第 38 卷 第 3 期　　力 学 学 报　　Vol. 38, No. 3
2006 年 5 月　　Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics　　May, 2006

高 Bond 数下黏性液滴的 Rayleigh-Taylor 不稳定性[1)]

张 鹏[2)]　俞 刚

(中国科学院力学研究所高温气体动力学重点实验室, 北京 100080)

摘要 给出了高 Bond 数下黏性液滴表面 Rayleigh-Taylor 线性不稳定性的分析解, 这种不稳定性对于超音速气流作用下液滴破碎的早期阶段起着至关重要的作用. 基于稳定性分析的结果, 导出了用于估算稳定液滴的最大直径及液滴无量纲初始破碎时间的计算式, 这些计算式与相关文献给出的实验和分析结果比较显示了良好的一致.

关键词 液滴, 破碎, Rayleigh-Taylor 不稳定性, Bond 数, 黏性

中图分类号: O359, V211.1[illegible]7　**文献标识码:** A　**文章编号:** 0459-1879(2006)03-0289-07

引 言

本文的研究背景是超音速气流中单个液滴的气动破碎. 作为一个重要的、有着广泛应用背景的多相流现象, 液滴的气动破碎是过去的几十年里的热门研究课题. 一般说来, 液滴在气流作用下的破碎机制可以用液滴的初始 Weber 数 $We = \rho V^2 d/\alpha$ 来分类, 其中 ρ 是来流密度, V 是液滴和气流间的相对速度, d 是液滴直径, α 是表面张力系数. 早期的液滴气动破碎研究主要针对亚音速气流的情况, Pilch[1] 和 Hsiang[2] 对此已作了很好的综述. 文献 [3~7] 进行了高亚音速和超音速气流中液滴破碎的实验研究, 液滴初始 Weber 数高达 $10^4 \sim 10^5$, 此时的液滴破碎被所谓 "致毁破碎"(catastrophic breakup) 的机制所控制.

液滴的 "致毁破碎" 机制非常复杂, 众多文献对它的细节描述不尽相同, 大致可以将其分成 3 个阶段. 第 1 个阶段是液滴的变形. 气流在初始液滴表面形成不均匀的压力分布, 液滴在此压力分布的作用下沿气流方向被压缩, 沿垂直气流的方向被拉伸, 从而变成半透镜形 [2,7] 或椭球形 [4], 但液滴迎风面保持为球面. 第 2 个阶段中变形液滴在气流推动下作大加速运动且加速度在液滴发生破碎之前基本保持为常数 [3,5,7,8]. 这个大加速度会使得变形液滴的迎风面出现强烈的 Rayleigh-Taylor 不稳定现象, 表现为不稳定的小扰动迅速地在液滴的迎风面上形成并发展, 扰动振幅越来越大最终穿透液滴导致破碎. 液滴这种大加速运动通常采用 Bond 数 $Bo = \rho g r^2/\alpha$ 来表征, 其中 ρ, g, r 分别是液滴的密度, 加速度和半径, α 是表面张力系数. 对于超音速气流中的液滴破碎问题, Bond 数通常高达 $10^4 \sim 10^5$, 与 Weber 数量级大致相同, 满足 $Bo = \frac{3}{16} C_D We$(C_D 是阻力系数). 第 3 个阶段是液滴碎片的进一步破碎. 由于液滴碎片的 Weber 数和 Bond 数变小, 此阶段的破碎不一定由 "致毁破碎" 机制所控制. 总地说来, 超音速气流中液滴破碎早期阶段最重要的特征就是液滴的 Bond 数非常大, 由此引起的强烈的 Rayleigh-Taylor 不稳定现象在破碎机制中起着主导作用.

Rayleigh-Taylor 不稳定性是一个具有重要实用和理论价值的流体力学问题, 广泛出现于天体物理、核物理、流体力学等学科领域. 简要地说, 当两种不同密度流体的分界面作加速运动且加速度方向垂直于界面时, 则此界面稳定与否取决于加速度的方向是从大密度流体指向小密度流体或相反 [9]. 在本文问题中, 液滴加速度方向在液滴迎风面上从密度小的气流指向密度大的液滴, 因此必然会出现 Rayleigh-Taylor 不稳定现象.

与大量的实验研究相比, 高 Weber 数或高

2004-02-26 收到第 1 稿, 2005-12-19 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金重点资助项目 (10232060).

2) E-mail: pengz@princeton.edu

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Bond 数下液滴破碎的理论分析研究少见于文献. Harper[10] 用给定的压力分布来代表气流对液滴的复杂作用，运用线性稳定性分析的方法描述了无黏不可压液滴对任意压力分布的动力学响应. 根据他的分析，对于高 Bond 数的情形，液滴迎风面对于模式数小于某个临界值 $n_{cr} \approx \sqrt{Bo} \gg 1$ 的扰动是不稳定的，其中当模式数 $n_m \approx \sqrt{Bo/3} \gg 1$ 时扰动具有最大增长率 $\sigma_m \propto \sqrt[4]{Bo}$. 考虑到最不稳定的扰动导致破碎的开始，他预测的无量纲初始破碎时间 $T_b = t_b\sqrt{g/r_0} \propto Bo^{-1/4}$, 这个结果得到了 Simpkins[11] 实验的证实.

Joseph[7] 运用二维界面上黏性不可压流体 Rayleigh-Taylor 线性不稳定性理论分析了高 Bond 数下黏性液滴的破碎，预测了稳定液滴的最大直径 $d = 2\pi\sqrt{\alpha/\rho g}$, 其中 α 是表面张力系数， ρ 是液滴密度， g 是液滴的加速度. 考虑到最不稳定的扰动决定了液滴的初始破碎，他还导出了初始破碎时间 $t_b = \ln N/\sigma_m$, 其中 σ_m 是最不稳定扰动的增长率， N 取经验值 10, 由此估算的破碎时间与其实验结果定性一致.

鉴于 Haper 的分析中忽略了液滴黏性的影响, 而 Joseph 为了简化分析, 没有考虑液滴的实际形状, 而液滴黏性和液滴实际形状对于其破碎均有着不可忽视的影响，因此本文对液滴黏性和形状同时加以考察，给出了高 Bond 数下球形黏性液滴的 Rayleigh-Taylor 不稳定性的分析解. 基于稳定性分析的结果，导出稳定液滴最大直径及液滴无量纲初始破碎时间的计算式.

1 模型和控制方程

本文建立了简化模型，即一个黏性不可压缩球形液滴在无黏不可压静止气体中做大加速运动，考察这种运动对小扰动的响应. 需要着重指出的是，由于液滴的加速运动，液滴周围会形成复杂的非定常流场. 液滴表面气流切向速度的存在会引发 Kelvin-Helmohltz 不稳定性，为了避免问题的复杂化，本文忽略了这个非定常流场所带来的影响.

将球坐标系建立在加速液滴上，坐标系原点与液滴中心重合. 这是一个非惯性坐标系，但由于本文考察的是界面问题，因此非惯性系对流体力学方程和边界条件的影响可以忽略.

本文中液滴参数用下标 1 表示，气流参数用下标 2 表示. ρ 是密度， μ 是动力黏性系数， α 是表面张力系数， d_0 是液滴直径， θ 是极角. 液滴加速度 $\boldsymbol{g}$ 在球坐标系下表示为

$$\boldsymbol{g} = -g\cos\theta\boldsymbol{e}_r + g\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta = -\nabla(gr\cos\theta) \quad (1)$$

假设流动相对于加速度方向是对称的，即所有流动物理量满足 $\partial/\partial\varphi = 0$.

当液滴表面受到一个小扰动时，液滴和气体都会因此产生一个扰动速度. 在图 1 所示的坐标系中液滴只有扰动速度，从而黏性不可压液滴的连续方程和动量方程分别为 (动量方程中的对流项是一个二阶扰动量，予以忽略)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1' = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_1'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1}\nabla p_1 + \nu_1\nabla^2\boldsymbol{u}_1' - \boldsymbol{g} \quad (3)$$

其中， $\boldsymbol{u}_1'$ 是液滴的扰动速度， ν_1 是液滴的运动黏性系数， $\boldsymbol{g}$ 满足方程 (1).

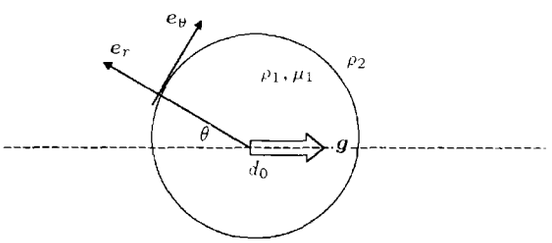

图 1 模型示意图

Fig.1 Model

在无黏不可压假设下，受扰动气体的连续方程和动量方程分别为 (前文已提到，只考虑气体对界面小扰动的响应，因此气体只有扰动速度，从而动量方程中的对流项是一个二阶扰动量，予以忽略)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_2' = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_2'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2}\nabla p_2 - \boldsymbol{g} \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{u}_2'$ 是气体的扰动速度， $\boldsymbol{g}$ 满足方程 (1).

液滴和气体的分界面方程为

$$F(r,\theta,\varphi,t) = r - [r_0 + \eta(\theta,\varphi,t)] = 0 \quad (6)$$

其中 r 是分界面某点的极半径， r_0 是液滴初始半径， $\eta(\theta,\varphi,t)$ 是初始液滴表面的小扰动.

分界面的运动学边界条件为

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{u}_i'\cdot\nabla F = 0 \quad (7)$$

其中 $i = 1,2$ 分别代表液滴和气体.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

将分界面方程 (6) 代入方程 (7)，忽略扰动量的乘积项可得的运动学边界条件

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=u'_{1r}\big|_{r=r_0}\ \text{和}\ \frac{\partial\eta}{\partial t}=u'_{2r}\big|_{r=r_0} \tag{8}$$

分界面上的动力学边界条件有 3 个，第 1 个是法向应力的平衡条件

$$p_1-p_2=\alpha\Big(\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}\Big)+2\rho_1\nu_1\frac{\partial u'_{1r}}{\partial r} \tag{9}$$

其中方程左边 p_1,p_2 分别代表液滴和气体在分界面上的压力，方程右边体现了表面张力和法向黏性应力的作用. R_a 和 R_b 是分界面任意点的两个主曲率半径，满足

$$\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}=\frac{2}{r_0}-\frac{1}{r_0^2}\Big[2\eta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\eta}{\partial\varphi^2}\Big] \tag{10}$$

另外两个动力学边界条件是液滴的切向黏性应力在分界面上连续

$$\sigma_{r\theta}=\rho\nu_1\Big(\frac{\partial u'_{1r}}{r\partial\theta}-\frac{u'_{1\theta}}{r}+\frac{\partial u'_{1\theta}}{\partial r}\Big)=0 \tag{11}$$

$$\sigma_{r\varphi}=\rho\nu_1\Big(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u'_{1r}}{\partial\varphi}-\frac{u'_{1\varphi}}{r}+\frac{\partial u'_{1\varphi}}{\partial r}\Big)=0 \tag{12}$$

按照正则模式分析的方法，考虑到问题的球对称性，将扰动 $\eta(\theta,\varphi,t)$ 用球函数展开，时间相关性用 Laplace 变换加以分离，从而可将任意一个扰动模式 (仍记作 η) 表示为

$$\eta(\theta,\varphi,t)=\varepsilon Y_l^m\mathrm{e}^{-\sigma t} \tag{13}$$

其中 Y_l^m 是 l 阶球函数，σ 是扰动增长率，ε 是小扰动量. $\mathrm{Re}(\sigma)<0$ 时扰动振幅以指数形式增长，因而界面是不稳定的.

不考虑液滴的黏性，对于高 Bond 数下不可压液滴，Harper[10] 证明了对应于中性稳定和最大不稳定的模式数都非常大，本文认为考虑液滴黏性的情况下这个结论仍然成立，因此本文作了大模式数假设 $l\gg1$(或称小波长假设). 当模式数 l 很大，$Y_l^m(\theta,\varphi)$ 随 θ 快速振荡，这反映了高曲率对表面张力的影响. 另一方面，表征液滴加速度影响的变化系数 $\varepsilon\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 仅以 $g\cos\theta$ 的形式缓慢依赖 θ，因此可以定义快变量 θ' 和慢变量 θ，从而寻求形式解

$$\eta=\varepsilon Y_l^m(\theta',\varphi)\mathrm{e}^{-\sigma(\theta)t} \tag{14}$$

方程 (14) 与前面的控制方程和边界条件构成了一个关于 σ 的本征值问题，求解这个本征值问题的非零解可以得到 σ 与模式参数 (l,m) 及流动参数之间的本征关系.

2 本征值问题的解

利用恒等式 $\nabla^2\times\boldsymbol{u}'=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}'=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}')-\nabla^2\boldsymbol{u}'$ 和方程 (2)，方程 (3) 可写为

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}'_1}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_1}\nabla p_1-\nu_1\nabla^2\times\boldsymbol{u}'_1-\boldsymbol{g} \tag{15}$$

将扰动速度 $\boldsymbol{u}'_1$ 分解为无旋的 $\nabla\phi'_1$ 和有旋的 $\boldsymbol{\psi}'_1$ 两个部分，即 $\boldsymbol{u}'_1=\nabla\phi'_1+\boldsymbol{\psi}'_1$，并且满足

$$\nabla^2\phi'_1=0 \tag{16}$$

$$p_1=-\rho_1\frac{\partial\phi'_1}{\partial t}+\rho_1 gr\cos\theta+C_1 \tag{17}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}'_1=0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\psi}'_1}{\partial t}+\nu_1\nabla^2\times\boldsymbol{\psi}'_1=0 \tag{19}$$

其中 C_1 是常数. 容易验证方程 (16)~(19) 满足方程 (15).

在球坐标系下，方程 (16) 的通解结合原点处的自然边界条件可写为

$$\phi'_1=(l+1)Ar^lY_l^m \tag{20}$$

其中 A 为待定式.

利用 Chandraskhar[19] 给出的方法，解方程 (19) 可得 $\boldsymbol{\psi}'_1$ 的 3 个分量为

$$\left.\begin{aligned}\psi'_{1r}&=\frac{l(l+1)}{r^2}\Psi'_1Y_l^m\mathrm{e}^{-\sigma t}\\ \psi'_{1\theta}&=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\Psi'_1}{\mathrm{d}r}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\mathrm{e}^{-\sigma t}\\ \psi'_{1\varphi}&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\Psi'_1}{\mathrm{d}r}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi}\mathrm{e}^{-\sigma t}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

其中 $\Psi'_1=Br^{1/2}J_{l+1/2}(qr)$，$J_{l+1/2}$ 是 l 阶球 Bessel 函数，$q=\sqrt{\sigma/\nu_1}$，B 是待定式.

把方程 (20) 和方程 (21) 代入边界条件 (8) 以及式 (11) 或式 (12)，从而可以确定两个待定式

$$\left.\begin{aligned}A&=-\frac{\varepsilon\sigma\mathrm{e}^{-\sigma t}}{l(l+1)r_0^{l-1}}\Big[1+\frac{2(l^2-1)}{2xQ_{l+1/2}(x)-x^2}\Big]\\ B&=\frac{2(l-1)\varepsilon\sigma r_0^{3/2}}{l[2xJ_{l+3/2}(x)-x^2J_{l+1/2}(x)]}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

其中 $Q_{l+1/2}(x)=J_{l+3/2}(x)/J_{l+1/2}(x)$，$x=qr_0=r_0\sqrt{\sigma/\nu_1}$. 至此液滴的扰动速度就完全确定了，将其代入方程 (17) 可得液滴在分界面上的压力

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$p_1 = -\frac{\rho_1\sigma^2 r_0}{l}\Big[1+\frac{2(l^2-1)}{2xQ_{l+1/2}(x)-x^2}\Big]\varepsilon Y_l^m \mathrm{e}^{-\sigma t}+ \rho_1 g(r_0+\varepsilon Y_l^m \mathrm{e}^{-\sigma t})\cos\theta + C_1 \tag{23}$$

对于从静止开始的无黏气体的扰动，可以引入扰动速度势 ϕ_2'，满足 $\boldsymbol{u}_2' = \nabla\phi_2'$，从而有连续方程

$$\nabla^2\phi_2' = 0 \tag{24}$$

及积分动量方程 (5) 得到的非定常 Bernoulli 方程

$$p_2 = -\rho_2\frac{\partial\phi_2'}{\partial t} + \rho_2 g r\cos\theta + C_2 \tag{25}$$

其中 C_2 是常数.

球坐标系下，方程 (24) 的通解结合无穷远处的自然边界条件及边界条件 (8) 有

$$\phi_2' = \varepsilon\frac{\sigma r_0}{l+1}\Big(\frac{r}{r_0}\Big)^{-(l+1)} Y_l^m \mathrm{e}^{-\sigma t} \tag{26}$$

代入式 (25) 可得气体在分界面上的压力

$$p_2 = \frac{\rho_2\sigma^2 r_0}{l+1}\varepsilon Y_l^m \mathrm{e}^{-\sigma t}+ \rho_2(r_0+\varepsilon Y_l^m \mathrm{e}^{-\sigma t})g\cos\theta + C_2 \tag{27}$$

将方程 (23) 和方程 (27) 代入边界条件 (9), 所得方程中与 $\varepsilon Y_l^m \mathrm{e}^{-\sigma t}$ 成比例的扰动量的部分应该等于零，从而给出

$$\Big[\Big(\frac{\rho_1}{l}+\frac{\rho_2}{l+1}\Big)\Big]r_0\sigma^2 + \frac{2(l-1)}{l}\frac{\rho_1\nu_1\sigma}{r_0}\cdot \Big[\frac{(2l+1)x-2l(l+2)Q_{l+1/2}(x)}{2Q_{l+1/2}(x)-x}\Big]- \Big[(\rho_1-\rho_2)g\cos\theta - \alpha\frac{(l-1)(l+2)}{r_0^2}\Big] = 0 \tag{28}$$

利用前面提到的大模式数假设 $l \gg 1$ 简化方程 (28). 利用 Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 在 x 固定 $\nu \gg 1$ 时的渐近展开 [14]

$$J_\nu(x) = \frac{\mathrm{e}^\nu\Big(\frac{1}{2}x\Big)^\nu}{(2\pi\nu)^{1/2}\nu^\nu}[1+O(\nu^{-1})] \tag{29}$$

代入 $Q_\nu(x) = J_{\nu+1}(x)/J_\nu(x)$ 可得

$$Q_\nu(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{\nu+1}\Big(\frac{1}{2}x\Big)^{\nu+1}}{[2\pi(\nu+1)]^{1/2}(\nu+1)^{\nu+1}}\Big/ \frac{\mathrm{e}^\nu\Big(\frac{1}{2}x\Big)^\nu}{(2\pi\nu)^{1/2}\nu^\nu} = \frac{\mathrm{e}x}{2\nu}\sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}}\Big(\frac{\nu}{\nu+1}\Big)^{\nu+1} \approx \frac{x}{2\nu} \tag{30}$$

将方程 (30) 用于方程 (28) 可得

$$\sigma^2 - \frac{2\rho_1\nu_1}{\rho_1+\rho_2}\Big(\frac{l}{r_0}\Big)^2\sigma - \Big[\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}g\cos\theta\Big(\frac{l}{r_0}\Big)- \frac{\alpha}{\rho_1+\rho_2}\Big(\frac{l}{r_0}\Big)^3\Big] = 0 \tag{31}$$

解这个方程可得

$$\sigma = \frac{\rho_1\nu_1}{\rho_1+\rho_2}\Big(\frac{l}{r_0}\Big)^2 \pm \Big[\Big(\frac{\rho_1\nu_1}{\rho_1+\rho_2}\Big)^2\Big(\frac{l}{r_0}\Big)^4+ \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}g\cos\theta\Big(\frac{l}{r_0}\Big) - \frac{\alpha}{\rho_1+\rho_2}\Big(\frac{l}{r_0}\Big)^3\Big]^{1/2} \tag{32}$$

它的无量纲形式为

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sqrt{2}}{1+\kappa}(Oh)l^2 \pm \Big[\frac{2}{(1+\kappa)^2}(Oh)^2 l^4+ \frac{1-\kappa}{1+\kappa}(Bo)l\cos\theta - \frac{1}{1+\kappa}l^3\Big]^{1/2} \tag{33}$$

其中 Ohnesorge 数 $Oh = \mu_1/\sqrt{\rho_1 d_0\alpha}$ 代表了液滴黏性的影响，在本文关心的范围内满足 $Oh \ll 1$. 气液密度比 $\kappa = \rho_2/\rho_1 \ll 1$. $\tau = (\alpha/\rho_1 r_0^3)^{1/2}$ 与 σ 具有同样的量纲.

3 中性稳定和稳定液滴的最大直径

易知中性稳定条件 $\mathrm{Re}(\sigma) = 0$ 在方程 (33) 中等价于 $\sigma = 0$，因此中性稳定条件给出

$$\frac{1-\kappa}{1+\kappa}(Bo)l\cos\theta - \frac{1}{1+\kappa}l^3 = 0 \tag{34}$$

运用 $\kappa \ll 1$，方程 (34) 的解为

$$l = \sqrt{(Bo)\cos\theta}$$

可见在 $\theta = 0$ 处，有最大的临界 (截断) 模式数

$$l_{\mathrm{cr}} = \sqrt{Bo}$$

整个液滴迎风面对 $l > l_{\mathrm{cr}}$ 的扰动模式是稳定的，这是因为表面张力的存在会消除大于这个临界模式数的扰动造成的不稳定，这个结果与 Harper[10] 的结果完全一致. 值得注意的是液滴黏性的存在不会影响液滴的中性稳定， Joseph[7] 的分析也指出了这一点. Joseph[7] 考虑到液滴对于波长小于临界值 λ_{cr} 的扰动是稳定的，对波长大于临界值 λ_{cr} 的扰动是不稳定的，提出了用于估算稳定液滴临界直径的准则

$$d_{\mathrm{cr}} = \lambda_{\mathrm{cr}} \tag{35}$$

其中， d_{cr} 是不会因 Rayleigh-Taylor 不稳定性而破碎的液滴的临界直径.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

在本文问题中也可以建立这样的关系，但是 λ_{cr} 的含义变成最大临界模式数 l_{cr} 对应的波长，为此首先需要建立 λ_{cr} 与 l_{cr} 之间的联系. 考虑到本征关系具有简便的形式 (不含模式数 m)，故假设扰动也是球对称的，即方程 (14) 中球函数 $Y_l^m(\theta,\varphi)$ 变成 Legendre 多项式 $P_l(\cos\theta)$. 运用 $P_l(\cos\theta)$ 在 $\theta=0$ 附近 (最大临界模式数在此处取得) 的性质引入局部波长的定义

$$\lambda_{cr}=2r_0\theta_{cr} \tag{36}$$

其中 θ_{cr} 是 $\theta=0$ 附近 $P_l(\cos\theta)$ 的第 1 个极小值 (视为波谷) 对应的极角. 这样定义的原因是 $P_l(\cos\theta)$ 在 $\theta=0$ 处恒为极大值 1(视为波峰)，波峰与波谷对应的弧长的两倍就是所定义的波长. 考虑到 $l_{cr}\approx\sqrt{Bo}\gg 1$，利用 $P_l(\cos\theta)$ 在 $l\gg 1$ 时的渐近展开 [14]

$$P_l(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi l\sin\theta}}\sin\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]\cdot\left[1+O(l^{-1})\right]$$

易求得 $\theta_{cr}\approx 5\pi/4l_{cr}$，将其代入式 (35) 及式 (36) 有

$$d_{cr}=\lambda_{cr}\approx\frac{5\pi}{2}\frac{r_0}{l_{cr}}\approx\frac{5\pi}{2}\frac{r_0}{\sqrt{Bo}}=\frac{5\pi}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\rho_1 g}}$$

这个结果非常相似于 Joseph 的结果

$$d_{cr}=\lambda_{cr}=2\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\rho_1 g}}$$

不同之处仅在于根式前的系数，这正是由界面的形状所决定的. Joseph 的分析为简化起见，将液滴的迎风面近似为平面，而本文考虑到液滴迎风面的实际形状为球面，因此本文的结果可看成是 Joseph 结果的一个完善.

4 最大不稳定和液滴的初始破碎时间

从方程 (33) 可以求出，在 $\theta=0$ 处，当模式数取

$$l_m=\sqrt{\frac{Bo}{3}}\left[1-\frac{4\cdot 3^{3/4}b^{1/4}}{9}(Oh)\right]$$

扰动增长率绝对值有其最大值

$$\sigma_m=-\tau\sqrt{2}\left(\frac{Bo}{3}\right)^{3/4}\left[1-(Oh)\left(\frac{Bo}{3}\right)^{1/4}\right]$$

扰动振幅可以写为

$$\eta=\varepsilon Y_l^m\exp\left\{\tau t\sqrt{2}\left(\frac{Bo}{3}\right)^{3/4}\left[1-\left(\frac{Bo}{3}\right)^{1/4}(Oh)\right]\right\} \tag{37}$$

实验表明振幅增长最快的扰动引起破碎. 液滴的初始破碎时间 t_b 理论上定义为增长率最大的扰动，其振幅增大到初始振幅的 N 倍所需时间，在实验中体现为从液滴开始加速到液滴迎风面上出现明显的不稳定现象所需要的时间. 根据这个定义从方程 (37) 可得

$$\tau t_b\sqrt{2}\left(\frac{Bo}{3}\right)^{3/4}\left[1-\left(\frac{Bo}{3}\right)^{1/4}(Oh)\right]=\ln N \tag{38}$$

它的无量纲形式为

$$T_b=\left[2\ln N(C_D)^{-3/4}\right](We)^{-1/4}\cdot\left\{1+\left[\frac{1}{2}(C_D)^{1/4}(We)^{1/4}\right](Oh)+O\left[(C_D)^{1/2}(We)^{1/2}(Oh)^2\right]\right\} \tag{39}$$

其中无量纲时间 T 定义为 $T=U_2\kappa^{1/2}t/d_0=(We/8)^{1/2}\tau t$.

从方程 (38) 可以看出液滴黏性的存在使得液滴的初始破碎时间增大，也就是说液滴黏性起到了延缓液滴破碎的作用，但它无法消除破碎现象.

Plich[1] 给出了通过实验获得经验公式

$$T_b=1.9(We-12)^{-1/4}[1+2.2(Oh)^{1.6}] \tag{40}$$

比较方程 (39) 与方程 (40)，可见两式在液滴无量纲初始破碎时间 T_b 与 Weber 数的函数关系上完全一致，所不同的只是指数式前面的系数 C_D(实验测得的超音速流中液滴的阻力系数大约为 1.5~2.5[2]，因此阻力系数不会影响到函数关系)，但这个系数是线性稳定性分析所不能解决的. 两式的比较结果还暗示 $N\approx e^{1.6}$(C_D 取典型值 2.0, 下同). 如果考虑到 Oh 的平方修正项，两式在液滴无量纲破碎时间 T_b 与 Oh 的函数关系上也是非常相似的.

作为重要的退化形式，当 $Oh=0$ 即不考虑液滴黏性时

$$T_b=\left[2\ln N(C_D)^{-3/4}\right](We)^{-1/4} \tag{41}$$

Waldman[5] 通过实验得到

$$T_b=45(We)^{-1/4} \tag{42}$$

比较方程 (41) 与方程 (42) 可见两式在液滴无量纲初始破碎时间 T_b 与 Weber 数的函数关系上完全一致，所不同的只是指数式前面的系数. 两式的比较结果还暗示 $N\approx e^{37.8}$.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

采用另外一种无量纲时间的定义方法 $\tilde{T} = t\sqrt{g/r_0}$, 将其应用于式 (38) 且 $Oh = 0$ 可得

$$\tilde{T}_{\rm b} = \left[\frac{3}{\sqrt[4]{12}}\ln N\right](Bo)^{-1/4} \approx 1.6\ln N(Bo)^{-1/4} \quad (43)$$

Simpkins[11] 的实验发现

$$\tilde{T}_{\rm b} = 22(Bo)^{-1/4} \quad (44)$$

比较方程 (43) 与方程 (44) 可见两式在液滴无量纲初始破碎时间 $\tilde{T}_{\rm b}$ 与 Bond 数的函数关系上完全一致, 所不同的也只是指数式前面的系数. 两式的比较结果也暗示了 $N \approx {\rm e}^{13.8}$.

无量纲时间还有第 3 种定义 $\hat{T} = tU_2/\sqrt{\kappa}r_0$, 将其应用于式 (38) 且 $Oh = 0$ 可得

$$\hat{T}_{\rm b} = \left[2\sqrt[4]{3}(C_D)^{-1/2}\right](Bo)^{-1/4} \approx 1.9\ln N(Bo)^{-1/4} \quad (45)$$

Patel[8] 的实验发现

$$\hat{T}_{\rm b} \approx 1.66(Bo)^{-1/4} \quad (46)$$

比较方程 (45) 与方程 (46) 可见两式在液滴无量纲初始破碎时间 $\hat{T}_{\rm b}$ 与 Bond 数的函数关系上完全一致, 所不同的也只是指数式前面的系数. 两式的比较结果也暗示了 $N \approx {\rm e}^{0.9}$.

本文的分析结果用 3 种不同的方法无量纲化都取得了和实验定性一致的结果, 但是 $N \approx {\rm e}^{1.6}$, $N \approx {\rm e}^{37.8}$, $N \approx {\rm e}^{13.8}$ 与 $N \approx {\rm e}^{0.9}$ 这些通过与实验结果对比得到的经验系数彼此之间相差太大, 其原因是不同研究者的实验彼此也有很大的出入, 这可能是因为实验中初始破碎时间的定义比较模糊, 难以准确测量造成的. 经过比较, 本文认为 N 取 5~10 的经验值较好.

5 结 论

本文分析了高 Bond 数下黏性不可压缩球形液滴在静止无黏不可压缩气体中加速运动引起的 Rayleigh-Taylor 不稳定性. 与前人的工作相比, 本文的特点在于同时考察了液滴黏性和形状对稳定性的影响, 得到的结果更具一般性. 具体的结论如下:

(1) 液滴高 Bond 数是造成液滴迎风面 Rayleigh-Taylor 不稳定性的决定因素, 表面张力的存在会消除充分大模式 (对应充分小波长) 扰动的不稳定. 即扰动存在一个最大模式数 $l_{\rm cr} \propto \sqrt{Bo}$, 液滴迎风面对 $l > l_{\rm cr}$ 的扰动是稳定的. 液滴的黏性不影响 $l_{\rm cr}$ 的大小.

(2) 液滴表面最不稳定的地方在 $\theta = 0$ 处, 这是因为此处加速度的径向分量最大, 而加速度又对不稳定性起着最重要的作用.

(3) 运用稳定性分析的结果估算的稳定液滴的最大直径 $d_{\rm cr} = \frac{5\pi}{2}\sqrt{\alpha/\rho_1 g}$, 在这个尺寸上对液滴起破碎作用的加速度与起稳定作用的表面张力达到了平衡. 液滴的黏性不会影响稳定液滴的最大直径.

(4) 运用稳定性分析的结果估算的液滴无量纲初始破碎时间 $T_{\rm b} \propto (We)^{-1/4}$ 或 $\tilde{T}_{\rm b} \propto (Bo)^{-1/4}$, 这些分析结果被众多实验所证实. 液滴黏性起到了延缓液滴初始破碎时间的作用, 但不能消除破碎现象, 这与实验观察也是一致的.

致谢 感谢解伯民研究员对本文工作极富价值的批评和建议.

参 考 文 献

1 Pilch M, Erdman C. Use of break-up time data and velocity history data to predict the maximum size of stable fragments for acceleration -induced break-up of a liquid drop. *Int J Multiphase Flow*, 1987, 13: 741~757

2 Hsiang L-P, Faeth GM. Near-limit drop deformation and secondary breakup. *Int J Multi-Phase Flow*, 1992, 18: 635~652

3 Engel OG. Fragmentation of waterdrops in the zone behind an air shock. *J Res Natl Bur Stand*, 1958, 60: 245~280

4 Ranger AA, Nicholls JA. Aerodynamic shattering of liquid drops. *AIAA J*, 1969, 7: 285~290

5 Waldman GD, Reinecke WG. Raindrop breakup in the shock layer of a high-speed vehicle. *AIAA J*, 1972, 9: 1200~1204

6 Wierzba A, Takayama K. Experimental investigation of the aerodynamic breakup of liquid drops. *AIAA J*, 1988, 26: 1329~1335

7 Joseph DD, Belanger J, Beavers GS. Breakup of a liquid drop suddenly exposed to a high speed air stream. *Int J Multiphase Flow*, 1999, 25 (6-7): 1263~1303

8 Patel PD, Theofanous TG. Hydrodynamic fragmentation of drops. *J Fluid Mech*, 1981, 103: 207~223

9 Taylor GI. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. *I Proc Roy Soc A*, 1950, 201: 192~196

10 Harper EY, Grube GW, Chang I-Dee. On the breakup of accelerating liquid drops. *J Fluid Mech*, 1972, 52: 565~591

11 Simpkins PG, Bales EL. Water-drop response to sudden accelerations. *J Fluid Mech*, 1972, 55: 629~639

12 Landau LD, Lifshitz EM. Fluid Mechanics. London: Pergamon Press, 1959

13 Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon Press, 1961

14 Copson ET. Asymptotic Expansions. Cambridge: Cambridge University Press, 1965

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

RAYLEIGH-TAYLOR INSTABILITY OF A LIQUID DROP AT HIGH BOND NUMBERS [1)]

Zhang Peng[2)]　Yu Gang

(*Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

Abstract　In this paper, an analytical solution is presented for the Rayleigh-Taylor instability of a viscous liquid drop at high Bond numbers. The instability plays an important role in the early stage of the aerodynamic breakup of liquid drops in a supersonic flow. Based on the analytical solution, the maximum size of a liquid drop stable with respect to Rayleigh-Taylor instability and the initiation time of drop breakup can be predicted. The predictions show good agreement with relevant experimental and analytical results from literature.

Key words　liquid drop, breakup, Rayleigh-Taylor instability, Bond number, viscosity

Received 26 February 2004, revised 19 December 2005.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10232060).

2) E-mail: pengz@princeton.edu

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net