

参考文献

- 1 李术才. 加锚断续节理岩体断裂损伤模型及其应用. [博士学位论文], 武汉: 中国科学院武汉岩土所, 1996
- 2 徐靖南. 压剪应力作用下多裂隙岩体的力学特性. [博士学位论文], 武汉: 中国科学院武汉岩土所, 1993
- 3 Kemeny I, Cook N G W. Effective moduli, non-linear deformation and strength of a cracked elastic solid. *Int J Rock Mech Sci & Geomech Abstr*, 1986, 23(2): 107~118
- 4 杨延毅. 节理裂隙岩体损伤-断裂力学模型及其在岩体工程中的应用. [博士学位论文], 北京: 清华大学, 1990
- 5 煤炭科学研究院北京开采研究所. 煤矿地表移动与覆岩破坏规律及其应用. 北京: 煤炭工业出版社, 1981
- 6 宋振骐, 蒋金泉. 煤矿岩层控制的研究重点与方向. 岩石力学与工程学报, 1996, 15(2): 128~134

A FRACTURE-DAMAGE MODEL OF THE DAMAGING PROCESS OF SURROUNDING ROCKMASS/COAL

AROUND STOPE

LI Shucui ZHU Weishen
(Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

SONG Zhenqi JIANG Jinquan
(Shandong Mining Institute, Tai'an 271000, China)

Abstract The constitutive relations under compression-shearing and tension-shearing stress states are derived regarding discontinuous jointed rockmass and coal as damaged medium and considering different stress states. These relations are applied to analyse rock movement and damage fracture. The calculated result agrees well with the measured data and can be used to estimate rock movement and stress.

Key words damage, constitutive relation, damaging process

矩形智能板弯曲形状的主动控制

冯 玮 柳春图

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 研究具有离散分布压电控制器的矩形智能板, 在外加电场作用下的弯曲形状与压电元件外加控制电压之间的关系, 建立了对智能矩形板的弯曲形状进行主动控制的方法, 得到各离散分布压电元件控制电压的解析解, 并给出了算例。

关键词 智能结构, 矩形板, 弯曲, 控制

1 引言

压电效应自发现以来, 已有很长历史。由于具有特殊性质, 即电能与机械能之间的双向可逆转换性质, 压电材料可以作为传感器与控制器应用于离散系统的感应与控制中。基于压电效应和逆压电效应, 压电材料可贴于梁、板、壳等结构元件的表面或嵌入其内部, 以作用电场产生变形或由变形产生电场的相互关系, 达到感应和控制的目的。

近年来, 许多工作者致力于智能结构研究方法的建立, Seyoung Im and S.N. Atluri^[1], Y.S. Zhou and H.F. Tiersten^[2] 与 J.S. Yang and R.C. Ratner^[3] 以及 Bor Tsues Wang and Craig A. Rorers^[4] 等先后给出了智能结构的数学模型, 智能结构在振动控制中的应用也有大量系统工作^[5,6], 孙东昌、王大钧^[7,10] 在智能梁与智能板振动控制方面有详细论述, 有关智能结构的综述性文献可见文^[9,11]。

智能梁、板的弯曲控制是智能结构主动控制中的一个重要方面, 文[1]对智能梁的弯曲问题作了探讨, 文[2]利用有限层法得到了层合板的弯曲解, 文[12]研究了环形智能板轴对称弯曲问题。本文着重研究了矩形智能板弯曲形状与控制电压之间的关系, 以简支情况为例, 给出了为达到预定弯曲形状, 各压电元件控制电压的解析表达式, 为矩形智能板弯曲的主动控制

1998-04-07 收到第1稿, 1998-06-19 收到修改稿。

提供了计算方法, 而这方面的工作目前还未见报道。

2 矩形智能板的基本方程

考虑如图 1 所示的长为 a , 宽为 b , 由上、下表面对称地贴有若干压电片所构成的矩形智能板, 其材料常数为 E 、 μ , 并作如下假设:

- (1) 压电片与板之间粘合牢固, 无相对位移;
- (2) 压电片极化方向沿 z 轴, 上、下表面控制电压以压电片产生拉伸应变为正;
- (3) 压电片为面内各向同性, 其质量和刚度不计.

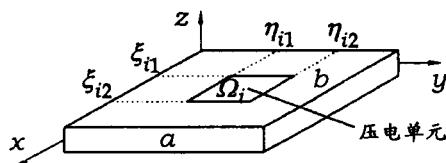


图 1 智能板示意图

设 d 是各向同性材料压电应变系数, 压电片在外加电压作用下的应变^[8]为

$$\{\varepsilon\}_p = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_p = \frac{V_d}{h_p} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

记第 i 个压电片 4 个角点坐标为: $(\xi_{i1}, \eta_{i1}), (\xi_{i1}, \eta_{i2}), (\xi_{i2}, \eta_{i1}), (\xi_{i2}, \eta_{i2})$, 引入广义位置函数

$$R_i(x, y) = R_i(x) \cdot R_i(y)$$

$$R_i(x) = \begin{cases} 1 & \xi_{i1} < x < \xi_{i2} \\ 0 & \text{(其它)} \end{cases} \quad (2)$$

$$R_i(y) = \begin{cases} 1 & \eta_{i1} < y < \eta_{i2} \\ 0 & \text{(其它)} \end{cases}$$

压电片对板的作用归结为压电片在板的局部所引起的应变 $\{\varepsilon_p\}_i^t, \{\varepsilon_p\}_i^b$, 设 V_i^t, V_i^b 分别是每一对压电片上的控制电压, h, h_p 是板厚与压电片厚度. 板内应力分布为

$$\{\sigma\} = [Q] \left[\{\varepsilon\} + \sum_i \left(\{\varepsilon_p\}_i^t + \{\varepsilon_p\}_i^b \right) \cdot R_i(x, y) \right] \quad (3)$$

将上式沿厚度积分, 可得到中面力与力矩, 采用记号

$$c_2 = \frac{dh^2 E}{12h_p(1-\mu)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu)}$$

令 $V_i^t = -V_i^b = V_i$, 不考虑横向载荷, 则得到智能板运动微分方程

$$D\nabla^4 w(x, y) = 2c_2 \sum_i V_i \nabla^2 R_i(x, y) \quad (4)$$

3 矩形智能板在控制电压作用下的弯曲

智能板控制方程的解可以根据不同的边界条件将挠度按不同的基函数展开. 以下用简支板为例, 设

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (5)$$

由智能板控制方程 (4) 可得

$$\frac{D}{2c_2} \nabla^2 w(x, y) = \sum_i V_i R_i(x, y) \quad (6)$$

记

$$f_{mn} := -\frac{8c_2 a^2 b^2}{D \alpha \hat{\omega} (\beta^2 m^2 \pi^2 + \alpha^2 n^2 \pi^2)}$$

$$g_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

由 (5) 式、(6) 式得到

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \int_{\Omega_1} g_{11} d\Omega_1 & f_{11} \int_{\Omega_2} g_{11} d\Omega_2 \\ f_{12} \int_{\Omega_1} g_{12} d\Omega_1 & f_{12} \int_{\Omega_2} g_{12} d\Omega_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_{mn} \int_{\Omega_1} g_{mn} d\Omega_1 & f_{mn} \int_{\Omega_2} g_{mn} d\Omega_2 \\ \dots & f_{11} \int_{\Omega_{mn}} g_{11} d\Omega_{mn} \\ \dots & f_{12} \int_{\Omega_{mn}} g_{12} d\Omega_{mn} \\ \vdots & \vdots \\ \dots & f_{mn} \int_{\Omega_{mn}} g_{mn} d\Omega_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{mn} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

当智能板上压电片位置固定后, (7) 式右边系数矩阵 $[M]$ 便为已知, 由于其中各元素只与压电片位置有关, 则可通过适当选取压电片分布方式, 以保证系数矩阵 $[M]$ 非奇异. 由 (7) 式即可求得控制电压 $\{V\}$ 作用下智能板的弯曲形状. 需要说明的是, 从严格的固体力学观点看, 在压电元件周边应变是不连续的, 而 (5) 式所表示的板的变形是连续的, 且由此导出的应变也是连续的, 这样 (5) 式就造成过分协调问题, 但从工程应用角度出发, 以上问题可以忽略.

4 矩形智能板弯曲形状控制

智能结构的特点就是可以根据不同的需要, 能够通过调节外加控制电场, 对其变形进行主动控制, 以达到预定的形状。仍以简支板为例, 设预定变形后形状为 $\bar{w}(x, y)$, 我们可以将它按三角函数(5)展开, 并在 M 、 N 处截断。由(7)式求得 MN 个压电片上的控制电压

$$\{V\} = [M]^{-1} \cdot \{\bar{A}\} \quad (8)$$

由于实际情况下 m, n 不可能取到无穷大, 只能在某个 M 、 N 处截断, 因而压电片数目越多, 控制效果越好, 这一点容易从(7)式得到。

5 算例

作为算例, 考虑长和宽均为 a 的四边简支矩形智能板, 用本文提出的方法, 以外加控制电压来模拟在中心受单位集中力 $\bar{P} = 4a^2 P / (\pi^2 h D)$ 作用下板的变形。作无量纲化: $\bar{x} = x/a$, $\bar{y} = y/a$, $\bar{w} = w/h$, $\xi_i = \xi_i/a$, $\eta_i = \eta_i/a$, $\bar{V} = 8a^2 c_2 V / (\pi^2 D)$ 。表 1 中列出 4 片和 8 片压电片时的控制电压, 两种情况下保持压电片总面积不变。图 2 中绘制了前述两种情况下 $\bar{y} = 1/2$ 处挠曲线。

表 1 压电片控制电压

控制电压	1.(四片)	2.(八片)
No.1	-0.661	3.065
No.2	-1.067	9.708
No.3	-1.317	-1.251
No.4	-0.501	-4.960
No.5	—	-1.894
No.6	—	4.106
No.7	—	1.040
No.8	—	-4.960

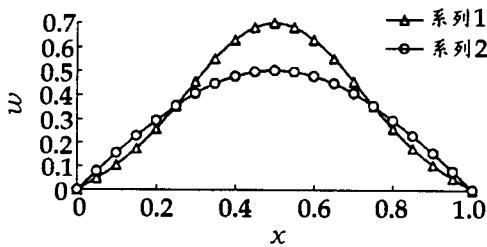


图 2 $\bar{y} = 1/2$ 处挠曲线

6 结语

本文通过引入广义位置函数, 研究了矩形智能板在外加控制电场作用下的弯曲形状与压电片控制电压之间的关系, 并在此基础上, 以简支情况为例, 得到了使智能板达到预定弯曲形状各分布式压电元件的控制

电压的解析解, 解决了矩形智能板构件弯曲的主动控制问题。

参 考 文 献

- Seyoung IM, Atluri SN. Effects of a piezo-actuator on a finitely deformed beam subjected to general loading. *AIAA J*, 1989, 27(12): 1801~1807
- Zhou YS, Tiersten HF. An elastic analysis of laminated composite plates in cylindrical bending due to piezoelectric actuators. *Smart Mater Struct*(3), 1994. 255~265
- Yang JS, Batra RC. The cylindrical bending vibration of a laminated elastic plate due to piezoelectric actuators. *Smart Mater Struct*(3), 1994. 485~493
- Wang Bor Tsuen, Rogers Craig A. Laminate plate theory for spatially distributed strain actuators. *J of Composite Mater*, 1991, 25: 433~452
- Thomas Bailey, James EH. Distributed piezoelectric polymer active vibration control of a cantilever beam. *J Guidance*, 1985, 8(5): 605~611
- Crawley EF, Luis J de. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA J*, 1987, 25(10): 1373~1385
- Sun Dongchang, Wang Dajun. Distributed piezoelectric segment method for vibration control of smart beams. *AIAA J*, 1997, 35(3): 583~584
- Crawley EF, Lazarus KB. Induced strain actuation of isotropic and anisotropic plates. *AIAA J*, 1991, 29(6): 944~951
- Rao SS, Sunar M. Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures: A survey. *ASME Report*, 1994, 47(4): 113~123
- 孙东昌, 王大钧. 智能板振动控制的分布压电单元法. 力学学报, 1996, 28(6): 692~699
- 沈亚鹏等. 智能结构力学研究的最新进展. 现代力学与科技进步, 北京: 清华大学出版社, 1997. 282~288
- 俞焕然, 姚林泉. 粘有压电材料弹性环形板的轴对称弯曲及其控制. 现代力学与科技进步, 北京: 清华大学出版社, 1997. 1301~1304

ACTIVE CONTROL OF BENDING SHAPE FOR RECTANGULAR SMART PLATES

FENG Wei LIU Chunlu

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences,
Beijing 100080, China)

(下转第 19 页)

及

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega_0^2\theta_1 = \frac{\omega^2 A^3}{6} \cos^3 \omega_0 t - \omega_1^2 A \cos \omega_0 t = \frac{\omega^2 A^3}{24} (3 \cos \omega_0 t + \cos 3\omega_0 t) - \omega_1^2 A \cos \omega_0 t \quad (35)$$

为使问题变得更简洁, 我们令

$$\omega_1^2 = \omega^2 A^2 / 8 \quad (36)$$

于是式 (35) 变成

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega_0^2\theta_1 = \frac{\omega^2 A^3}{24} \cos 3\omega_0 t \quad (37)$$

从而我们可解得

$$\theta_1 = -\frac{\omega^2 A^3}{192\omega_0^2} (\cos 3\omega_0 t - \cos \omega_0 t) \quad (38)$$

只取一阶近似, 由 (32) 式可得

$$\omega_0^2 = \lim_{\beta \rightarrow 1} (\omega^2 - \beta\omega_1^2) = \omega^2(1 - A^2/8) \quad (39a)$$

或

$$\omega_0 = \sqrt{1 - A^2/8\omega} \quad (39b)$$

于是可得

$$\theta = A \cos(\sqrt{1 - A^2/8}\omega t - \frac{A^3}{192(1 - A^2/8)} [\cos(3\sqrt{1 - A^2/8}\omega t - \cos(\sqrt{1 - A^2/8}\omega t)]) \quad (40)$$

而用摄动法得到的结果为^[3]

$$\theta = A \cos(1 - A^2/16)\omega t \quad (41)$$

显然 (41) 式只是 (40) 式的一阶近似.

3 结 论

本文在文献 [1] 的基础上, 首次把 Lindstedt-Poincare 理论应用于人工参数法, 进一步发展了人工

参数法, 并初步阐述如何最佳引入人工参数. 由于这种方法不按小参数展开, 所以得到的解对小参数的敏感性不强. 从给出的几个例子来看, 人工参数是非常灵活方便的一种新方法, 并且不会出现长期项. 正如文 [1] 指出的那样, 人工参数法是奇异摄动理论的一个新的发展方向.

参 考 文 献

- 刘高联, 奇异摄动理论发展的新方向: 人工参数法和反摄动法. 现代数学和力学 (MMM)-VII. 上海: 1997. 47~53
- Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques. John Wiley & Sons. 1981
- Nayfeh A H 著. 宋家骥, 戴世强译. 摆动方法习题集. 上海翻译出版公司, 1990

ARTIFICIAL PARAMETER METHOD USED IN SINGULAR PERTURBATION PROBLEMS

HE Jihuan

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, China)

Abstract In order to solve a nonlinear equation without small parameters, it is convenient to introduce an artificial parameter in the equation, then the approximate solution can be expressed as series of the artificial parameter just as traditional perturbation techniques do. Combining it with Lindstedt-Poincare technique leads to a more convenient results with good accuracy.

Key words singular perturbation problems, artificial parameter method, Lindstedt-Poincare method, Duffing equation

(上接第 27 页)

Abstract The relations between control voltage and bending shape of rectangular smart plates with distributed piezoelectric actuators are discussed. Active control method of rectangular smart plates

is presented, with the analytic solution of control voltage and an example.

Key words smart structure, rectangular plate, bending, control