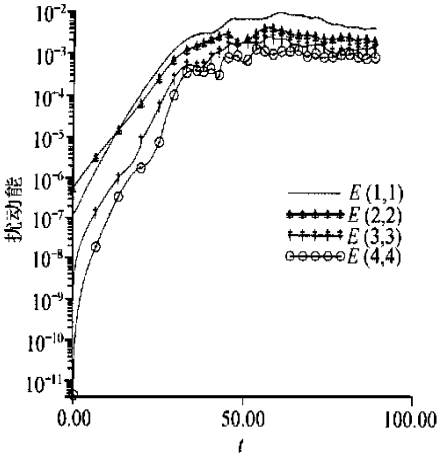

图 2 $E_c(\alpha,\beta)$ 随时间 t 的变化

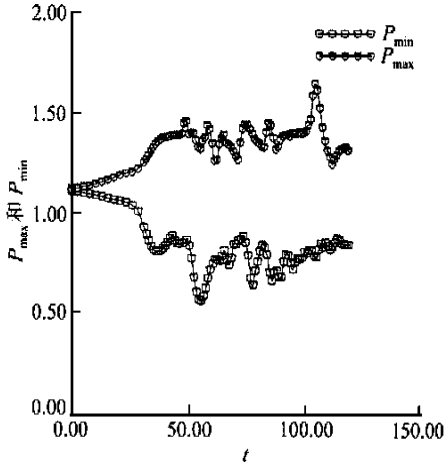

图 3 $P_{\max}$ 和 $P_{\min}$ 随时间 t 的变化

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

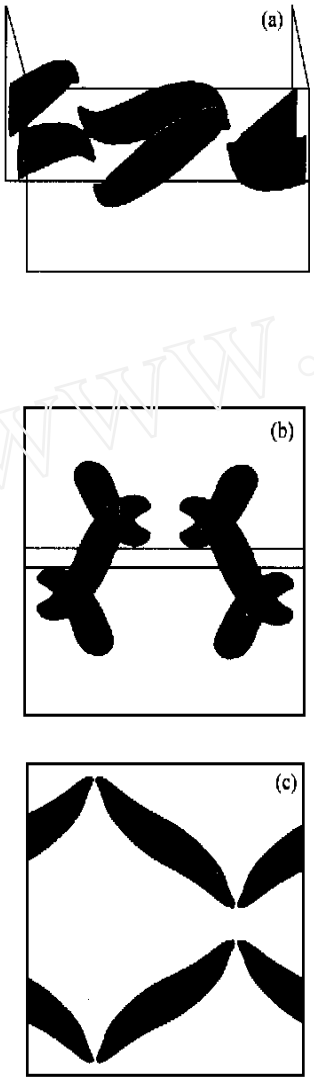

图 4　压力等值面

(a) 三维等值面, (b) 前视, (c) 俯视, $t = 36.63$

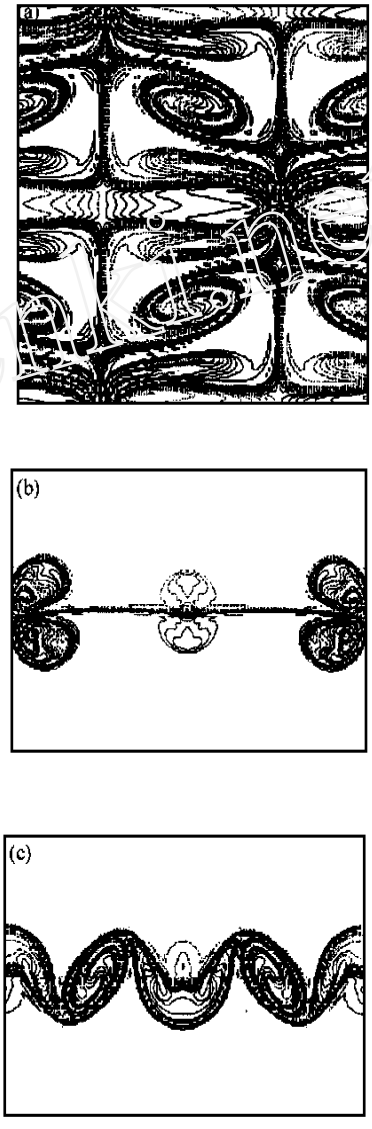

图 5　标量场 g 的等值线

(a) $y = 0$ 的 (x, z) 平面, (b) $x = \frac{1}{4}L_x$ 的 (y, z) 平面, (c) $x = \frac{1}{2}L_x(y, z)$ 平面, $t = 36.63$

的突然增长. 这表明非线性效应是三维大尺度拟序结构形成的重要因素. 随着流动的进一步发展, 由于 ∧涡的倾斜及其之间的相互干扰和挤压在 $t = 52.37$ 时形成了双马蹄涡结构. 在图 7(a) 中给出了表征该三维拟序结构的等压力面. 所得结果与文献[2] 中一致(参见文献[2] 中图 5).

本文结果表明,在 ∧涡形成后的流动发展中没有涡的对并产生,证实了文献[2] 中的结果. 这表明可压缩平面混层流的转捩机制不同于不可压平面混合层流. 在不可压的转捩过程中涡的对并是关键因素,也是混合层厚度增长的主要机制;在可压流的转捩过程中,没有涡的

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

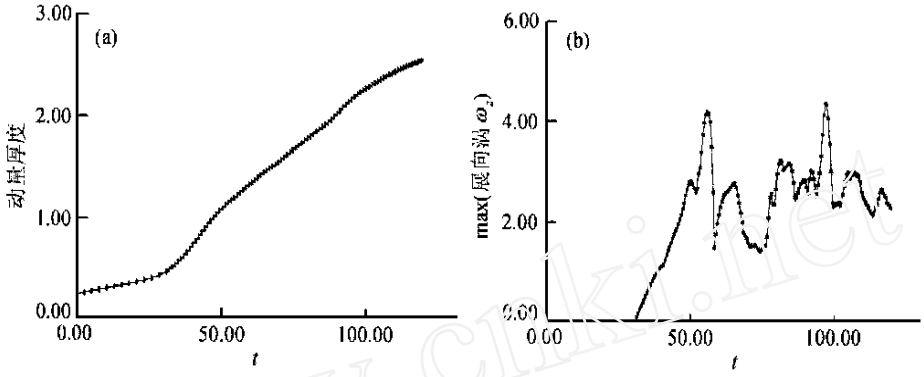

图6 动量厚度与最大展向涡随时间 t 的变化

(a) δ_0 随时间 t 的变化, (b) $w_{z\max}$ 随时间 t 的变化

对并,混合层是伴随着 ∧涡结构的倾斜过程周期性快速增长的,流动是从初始失稳直接转捩到湍流的,没有二次失稳. 应当指出,文献[2]的数值模拟在 z 方向的计算域只取了半个周期,并假设另一半流场域的流动结构是对称的. 然而,对于湍流这种对称假设是不合适的. 本文在计算中 z 方向计算域取了整周期,且采用周期边界条件.

本文计算结果表明,在 $t \leq 67$ 时所得流场结构对 z 完全对称且与文献[2]中结果一致. 但随着大尺度涡结构的破碎,小尺度涡结构形成的发展过程,产生了对 z 的非对称结构. 图7中给出的不同时刻的等压力面,表征了流场涡结构从大尺度结构发展形成小尺度和更小尺度结构的过程.

从这里可以看出,马蹄涡形成($t = 52.37$)后,随着流动的发展逐渐沿法向向外移动,开始破碎形成弓形涡,在中心区破碎为小尺度涡结构. 与此同时出现了对于 z 的非对称结构(参见 $t = 68.11$ 时的图7(b)和(d)). 在 $t = 72.17$ 时,每个弓形涡破碎为两个小尺度涡,流场出现了更大范围的小尺度涡结构且对 z 仍是非对称的(参见图7). 计算结果清楚显示了流场大尺度涡结构由拉伸、变形形成小尺度涡结构的过程. 随着进一步的发展,流动最终转捩到湍流,成为以小尺度运动为主导的流动. 在图8中给出了 $t = 116.84$ 时的展向涡量 w_z 和流向涡量 w_x 的等值面. 在图9中给出了 Reynolds 应力分量 $R_{12} = -\overline{u'v'}$ 和湍流 Mach 数 $Mt = (\overline{u_i'u_i'})^{0.5}/\tilde{c}$ ($i = 1,2,3$) 在不同时刻的变化. 这里上标"～"表示 Favre 平均. 从这里可以看到,在转捩过程中 Reynolds 应力 R_{12} 和湍流 Mach 数 Mt 的变化特征. 在 ∧涡形成的阶段 R_{12} 沿 y 方向的分布具有单峰特征;在马蹄涡形成的阶段 R_{12} 有双峰特征,这是双马蹄涡导致的剪切而产生的. 当流动达到湍流时, R_{12} 具有多峰分布状态,且趋于平坦化. 湍流 Mach 数也具有类似的特征. 应当指出,由于文中所取的 Reynolds 数较低,虽然小尺度量已趋向各向同性,但仍未达到充分发展的湍流.

本文采用高精度差分方法直接数值模拟了可压缩平面混合层流动. 给出了流动从初始失稳发展经转捩达到湍流的整个过程. 指出了在转捩过程中,小尺度涡结构的产生伴随着非对称结构的形成;证实了对于较大对流 Mach 数的可压缩平面混合层流动,转捩机制不同于不可压平面混合层流动,它是从初始失稳直接发展到湍流,没有涡对并产生,没有二次失稳.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

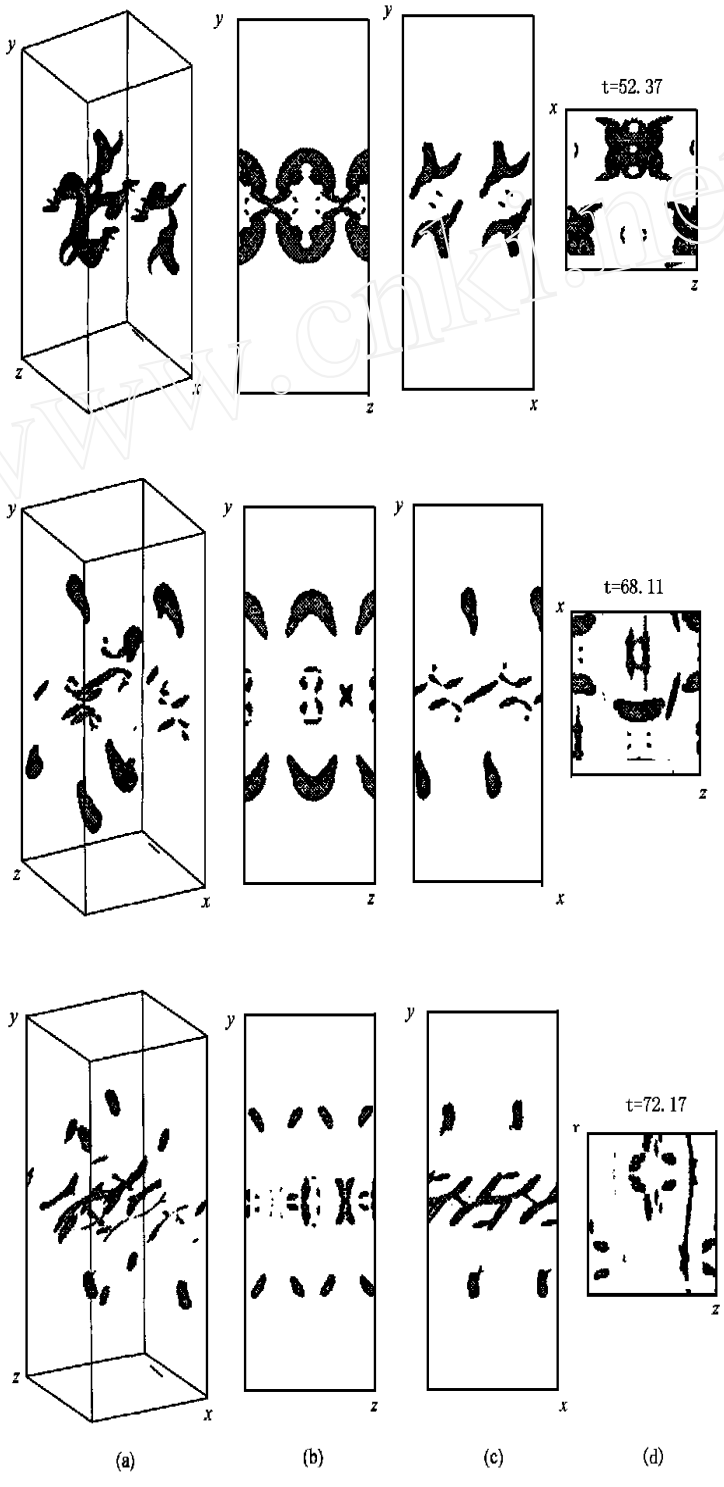

图 7　不同时刻的压力等值面

(a) 三维等值面，(b) 前视图，(c) 侧视图，(d) 俯视图

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

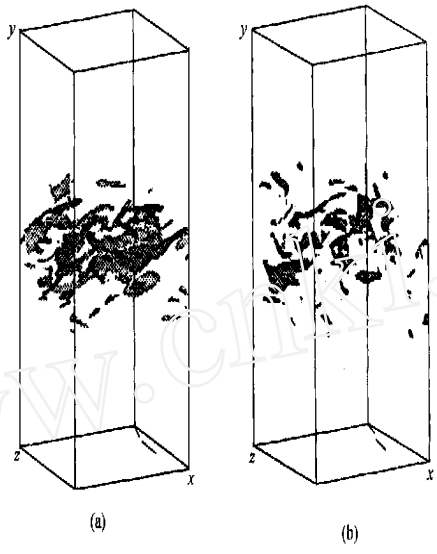

图8 w_z 和 w_x 的等值面

$t = 116.84$: (a) w_z, (b) w_x

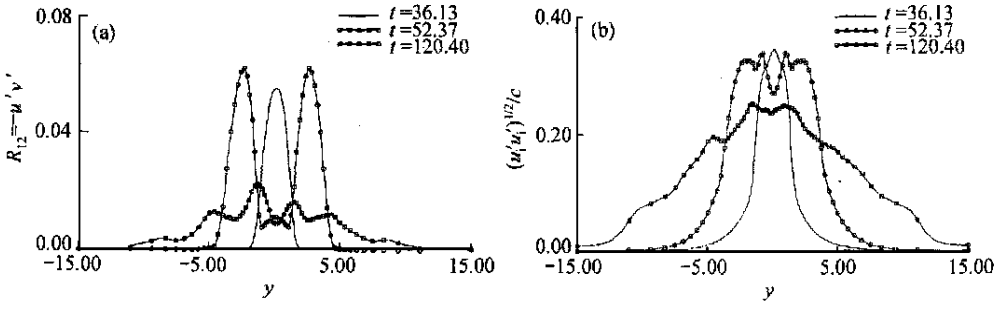

图9 R_{12}和 Mt 随时间 t 的变化

(a) R_{12}, (b) Mt

致谢 本文的计算工作得到科学与工程计算国家重点实验室的支持. 特表感谢.

参 考 文 献

1 Sandham N D, Reynoleds W C. Three-dimensional simulation of large eddies in the compressible mixing layer. J Fluid Mech, 1991, 244: 133～158

2 Luo K H, Sandham N D, Voke P R, eds. Direct and Large-Eddy Simulation I. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994. 335～346

3 傅德薰,马延文. 时间发展平面混合流的三维演化. 力学学报,1998,30(2): 129～137

4 Fu Dexun, Ma Yanwen, Computational Fluid Dynamics Review. In: Hafez M, Oshima K, eds. New York: John Wiley & Sons, 1995. 234～250

5 Lee S, Lele S K, Moin P. Eddy shocklets in decaying compressible turbulence. Phys Fluids A, 1991, 3: 657～664

6 王 强,傅德薰,马延文. 可压平面混合流稳定性数值计算. 计算物理,1997,6(4-5): 414～416

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net