第 18 卷 第 4 期
2000 年 12 月

空 气 动 力 学 学 报
ACTA AERODYNAMICA SINICA

Vol. 18, No. 4
Dec., 2000

超声速粘性剪切流空间稳定性对称紧致差分数值分析

王 强, 傅德薰, 马延文
(中国科学院力学研究所, 非线性连续介质力学开放研究实验室, 北京 100080)

摘要: 用一类高精度对称紧致差分格式数值离散一阶改型三维可压粘性扰动方程, 对导出的非线性离散特征值问题采用二阶修正 Newton-Raphson 边值迭代局部解法, 实现了超声速剪切流的线性空间稳定性分析。基于对流 M 数、Re 数、速度比、密度比等参数研究, 讨论了压缩性效应、粘性效应、超声速扰动快/慢模态等, 结果显示超声速粘性剪切流的弱不稳定性同多种影响因素密切相关。

关键词: 空间稳定性; 对称紧致差分; 压缩性效应; 粘性效应

中图分类号: O354, V211.3　　**文献标识码**: A
文章编号: 0258-1825(2000)04-0434-07

0 引 言

超声速剪切层是高速飞行器推进系统燃烧室流场的基本结构, 也是可压湍流研究所关注的一种典型流态。大多数超声速剪切层稳定性研究是在无粘假设下进行的[1~3], 人们发现, 同可压边界层流动类似, 因有快/慢第二模态扰动波存在, 超声速剪切层对二维无粘扰动总是弱不稳定的。Gropengiesser[2]最早就超声速单股剪切流分析了空间模式问题, 指出温度比对扰动增长率有明显影响。Ragab 和 Wu[4]在其超声速剪切层空间稳定性分析中计及了粘性, 结果显示粘性效应对扰动增长率具有抑制作用。

本文采用发展的 SCD-MNR (Symmetric Compact Difference- Modified Newton-Raphson) 边值迭代局部算法, 以对流 M 数为压缩性参数, 以 Re 数为粘性效应参数, 以速度比/密度比为附加参数, 对超声速自由剪切流空间稳定性问题进行了多方面参数研究。部分计算结果同已有理论和实验结论相吻合。

1 数值模型

收稿日期: 1999-11-24; 修订日期: 2000-03-20.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(批准号: 19972070), 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1999032805).
作者简介: 王 强, 理学博士, 北京 7201 信箱 16 分箱(100074).

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1.1　流动平均场

直角坐标系下，将 x, y, z 轴取作流向、横向、展向坐标。两股气流以 $y = 0$ 平面分界，在 xy 平面内做同向无约束平行剪切层流运动(快速流在上)。坐标分量 (x, y, z)、速度 (u, v, w)、温度 T、压力 p 依次由 $\delta_\omega^*, u_1^*, T_1^*, \rho_1^* u_1^{*2}$ 无量纲化，涡量厚度 $\delta_\omega^* = (u_1^* - u_2^*) / |\mathrm{d}\bar{u}^* / \mathrm{d}y^*|_{\max}$，上标 * 表示有量纲值，下标 1,2 表示上下层自由流值。设 (u, v, w, T, p) 为独立变量，由一阶近似二维局部平行流假设，得 $\bar{v}, \bar{w} = 0$。平均流向速度 $\bar{u}$ 表示双曲正切函数形式

$$\bar{u}(y) = [1 + R \cdot \tanh(2y)] / (1 + R)$$

速度比参数 $R = (1 - u_2) / (1 + u_2)$。平均温度 $\bar{T}$ 满足修正 Crocco-Busemann 积分关系式

$$\bar{T}(y) = [T_2(1 - \bar{u}) + (\bar{u} - u_2)] / (1 - u_2) + \sqrt{Pr} \cdot (\gamma - 1) M_1^2 (1 - \bar{u})(\bar{u} - u_2) / 2$$

式中 M_1 是上层来流 M 数。平均压力呈均匀分布，$\bar{p}(y) = 1 / (\gamma M_1^2)$。平均密度和平均粘性系数用气体状态方程和 Sutherland 公式确定。此外，$\gamma = 1.4$，$Pr = 0.75$，$T_1^* = 273\ K$。

1.2　三维可压线性稳定性方程

将瞬时流动元分解成平均量 $\bar{f}$ 与扰动量 f' 之和，代入三维可压 Navier-Stokes 方程，舍去高阶小量，可得关于 f' 的线化扰动方程。考虑 T-S 行谐波扰动，有

$$f'(x, y, z, t) = \hat{f}(y) \cdot \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$$

这里，$\hat{f}$ 是扰动特征函数，α 是流向波数，β 是展向波数，ω 是展向扰动频率。据此导出关于特征函数向量 $\Psi = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T}, \hat{p}, D\hat{u}, D\hat{w}, D\hat{T})^{\mathrm{T}}$ 的一阶改型三维可压线性稳定性方程

$$D\Psi = M\Psi \tag{1}$$

系数矩阵 $M \in C^{8\times 8}$，微分算子 $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}y$。对无粘情形，$M \in C^{2\times 2}$，$\Psi = (\hat{v}, \hat{p})^{\mathrm{T}}$。系数矩阵 M 的元素参见文献[5]。上下层无穷远满足 Dirichlet 渐近齐次边界条件。方程式(1)与其边界条件组成由复色散关系式 $F(Re; \alpha, \beta, \omega) = 0$ 描述的连续特征值问题。对空间模式 $\alpha \in C^1$，$\omega \in R^1$，扰动波角 $\theta = \mathrm{tg}^{-1}(\beta / \alpha_r)$，相速度 $C_{\mathrm{ph}} = \omega / \alpha_r$。

1.3　SCD-MNR 边值迭代局部算法

设网格一维均匀分布，网格点数 N，网格间距 h。将式(1)代入文献[6]的 7 点对称紧致差分格式(SCD)一般形式，整理得

$$\{cI\}\Psi_{i-3} + \{h\beta_c M_{i-2} + bI\}\Psi_{i-2} + \{h\alpha_c M_{i-1} + aI\}\Psi_{i-1} + \{hM_i\}\Psi_i +$$
$$\{h\alpha_c M_{i+1} - aI\}\Psi_{i+1} + \{h\beta_c M_{i+2} - bI\}\Psi_{i+2} + \{-cI\}\Psi_{i+3} = 0 \tag{2}$$

其中，$i = 2, \cdots, N-1$，常量 $\alpha_c, \beta_c, a, b, c$ 是差分基架参数，I 是单位阵，近边界处格式降阶。边界 $i = 1, N$ 上采用高阶迎风紧致差分格式[12]。式(2)连同边界数值离散方程和物理边界条件一起构成一个带状齐次线性方程组，以单位正规化变量方程(该变量值等于 1)替换其中的某个方程 $g(\bar{\Psi}) = 0$，$\bar{\Psi} \in C^m$，$m = 8N$，并平移至对角线上，得非齐次线性方程组

$$\bar{N}(Re; \alpha, \beta, \omega)\bar{\Psi} = \bar{r} \tag{3}$$

系数矩阵 $\bar{N} \in C^{m\times m}$，带宽 65。向量 $\bar{r}$ 的元素仅在正规化方程处非 0。基于非线性方程迭代求根思想，构造一个通用形式修正 Newton-Raphson(MNR)二阶迭代局部解法如下

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + 2f(\alpha) / \{-f'(\alpha) \pm \sqrt{[f'(\alpha)]^2 - 2f(\alpha) \cdot f''(\alpha)}\}$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

式中 ±号取使分母模最大者，并且

$$f(\alpha) = g(\overline{\Psi}_1(\alpha), \overline{\Psi}_2(\alpha), \cdots, \overline{\Psi}_m(\alpha))$$

$$f'(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial \overline{\Psi}_j} \frac{d\overline{\Psi}_j}{d\alpha}$$

$$f''(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial \overline{\Psi}_j} \frac{d^2\overline{\Psi}_j}{d\alpha^2}$$

向量 $\overline{\Psi}$ 及其导数由式(3)及其一阶和二阶微分方程组求得，所得三个线性方程组在迭代过程中共用一个 LU 分解系数矩阵。

实际计算在沿 y 方向一维坐标变换后的曲线坐标系下进行，变换后的导数与微分算子 D 只差一个变换系数。在[- y_{max}, y_{max}]区间上，本文采用的一维拟指数型坐标变换为

$$y(\eta) = y_{max}[\exp(a_g) - 1 - a_g - a_g^2/2]^{-1} \cdot \mathrm{sign}(\eta) \cdot [\exp(a_g|\eta|) - 1 - a_g|\eta| - (a_g\eta)^2/2]$$

其中，a_g 是网格分布参数，取 0.001～10 之间的常数。可以证明，$y(\eta) \in C^2[-1,1]$。

2 计算结果及分析

研究等比热比等压流。参照文献[7,8]，给出对流 M 数 M_c 和对流速度 U_c 如下

$$M_c = M_1 \cdot (1 - \lambda_u)/(1 + \lambda_\rho^{-1/2}) \qquad U_c = (1 + \lambda_u\lambda_\rho^{1/2})/(1 + \lambda_\rho^{1/2})$$

其中，$\lambda_s = s_2/s_1$，$s = (u, \rho)$。相对上下层自由流，用相速度 C_{ph} 定义扰动对流 M 数

$$M_{c1} = (1 - C_{ph}) \cdot M_1 \qquad M_{c2} = (C_{ph} - u_2)) \cdot M_1\lambda_\rho^{1/2}$$

2.1 压缩性及粘性效应

给定 $\lambda_u = 0.5$，$\lambda_\rho = 1$ 则 $U_c = 0.75$。超声速扰动波以慢模态为例。

图 1 是一组 $Re = 800$ 的二维粘性波增长率 α_i 随频率 ω 变化曲线。流动压缩性增强时，最不稳定扰动增长率及不稳定频率范围减小，超声速扰动最不稳定 α_i 约仅为低速扰动的 1/10。对 $M_c = 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$，取 ω 为三维最不稳定扰动频率，得图 2 三维扰动波 α_i

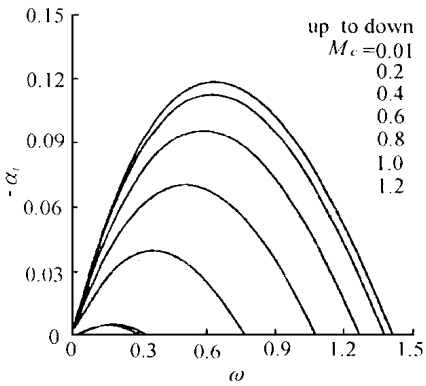

图 1 不同 M_c 扰动增长率

Fig. 1 Growth rates at different M_c

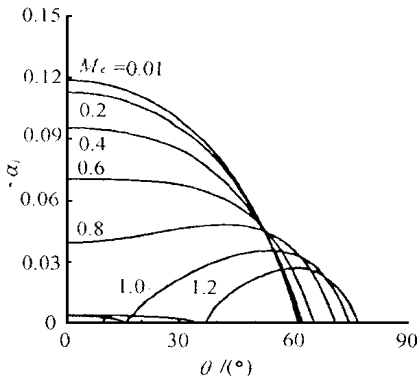

图 2 三维扰动增长率

Fig. 2 Three-dimensional growth rates

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

随波角 θ 变化曲线。M_c 增大时，以 $M_c = 0.6$ 分界，中心第一模态主导扰动波由二维转至三维，增长率明显大于超声速第二模态扰动波，后者只是二维最不稳定的。$M_c = 1, 1.2$ 曲线上的中部尖点是模态变换位置。对 $M_c = 0.01, 0.4, 0.8, 1.2, 1.4$，Sandham 和 Reynolds[9] 经解边界层方程数值设定平均场，无粘线性分析得三维最不稳定 $\omega = 0.64, 0.58, 0.35, 0.21, 0.135$，本计算为 $\omega = 0.634, 0.585, 0.365, 0.216, 0.135$，与其接近，若忽略 Re 数影响，表明解析设定平均场也是合理的。此外，中心模态扰动波的色散较小，即相速度接近常数，$C_{ph} \approx U_c$，时间模式下[9]，$C_{ph} = U_c$，两者基本吻合。以 $M_c = 0.01$ 近似不可压流，取其最不稳定 α_i 为正规化参数，图 3 是二维/三维最不稳定粘性扰动波增长率正规化变量 δ' 随 M_c 变化曲线，因主导扰动波由中心模态转向超声速模态，二维曲线在 $M_c = 1$ 附近存在折点。图中与文献[10,11]实验所测可压平面自由剪切层厚度增长率的类比显示，最不稳定扰动波增长率近似反映了剪切层厚度增长率随对流 M 数 M_c 增大而下降的趋势，从空间稳定性角度表明 M_c 不失为一个较好的压缩性参数。图 4 是最不稳定扰动波角 θ 随 M_c 变化曲线。同图 2，$M_c > 0.6$ 时，三维扰动波最不稳定，波

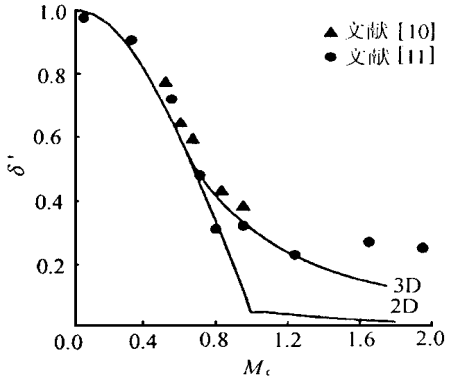

图 3　扰动增长率正规化曲线

Fig. 3　Normalized growth rates

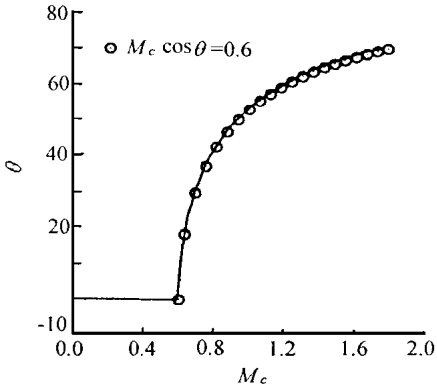

图 4　最不稳定扰动波角

Fig. 4　Most unstable wave angles

角 θ 单调上升，变化梯度由大变小，压缩性效应约在 $0.6 < M < 1.2$ 区间最强。计算结果同文献[9]经无粘时间稳定性分析给出的理论经验公式 $M_c \cdot \cos\theta \approx 0.6$ 相符。图 5 显示的是二维最不稳定粘性扰动波对流 M 数 M_{c1}, M_{c2} 及其平均 $M_{cav} = (M_{c1} + M_{c2})/2$ 与 M_c 的相关性。可以看到，$M_{cav} \approx M_c$。当 $M_c < 1$ 时，4 种对流 M 数近似相等；当 $M_c > 1$ 时，M_{c2} 基本不变，而 M_{c1} 呈线性增长。

计算表明，与压缩性效应类似，粘性效应也使扰动增长率和不稳定频率范围减小。图 6 直观呈现了粘性对二维最不稳定扰动波增长率 α_i 的稳定化作用。Ragab 和 Wu[4] 研究认为，粘性扰动波几乎可在整个 Re 数范围不稳定，且相速度受粘性影响不大。该结论仅适用于中心模态，超声速第二模态扰动波存在较大的稳定临界 Re 数，粘性效应使其相速度单调上升(快模态)或下降(慢模态)。

2.2　速度比和密度比

不妨以 $Re = 800$ 二维粘性扰动波为例。取 $M_1 = 1, \lambda_\rho = 1$，图 7 是不同速度比下扰动增长

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

率 α_i 随频率 ω 变化曲线,当 λ_u 增大时,最不稳定 α_i 减小,不稳定 ω 范围变宽。计算还显示,低来流 M 数时,二维最不稳定 α_i 随速度比参数 R 准线性变化;高 M 数时,二者关系是强非线性的。此外,二维最不稳定扰动波相速度随 R 单调下降,并受 M 数变化的影响很小。取 $\lambda_u = 0.5$,图 8 是不同密度比下 $M_1 = 2$ 时不稳定扰动波 α_i 随 ω 变化曲线。当 λ_ρ 增大时,不稳定 ω 范围减小,但最不稳定 α_i 非单调变化。图 9 显示,若使 λ_ρ 变大(冷却低速流),则最不稳定 α_i 在 $M_1 \approx 2$ 过渡区的左侧上升,在右侧下降。因此应用中要区别对待,如在燃烧室里,对较小 M_1 选择低密

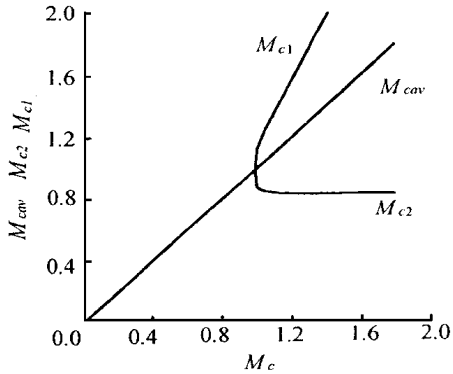

图 5 不同 M 数的相关性

Fig. 5 Corelation of different Mach numbers

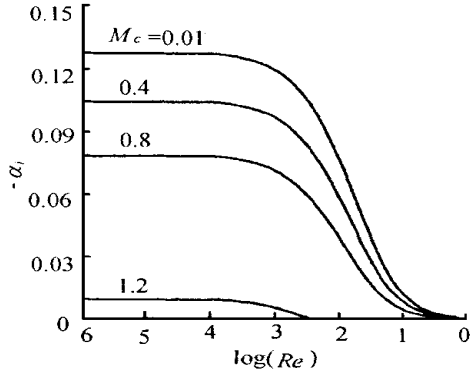

图 6 Re 对最不稳定 α_i 的影响

Fig. 6 Effects of Reynolds number on α_i

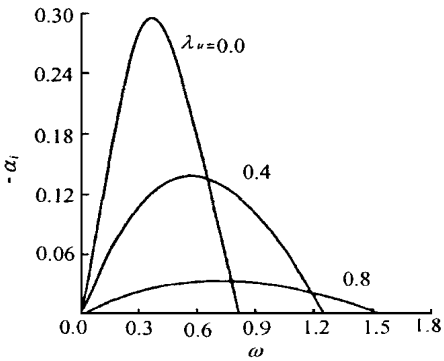

图 7 速度比对 α_i 的影响

Fig. 7 Effects of velocity ratio on α_i

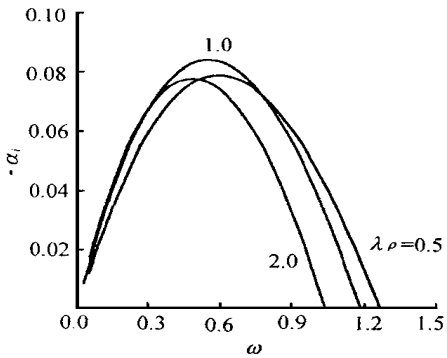

图 8 密度比对 α_i 的影响

Fig. 8 Effects of density ratio on α_i

度燃料(H_2 等)喷入高密度氧化物(O_2 等),以增进湍流混合,提高燃烧效率。特别地,减小密度比可延伸中心模态扰动波的主控 M 数范围。

2.3 超声速扰动快/慢模态

超声速扰动波按相速度大小被分成快模态(F)和慢模态(S)。取 $M_1 = 4$, $\lambda_u = 0.4$, $\lambda_\rho = 1$,则 $M_2 = 1.6$, $M_c = 1.2$。图 10 是 $Re = 3200$(实线)和 800(虚线)二维超声速快/慢模态增长

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

率 α_i 随 ω 变化曲线。慢模态最不稳定 α_i 大于快模态，但最不稳定 ω 较低，不稳定 ω 范围较窄。因所得 $C_{ph} \in (u_2, u_1)$，由图 11 知，对上层来流，快模态以亚声速，慢模态以超声速左行。类似地，对下层来流，快模态以超声速，慢模态以亚声速右行。粘性使快模态 M_{c1} 减小，M_{c2} 增大，对慢模态则相反。图 12 是 $Re = 3200$ 慢模态最不稳定扰动波特征压力等值线，即

$$p'(x, y) = \exp(-\alpha_i x \cdot [\hat{p}_r(y)\cos(\alpha_r x) - \hat{p}_i(y)\sin(\alpha_r x)]$$

其中 $\omega = 0.182$，$\alpha = (0.292037, 0.011373)$，流向取波长 2 倍。扰动波在上层超声速一侧慢衰减，形成辐射状压缩/膨胀波系(快模态与此相反)。令辐射 Mach 角 $\mu = \arcsin(1/M_{c1})$，由上层 $p' = 0$ 等值线测得 μ 约为 40.1°，接近理论值 41.6°($M_{c1} = 1.507$)。

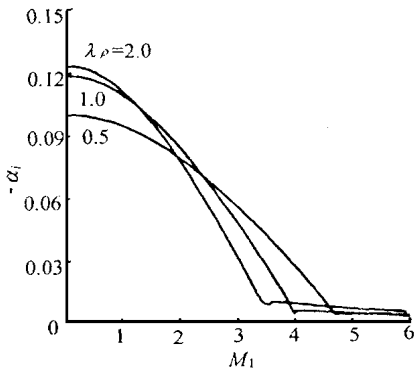

图 9　M_1 对最不稳定 α_i 的影响

Fig. 9　Effects of Mach number on α_i

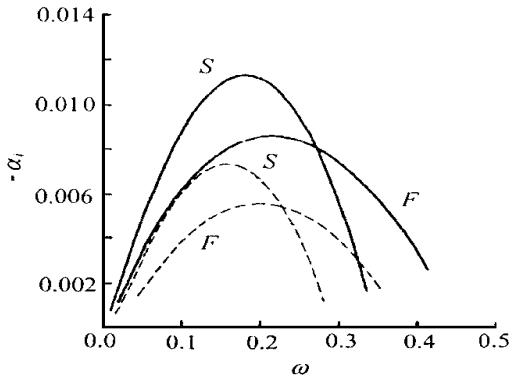

图 10　超声速扰动增长率

Fig. 10　Growth rates of supersonic waves

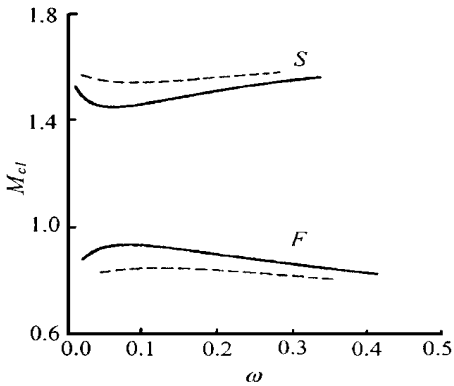

图 11　扰动上层对流 M 数

Fig. 11　Disturbance convective Mach numbers

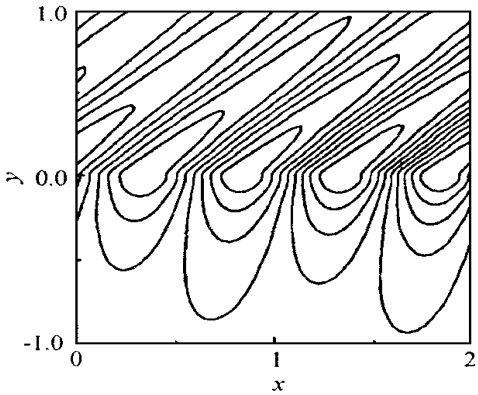

图 12　慢模态特征压力

Fig. 12　Pressure eigenfunction of slow mode

3　结　论

本文利用导出的高精度高分辨率 SCD-MNR 算法，数值研究了粘性可压自由剪切流空间稳定性问题。结果显示，压缩性和粘性效应可使高速剪切流稳定化；最不稳定扰动增长率随速

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

度比增大而减小,但有时非单调依赖于密度比;第二模态扰动波存在较大稳定临界 Reynolds 数,并以慢模态主导。超声速粘性剪切流具有更复杂的弱不稳定特征。

参 考 文 献:

[1] Lessen M, Fox J A, Zien H M. Stability of the Laminar Mixing of Two Parallel Streams with Respect to Supersonic Disturbances[J]. *J Fluid Mech*, 1966, 25(4): 737～742

[2] Gropengiesser H. Study on the Stability of Boundary Layers and Compressible Fluids[R]. NASA TT F-12-786, 1970.

[3] Jackson T L, Grosch C E. Inviscid Spatial Stability of a Compressible Mixing Layer[J]. *J Fluid Mech*, 1989, 208: 609～637.

[4] Ragab S A, Wu J L. Linear Instabilities in Two-Dimensional Compressible Mixing Layers[J]. *Phys Fluids*, 1989, A1(6): 957～966

[5] Malik M R. Numerical Methods for Hypersonic Boundary Layer Stability[J]. *J Comput Phys*, 1990, 86: 376～413

[6] Lele S K. Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like Resolution[J]. *J Comput Phys*, 1992, 103:16～42

[7] Bogdanoff D W. Compressibility Effects in Turbulent Shear Layers[J]. *AIAA J*, 1983, 21(6): 926～927

[8] Papamoschou D. Structure of the Compressible Turbulent Shear Layer[R]. AIAA-89 - 0126, 1989.

[9] Sandham ND, Reynolds W C. Compressible Mixing Layer: Linear Theory and Direct Simulation[J]. *AIAA J*, 1990, 28(4): 618～624

[10] Chinzei N, Masuya G, Komuro T, Murakami A, Kudou D. Spreading of Two-Stream Supersonic Turbulent Mixing Layers[J]. *Phys Fluids*, 1986, 29: 1345～1347.

[11] Papamoschou D, Roshko A. Observations of Supersonic Free Shear Layers[R]. AIAA-86 - 0162, 1986.

[12] Dexun Fu and Yanwen Ma. A High order Accurate Difference Scheme for Complex Flow Field. *J. comput. phys.*, 1997, 134: 1～15.

Numerical Analysis of Viscous Spatial Stability in Supersonic Shear Layers Using Symmetric Compact Difference Method

WANG Qiang, FU De-xun, MA Yan-wen

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080*))*

Abstract: The first-order modified form of three-dimensional compressible viscous disturbance equations is discretized numerically through using a family of high-accuracy symmetric compact difference schemes. A second-order modified Newton-Raphson (MNR) iteration local method is developed to solve the obtained non-linear discretized eigenvalue problem. The linear spatial stability in supersonic shear layers is analyzed numerically. Based on parameterized study including convective Mach number, Reynolds number, velocity ratio, density ratio, and so on, the compressibility, viscosity, supersonic fast/slow modes etc are discussed. The results show that the weak viscous instabilities of supersonic shear layers are related to many factors.

Key words: spatial stability; symmetric compact difference; compressibility; viscosity

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net