

85-91

(12)

# 利用有限元线法奇异线映射技巧 计算应力强度因子\*

徐永君

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

袁 驷

(清华大学土木系, 北京, 100084)

0346.1

**提 要** 本文讨论了有限元线法的奇异线映射技巧在具有任意切口、任意切口边界条件的多材料反平面断裂问题和平面断裂问题的应用, 不仅使得计算速度和计算精度有显著提高, 同时使得位移的导数项易于较精确地给出。利用位移的导数项与特征展开项的低阶特征系数间的关系, 可直接将低阶特征系数给出, 并确定应力强度因子。

**关键词:** 有限元线法, 奇异线映射, 应力强度因子。

## 1 引 言

利用奇异线映射技巧求解奇异性问题时可以改变其求解性态, 特别是使奇异性问题的求解精度和求解效率具有较大幅度的提高<sup>[1-2]</sup>。结合ODE求解器<sup>[3-5]</sup>的自适应等优势使得有限元线法(Finite Element Method of Lines, 简称FEMOL)计算奇异问题具有更多的突出特点, 突破了其它一些方法(有限元法)的仅对裂纹问题才能采用四分之一布点的局限性。区间映射技巧和FEMOL布线的灵活性使得可以直接采用更为灵活通用的变量代换映射技巧, 对任意奇异性问题都能方便地采用奇异线映射技巧求解, 计算量大为减少和求解精度明显提高。因此可以在奇异点附近的范围内更出色地描述奇异问题对应的奇异场。经过奇异线映射变换后, 可将其含有奇异项的级数(奇异场, 如应力场)转换为不含奇异项的级数, 使计算奇异问题转换为计算非奇异问题, 可直接得到低阶特征根对应的特征展开系数, 从而利用特征项系数与应力强度因子的关系直接有效地计算应力强度因子。

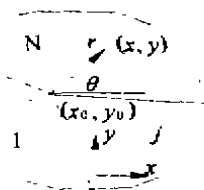


图1 N种材料二维切口问题

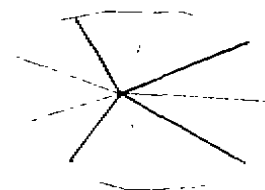


图2 FEMOL 的径向布线网格

本文利用FEMOL奇异线映射技巧计算了反平面断裂问题和平面断裂问题。不仅对采用

\* 国家杰出基金和博士后基金资助项目

徐永君, 男, 1964 10 出生, 博士

奇异线映射技巧和不采用奇异线映射技巧的求解效率进行了比较,同时也给出了应力强度因子的计算算例。

## 2 断裂问题的 FEMOL 奇异线映射

考虑如图 1 所示的多( $N$ )种材料二维切口问题,为分析讨论方便,除特别需要我们一般略去表示不同材料域的角标。对于反平面切口问题的位移  $w(r, \theta)$  和平面切口问题的应力势函数  $\phi(r, \theta)$ , 熟知的 Williams 特征展开可分别表示为

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \text{反平面: } w(r, \theta) &= \sum_{i=0,1,2,3,\dots} \alpha_i r^{\lambda_i} f_i(\theta) \\ \text{(ii)} \quad \text{平面: } \phi(r, \theta) &= \sum_{i=0,1,2,3,\dots} \alpha_i r^{\lambda_i+1} F_i(\theta) \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $f_i(\theta)$  和  $F_i(\theta)$  均为  $\lambda_i$  对应的经过归一化的特征向量,其表达形式分别为

$$f_i(\theta) = A_i \cos \lambda_i \theta + B_i \sin \lambda_i \theta$$

$$F_i(\theta) = A_i \sin(\lambda_i + 1)\theta + B_i \cos(\lambda_i + 1)\theta + C_i \sin(\lambda_i - 1)\theta + D_i \cos(\lambda_i - 1)\theta$$

对于平面切口问题特征根  $\lambda_i$ , 对应的位移部分也为  $r^{\lambda_i}$  阶的项

$$\begin{cases} u_{r_i} = r^{\lambda_i} \frac{(1-\nu\lambda_i)(1+\lambda_i)F_i(\theta) + F_i'(\theta)}{\lambda_i E} \\ u_{\theta_i} = r^{\lambda_i} \frac{(1+\lambda_i - (1-\lambda_i)\lambda_i\nu + 2\lambda_i^2)F_i'(\theta) + F_i''(\theta)}{\lambda_i(1-\lambda_i)E} \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

特征根  $\lambda_i$ , 相对应的应力部分均为  $r^{\lambda_i-1}$  阶的项

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \text{反平面: } \begin{cases} \tau_{r,\theta} = G\lambda_i r^{\lambda_i-1} \alpha_i f_i(\theta) \\ \tau_{\theta,r} = G r^{\lambda_i-1} \alpha_i f_i(\theta) \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{(ii)} \quad \text{平面: } \begin{cases} \sigma_{rr} = r^{\lambda_i-1} \alpha_i [F_i'(\theta) + (\lambda_i + 1)F_i(\theta)] \\ \sigma_{\theta\theta} = r^{\lambda_i-1} \alpha_i [\lambda_i(\lambda_i + 1)F_i(\theta)] \\ \sigma_{r\theta} = r^{\lambda_i-1} \alpha_i [-\lambda_i F_i(\theta)] \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

当  $r \rightarrow 0$  时应力出现奇异项。FEMOL 的求解是以位移为基本未知量,在求解位移及其导数过程中,奇异项等价地出现在导数中。做如下变量代换

$$\rho = r^{\lambda_i} \quad (4)$$

则相应的位移展开式可重写为

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \text{反平面: } w &= \sum_{i=0,1,2,3,\dots} \alpha_i \rho^{\frac{\lambda_i}{\lambda_i}} f_i(\theta) \\ \text{(ii)} \quad \text{平面: } \begin{cases} u_r = \sum_{i=0,1,2,3,\dots} \alpha_i \rho^{\frac{\lambda_i}{\lambda_i}} \frac{(1-\nu\lambda_i)(1+\lambda_i)F_i(\theta) + F_i'(\theta)}{\lambda_i E} \\ u_\theta = \sum_{i=0,1,2,3,\dots} \alpha_i \rho^{\frac{\lambda_i}{\lambda_i}} \frac{(1+\lambda_i - (1-\lambda_i)\lambda_i\nu + 2\lambda_i^2)F_i'(\theta) + F_i''(\theta)}{\lambda_i(1-\lambda_i)E} \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

这样求解对  $r$  取导数的项就转变为求解对  $\rho$  取导数的项, 从而在求解过程中导数项不再出现奇异性。在 FEMOL 实施上, 采用如图 2 所示的径向布线 FEMOL 网格, 设第  $n$  条结线的长度为  $L_n$ , 映射到标准区间  $\eta \in [-1, 1]$  的区间映射为

$$\eta = -1 + 2(r/L_n)^{\lambda_1} \quad (6)$$

其逆映射为

$$r = L_n \left( (\eta + 1)/2 \right)^{1/\lambda_1} \quad (7)$$

对于第  $n$  条结线, 在直角坐标系中其两端点为  $(x_{n1}, y_{n1}) (j=1, 2)$ , 映射(7)变为

$$x_n(\eta) = x_{n1} + (x_{n2} - x_{n1})^{1/\lambda_1}, \quad y_n(\eta) = y_{n1} + (y_{n2} - y_{n1})^{1/\lambda_1} \quad (8)$$

式(5)在奇异线标准区间映射下的形式为

$$\begin{aligned} \text{(i) 反平面: } w &= \sum_{i=0,1,2,3,\dots} \bar{\alpha}_i (\eta+1)^{\bar{\lambda}_i} f_i(\theta) \\ \text{(ii) 平面: } \begin{cases} u_r = \sum_{i=0,1,2,3,\dots} \bar{\alpha}_i (\eta+1)^{\bar{\lambda}_i} \frac{(1-\nu\lambda_1)(1+\lambda_1)F_i(\theta) + F_i'(\theta)}{\lambda_1 E} \\ u_\theta = \sum_{i=0,1,2,3,\dots} \bar{\alpha}_i (\eta+1)^{\bar{\lambda}_i} \frac{(1+\lambda_1 - (1-\lambda_1)\lambda_1\nu + 2\lambda_1^2)F_i(\theta) + F_i''(\theta)}{\lambda_1(1-\lambda_1)E} \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{其中 } \bar{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}, \quad \bar{\alpha}_i = \alpha_i L_n^{\lambda_1} / 2^{\bar{\lambda}_i}$$

不难看出经过奇异线映射不仅将结线区间映射到标准区间  $\eta \in [-1, 1]$ , 而且同时将难于求解的奇异问题变为易于求解的非奇异问题。

### 3 应力强度因子的计算

反平面断裂问题和平面断裂问题的应力强度因子计算等价于求解特征展开式(1)中的待定系数  $\alpha_i$ , 而计算待定系数  $\alpha_i$  等价于计算式(9)中的待定系数  $\bar{\alpha}_i$ 。由式(9)可以得到低阶系数与位移及其导数的关系为

$$\begin{aligned} \text{(i) 反平面: } \bar{\alpha}_0 &= \frac{\lim_{\eta \rightarrow -1} w(\eta, \theta)}{f_0(\theta)}, \quad \bar{\alpha}_1 = \frac{\lim_{\eta \rightarrow -1} \frac{dw(\eta, \theta)}{d\eta}}{f_1(\theta)} \\ \text{(ii) 平面: } \bar{\alpha}_j &= \frac{\lim_{\eta \rightarrow -1} \frac{d^j u_r(\eta, \theta)}{d\eta^j}}{\delta_{1j}} \quad \text{或} \quad \bar{\alpha}_j = \frac{\lim_{\eta \rightarrow -1} \frac{d^j u_\theta(\eta, \theta)}{d\eta^j}}{\delta_{2j}}, \quad j=0,1 \end{aligned} \quad (10)$$

为统一格式采用  $d^0/d(\cdot)^0$  表示没有求导。其中

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(1+\nu\lambda)(1+\lambda)F_0(\theta) + F_0'(\theta)}{\lambda E} = \frac{4D_0 \cos(\theta) - (1-\nu)F_0(\theta)}{E} \\ \delta_{20} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(1+\lambda - (1-\lambda)\lambda\nu + 2\lambda^2)F_0'(\theta) + F_0''(\theta)}{\lambda(1-\lambda)E} = \frac{-4D_0 \sin(\theta) - (1-\nu)F_0'(\theta)}{E} \\ \delta_{11} &= \frac{(1-\nu\lambda)(1+\lambda)F_1(\theta) + F_1'(\theta)}{\lambda_1 E}, \quad \delta_{21} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(1+\lambda - (1-\lambda)\lambda_1\nu + 2\lambda_1^2)F_1(\theta) + F_1''(\theta)}{\lambda_1(1-\lambda_1)E} \end{aligned}$$

由式(9)可知

$$\alpha_0 = \bar{\alpha}_0, \quad \alpha_1 = 2\bar{\alpha}_1/L_n^4 \tag{11}$$

对于 I 型、II 型和 III 型各阶应力强度因子，一般定义为

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{2\pi r} r^{\lambda-1} \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} (\tau_{\alpha}(r, \theta)) \right) \\ \text{(ii)} \quad K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{2\pi r} r^{\lambda-1} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta)|_{\theta=0} \right), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{2\pi r} r^{\lambda-1} \sigma_{r\theta}(r, \theta)|_{\theta=0} \right) \end{aligned} \tag{12}$$

其中  $\lambda^*$  分别取对称和反对称型各自对应的特征值。

#### 4 数值算例

本文以单材料断裂问题为例，给出了反平面切口问题及平面切口问题数值算例。FEMOL 误差限取为  $TOL=0.01\%$ ，分别对利用奇异线映射和不利用奇异线映射两种情况下的不同次数进行计算比较。以下数值算例均采用 P586-100 计算机计算。

##### 例1 反平面裂纹问题

如图3所示的单边裂纹问题，利用对称性取半进行分析，边界条件及 FEMOL 网格如图所示，定义位移如下

$$u = \sum_{i=1,3,5} \alpha_i r^{\lambda_i} \sin(\lambda_i \theta)$$

从表1给出的沿不同结线的导数值和第一阶特征系数可以看出随单元次数的增加计算结果的精度明显提高且沿不同结线稳定，从表2可以看出采用奇异元的计算时间明显提高。

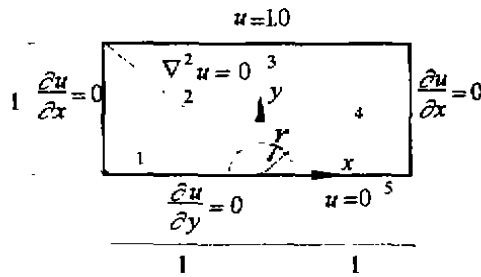


图3 反平面单边裂纹问题

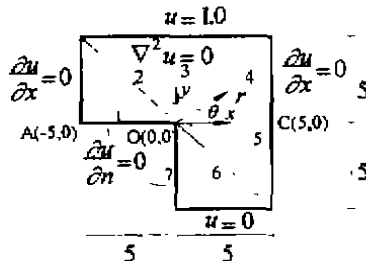


图4 L型直角切口反平面问题

表1 反平面单边裂纹问题的最低阶特征展开系数

单元次数		结线 1	结线 2	结线 3
1	导数	0.5276667	0.5859196	0.3730934
	$\alpha_1$	1.0553335	1.0665842	1.0552676
2	导数	0.5423361	0.5956497	0.3835102
	$\alpha_1$	1.0846722	1.0842966	1.0487306
3	导数	0.5403842	0.5936617	0.3821366
	$\alpha_1$	1.0807683	1.0806777	1.0808454
结线长度		1	$\sqrt{2}$	1

比较解:  $\alpha_1 = 1.081^{[6]}$

表2 反平面单边裂纹问题的常规元和奇异元计算时间比较

单元次数	1	2	3
奇异元	2.31s	2.53s	2.04s
常规元	3.85s	10.59s	25.51s

## 例2 L型反平面切口问题

图4所示L型反平面直角切口问题，边界条件及FEMOL网格如图所示，定义位移为

$$u = \sum_{i=1,3,5,\dots} \alpha_i r^{\lambda_i} \sin(\lambda_i \theta) + \sum_{j=0,2,4,\dots} \alpha_j r^{\lambda_j} \cos(\lambda_j \theta)$$

表3给出了原点O沿不同结线的导数值和第一阶特征( $\lambda_1 = 2/3$ )系数。表4给出了A、O和C点的位移计算结果并对计算时间进行了比较，利用奇异线映射使得计算速度有显著的提高，并且由于计算过程中的导数已没有或减弱了奇异性而可给出导数误差限对导数精度加以限制，这是不采用奇异线映射所不能作到的。

表3 L型反平面切口问题的最低阶特征展开系数

单元次数		结线 1	结线 2	结线 3
1	导数	0.2218429	0.2446171	0.1109215
	$\alpha_1$	0.1517384	0.1533426	0.1517753
2	导数	0.2266678	0.2472431	0.1133299
	$\alpha_1$	0.1550386	0.1549888	0.1550332
3	导数	0.2259743	0.2360487	0.1129905
	$\alpha_1$	0.1545643	0.1545501	0.1545689
结线长度		5	$5\sqrt{2}$	5

比较解:  $\alpha_1 = 0.1546^{[1]}$

表4 L型反平面切口问题的常规元和奇异元结果比较

单元次数	结线映射	点 A	点 O (精确解为 2/3)	点 C	计算时间
1	奇异线	0.8901055	0.6666667	0.5549472	1.21s
	正常线	0.8901556	0.6666667	0.5549222	1.86
2	奇异线	0.8996241	0.6666667	0.5501880	3.62
	正常线	0.8996687	0.6666667	0.5501656	5.11
3	奇异线	0.9008944	0.6666667	0.5495528	3.02
	正常线	0.9009470	0.6666667	0.5495265	11.20

## 例3 平面中心裂纹问题

如图 5(a)所示的两边受拉的中心裂纹问题，利用对称性取四分之一区域进行计算，边界条件及 FEMOL 网格划分如图(b)所示，取材料的弹性模量为  $E = 1.0$ ，Poisson 比为  $\nu = 0.25$ 。表 5 给出了沿结线 4 计算的最低阶特征展开系数及其对应的应力强度因子  $K_1$ 。

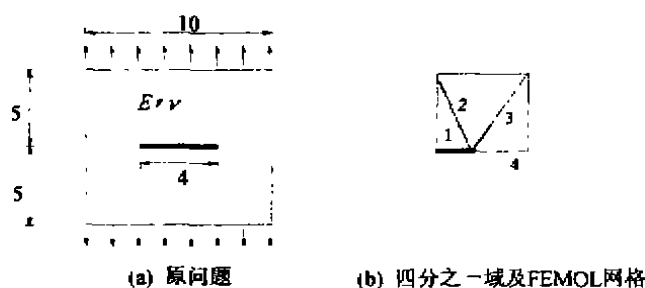


图5 中心裂纹平面问题

表5 中心裂纹平面问题的低阶应力强度因子

单元次数	3	4	5	文[7]
$\alpha_1$	1.2038852	1.2123778	1.2161206	1.220
$K_I$	3.0176928	3.0389805	3.0483622	3.0580865

## 例4 单边切口平面问题

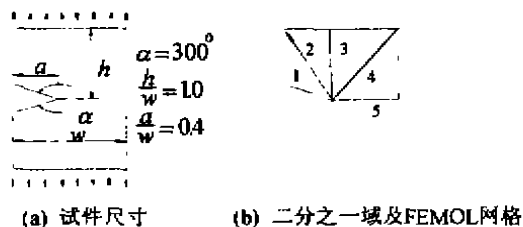


图6 单向拉伸V型切口试件

如图 6(a)所示的两边受单位拉应力的单边切口平面问题，利用对称性取半进行计算，边界条件及 FEMOL 网格划分如图(b)所示，取材料的弹性模量为  $E = 1.0$ ，Poisson 比为  $\nu = 0.3$ 。表 6 给出了沿结线 5 计算的最低阶特征展开系数及其对应的应力强度因子  $K_I$ 。

表6 单边切口平面问题的低阶应力强度因子

单元次数	3	4	5	文[8]
$\alpha_1$	0.8986307	0.9111628	0.9123365	0.9118903
$K_I$	2.4833571	2.5179896	2.5212331	2.520

## 5 小结

奇异线映射技巧可以改变问题的求解性态，将奇异性问题转变为非奇异性问题进行计算，使得结果精度得以改善，特别是使正常结线求解的过程中无法对位移导数误差加以约束这一难题得到了解决，从而能够对应力强度因子进行有效计算，也就是对奇异场进行更理想的描述。由于解的过程去除了奇异性，因此求解速度具有显著提高，甚至于对特别复

杂问题的求解由不能计算转变为可以有效地计算。能够比较容易地计算特征展开的低阶特征系数(或最低阶应力强度因子)使得 FEMOL 的奇异线映射的应用更为宽广。

#### 参考文献

- 1 Yuan Si, *The Finite element method of lines: theory and applications*, Science Press, Beijing-New York, 1993.
- 2 Yuan Si, *Nonlinear line mapping in FEMOL for singularity problems*, *Computational Mechanics '92, Proc. of ICCES, 1992, Hong Kong*, pp. 47.
- 3 袁骝, 介绍一个常微分方程边值问题求解通用程序—COLSYS, *计算结构力学及其应用*, Vol. 7, No. 2, 1990, pp. 104-105.
- 4 U. Ascher, J. Christiansen and R. D. Russell; *Collocation software for boundary-value ODEs*, *ACM Trans. Math. Software*, Vol. 7, No. 2, 1981, pp. 209-222.
- 5 U. Ascher, J. Christiansen and R. D. Russell; *Algorithm 569, COLSYS: Collocation software for boundary value ODEs[D2]*, *ACM Trans. Math. Software*, Vol. 7, No. 2, 1981, pp. 223-229.
- 6 L. S. Xanthis, *A pseudo-ODE modeling trick for the direct method of lines computation of important fracture mechanics parameters*, *ACM SIGNUM Newsletter*, 1986, 21(1-2).
- 7 Iside, M., *Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under various boundary conditions*, *Int. J. Fract. Mech.*, Vol. 7, No. 3, 1977.
- 8 B. Gross and A. Mendelson, *Plane elastic analysis of V-notched plates*, *Int. J. Fract. Mech.* Vol. 8, 1972, pp. 267-276.