

智能梁振动主动控制的广义位置函数法

冯 玮 柳春图 曾晓辉 胡振威*

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

*(香港专业教育学院青衣分校, 香港)

摘要 研究了具有离散分布式压电传感器、执行器的智能梁, 在外加电场作用下振动模态与外加电场之间的耦合关系, 提出了智能梁主动控制的一种新的计算方法——广义位置函数法, 并引入执行器位置函数的级数展开式, 简化了计算. 结果表明, 智能梁振动控制效果与压电执行器长度、数目以及位置有密切的关系.

关键词 智能结构, 梁, 振动, 控制, 广义位置函数法

引 言

压电材料由于具有特殊性质, 即电能与机械能之间的双向可逆转换性质, 并且重量轻、价格低、容易成型、稳定性好, 可以作为传感器与控制器应用于离散系统的感应与控制中. 压电材料可贴于梁、板、壳等结构元件的表面或嵌入其内部, 以作用电场产生变形或由变形产生电场的相互关系, 达到感应和控制的目的.

许多工作者致力于智能结构研究方法的建立, Seyoung 等^[1]、Zhou 等^[2]与 Yang 等^[3]以及 Wang 等^[4]先后给出了智能结构的数学模型; 智能结构在结构的形状控制、屈曲问题以及振动控制中的应用也有许多工作^[5~10].

智能梁振动控制是智能结构主动控制中的一个重要方面, Bailey 等^[7]最早于 1985 年将压电薄膜贴于梁上, 用于梁的振动控制; 孙东昌、王大钧^[6,8]在智能梁与智能板振动控制方面有详细论述. 智能梁振动控制, 主要是靠调节感应电压与反馈控制电压之间的关系以达到控制的目的, 并基于以下事实: ①压电传感器与控制器的分布方式贴于梁表面; ②感应器所感知的变形是各阶模态的总和; ③控制器的外加电压在其所在区域为常数; ④智能结构一经制成便无法更改, 控制器数目与所考虑模态阶数无依赖关系. 本文通过引入压电控制器的广义位置函数, 得到了具有离散分布式压电控制器的智能梁在外加电场作用下的运动方程, 并利用广义位置函数的解析表达式简化了计算过程.

1 智能梁的传感方程

考虑如图 1 所示的长为 l , 由上、下表面对称地贴有若干压电片所构成的智能梁, 其基本梁结构材料常数为 E, μ , 压电元件材料常数为 E_p, μ_p , 并作如下假设:

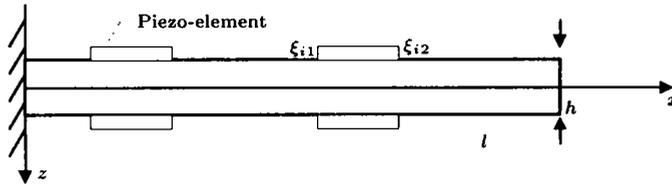


图 1 智能梁结构示意图
Fig.1 Structure of smart beam

- 压电片与梁表面之间粘合牢固，无相对位移；
- 压电片极化方向沿 z 轴，上、下表面控制电压以压电片产生拉伸应变为正；
- 压电片为面内各向同性，其质量不计。

智能梁的压电方程如下

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p &= E_p \varepsilon_p - \kappa \frac{V}{h_p} \\ D_p &= e \varepsilon_p + S \frac{V}{h_p} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

S 是压电片电介常数， κ, e 是压电应变系数， h_p 与 b_p 是压电元件厚度和宽度， V 是外加电压。对于传感元件，其外加电场为零，根据智能梁压电方程，求得电位移并在传感元件所在区域积分，得到第 i 个传感元件上的电量

$$Q = b_p \int_{\xi_{i1}}^{\xi_{i2}} (e \varepsilon) dx = -\frac{b_p e h}{2} \int_{\xi_{i1}}^{\xi_{i2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx = r_p \int_{\xi_{i1}}^{\xi_{i2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (2)$$

为达到自我感应、自我控制的目的，必须建立传感电信号与控制电压之间的联系。可以使控制电压 V 成为 Q 的线性函数

$$V = \alpha Q(x, t) + \beta \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \quad (3)$$

2 智能梁的致动方程

压电片在外加电压作用下的应变为： $\varepsilon_i = \frac{\kappa V_i}{h_i}$ ，记第 i 个压电片角点坐标为： ξ_{i1}, ξ_{i2} ，并引入广义位置函数

$$R_i(x) = \begin{cases} 1, & \xi_{i1} < x < \xi_{i2} \\ 0, & \text{其它位置} \end{cases} \quad (4)$$

压电片对梁的作用归结为压电片在其作用区域内引起局部应变 ε_i^f (由上表面压电片产生) 和 ε_i^b (由下表面压电片产生)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i^f &= \frac{\kappa V_i^f}{h_i} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \\ \varepsilon_i^b &= \frac{\kappa V_i^b}{h_i} \left(-\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$V_i^f = V_i^f(t)$, $V_i^b = V_i^b(t)$ 分别是每一对压电片上的控制电压, h, h_i 是梁厚与压电片厚度, 并设梁宽度为 b . 则梁内应力分布为

$$\sigma(x, t) = E \left(-z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + E_p \sum_i (\varepsilon_i^f + \varepsilon_i^b) R_i(x) \quad (6)$$

若令每对压电元件的电压满足以下关系, 即 $V_i^f(t) = -V_i^b(t) = V_i(t)$, 则由 (6) 式得到

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) = \sum_i \frac{d^2 (J_i(x) R_i(x))}{dx^2} V_i(t) \quad (7)$$

其中 $I(x) = \frac{bh^3(x)}{12}$, $J_i(x) = \frac{E_p \varepsilon_i b h_i^2(x)}{6i_i}$.

3 智能梁振动的自我抑制

为方便推演, 令: $A(x) = A$, $I(x) = I$, $J_i(x) = J$. 对一般情形, 将梁的挠度函数取为: $w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) W_m(x)$, 控制电压与传感信号之间的关系 (3) 写作

$$V_i(t) = r_p \sum_m (\alpha_i T_m(t) + \beta_i \dot{T}_m(t)) \int_{\xi_{i1}}^{\xi_{i2}} \left(\frac{d^2 W_m(x)}{dx^2} \right) dx = \sum_m (\alpha_{im} T_m(t) + \beta_{im} \dot{T}_m(t)) \quad (8)$$

致动方程 (7) 可以写成

$$\sum_m \rho A W_m(x) \ddot{T}_m(t) + \sum_m EI \frac{d^4 W_m(x)}{dx^4} T_m(t) = J \sum_i \frac{d^2 R_i(x)}{dx^2} V_i(t) \quad (9)$$

利用模态正交关系, 在上式两端乘以 $W_m(x)$ 并沿梁积分, 可得

$$\begin{aligned} \ddot{T}_m(t) + \omega_m^2 T_m(t) &= \frac{J \int_0^l \sum_i \sum_k (\alpha_{ik} T_k(t) + \beta_{ik} \dot{T}_k(t)) \frac{d^2 R_i(x)}{dx^2} W_m(x) dx}{\rho A \int_0^l W_m^2(x) dx} \\ &= - \sum_i g_{mi} (\alpha_{ik} T_k(t) + \beta_{ik} \dot{T}_k(t)) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{im} &= r_p \alpha_i \int_{\xi_{i1}}^{\xi_{i2}} \frac{d^2 W_m(x)}{dx^2} dx, & \beta_{im} &= r_p \beta_i \int_{\xi_{i1}}^{\xi_{i2}} \frac{d^2 W_m(x)}{dx^2} dx, \\ g_{mi} &= \frac{-J}{\rho A} \int_0^l \frac{d^2 R_i(x)}{dx^2} W_m(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

考虑到前 M 阶模态的影响, 并设压电片有 N 对, 经过整理, (10) 式可简记为

$$\begin{aligned} \{\ddot{T}\} + [C]\{\dot{T}\} + [D]\{T\} &= \mathbf{0} \\ C_{ij} &= \sum_{k=1}^N g_{ik} \beta_{kj}, & D_{ij} &= \omega_{ij} + \sum_{k=1}^N g_{ik} \alpha_{kj}, & \omega_{ij} &= \begin{cases} \omega_i^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, M, \quad j = 1, 2, 3, \dots, M \tag{12}$$

从方程 (2) 和 (12) 可以看出，对智能梁振动的感应和控制都是基于各阶模态的综合效应，压电元件的作用可以是衰减振动，也可以是调节振动频率。并且，所考虑的模态阶数与压电片数目无直接依赖关系，这一点符合引言中提出的客观性②、④的要求。

4 广义位置函数

广义位置函数 $R_i(x)$ 的定义见 (4) 式，计算中用到了它的二阶导数，所以，必须得到 $R_i(x)$ 及其导数的解析表达式。将 $R_i(x)$ 展开成三角级数为 (13) 式

$$R_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{l}\xi_{i1}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{l}\xi_{i2}\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \tag{13}$$

图 2 中以 $\xi_{i1} = 0.2, \xi_{i2} = 0.4$ 为例，给出了广义位置函数及其导数的曲线示意图。从实际计算得知，(13) 式中只取前几项就可以达到足够的精度。因此，广义位置函数的引入，能够简化方程 (12) 中各系数矩阵的计算。

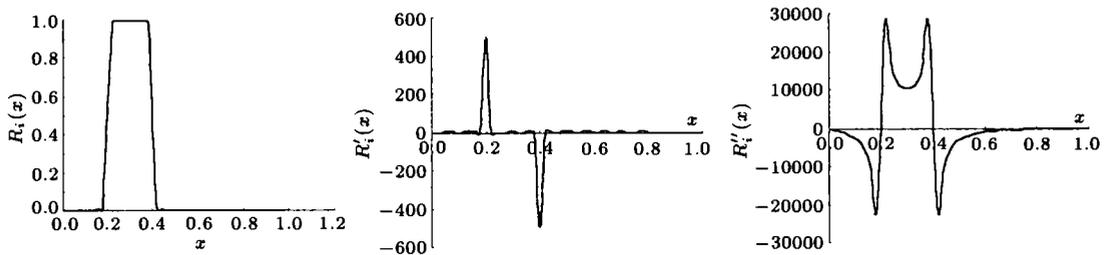


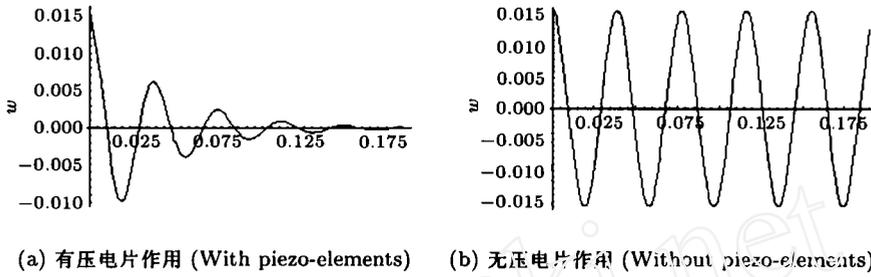
图 2 广义位置函数曲线示意图
Fig.2 Curves of GLF and its derivative

5 算 例

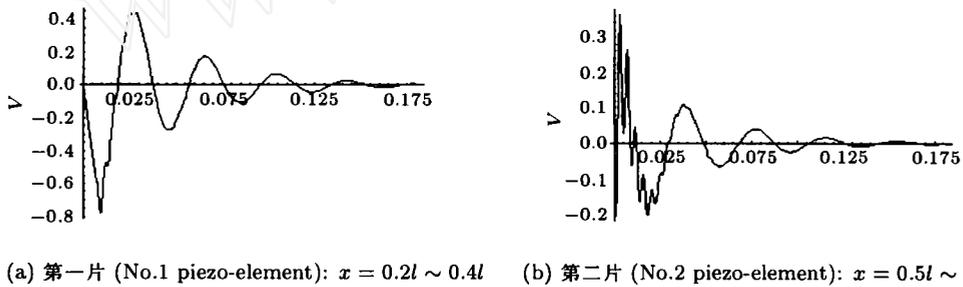
作为算例，考虑一等直筒支梁，它由一基本梁和上下所粘贴的压电片构成，具体参数列于表 1。在梁的中部作用一个 0.01N 的集中力使之产生变形，之后突然撤掉该载荷引起梁振动，在不考虑梁自身的阻尼情况下，由智能梁自主地衰减其振动。算例中采用了两片压电片，并考虑到梁的前三阶振形。梁中点的位移随时间的变化曲线和两个压电片上的电压变化曲线分别列于图 3(a) 和图 4 中，作为对比，当压电片控制电压始终设定为 0 时梁中点的位移随时间的变化曲线如图 3(b) 所示。

表 1 智能梁参数表
Table 1 Parameters of smart beam

Piezo-film	Basic beam
$E_p = 2 \text{ GPa}$	$E = 210 \text{ GPa}$
$\rho_p = 1780 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$
$\mu_p = 0.3$	$\mu = 0.3$
$h_p = 0.1 \text{ mm}$	$h = 1 \text{ mm}$
$(60,120); (150,240)$	$l = 300 \text{ mm}$
$b_p = 20 \text{ mm}$	$b = 20 \text{ mm}$
$\kappa = 22 \times 10^{-12} \text{ m/V}$	
$e = 6 \times 10^2 \text{ C/m}^2$	



(a) 有压电片作用 (With piezo-elements) (b) 无压电片作用 (Without piezo-elements)
 图 3 梁中点的位移随时间的变化曲线
 Fig.3 Displacement of center point on the middle plane of the smart beam



(a) 第一片 (No.1 piezo-element): $x = 0.2l \sim 0.4l$ (b) 第二片 (No.2 piezo-element): $x = 0.5l \sim 0.8l$
 图 4 压电片控制电压变化曲线
 Fig.4 Voltage of the piezo-elements

6 结 论

本文针对表面贴有压电元件的智能梁结构, 提出了广义位置函数法, 推导出梁振动自适应控制的基本方程, 通过将广义位置函数按三角级数展开, 简化了控制方程各项系数矩阵的计算. 得到的主要结论有: 1) 智能梁自适应控制方法对振动衰减效果显著; 2) 传感器感应信号反映了智能梁各阶振动模态的综合效应, 并且致动器数目与预先考虑的振动模态阶数无关. 本文所提出的广义位置函数法具有以下优点: 1) 简化了智能梁的基本理论, 使得普通梁的分析方法可以无障碍地移植到智能梁的分析中; 2) 客观地反映了压电元件数目与所考虑振形阶数之间的无关性; 3) 广义位置函数解析表达式的引入, 使计算得到简化.

参 考 文 献

- 1 Seyoung IM, Atluri SN. Effects of a piezo-actuator on a finitely deformed beam subjected to general loading. *AIAA J*, 1989, 27(12): 1801~1807
- 2 Zhou YS, Tiersten HF. An elastic analysis of laminated composite plates in cylindrical bending due to piezoelectric actuators. *Smart Mater Struct*, 1994, 3: 255~265
- 3 Yang JS, Batra RC. The cylindrical bending vibration of a laminated elastic plate due to piezoelectric actuators. *Smart Mater Struct*, 1994, 3: 485~493
- 4 Bor Tsuen Wang, Craig A Rogers. Laminate plate theory for spatially distributed strain actuators. *J of Composite Materials*, 1991, 25: 433~452
- 5 Crawley EF, Luis J de. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA J*, 1987, 25(10): 1373~1385

- 6 Sun D, Wang D. Distributed piezoelectric segment method for vibration control of smart beams. *AIAA J*, 1997, 35(3): 583~584
- 7 Thomas Bailey, Hubbard JE. Distributed piezoelectric polymer active vibration control of a cantilever beam. *J Guidance*, 1985, 8(5): 605~611
- 8 孙东昌, 王大钧. 梁振动控制的分布压电单元法. 北京大学学报, 1996, 32(5): 585~593 (Sun Dongchang, Wang Dajun. Distributed piezoelectric element method for vibration control of beams. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 1996, 32(5): 585~593 (in Chinese))
- 9 王子昆, 尚福林. 压电层合板柱形屈曲. 固体力学学报, 1997, 18(2): 101~108 (Wang Zikun, Shang Fulin. Cylindrical buckling of piezoelectric laminated plates. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1997, 18(2): 101~108 (in Chinese))
- 10 冯玮, 柳春图. 矩形智能板弯曲形状的主动控制. 力学与实践, 1999, 21(1): 25~27 (Feng Wei, Liu Chuntu. Active control of bending shape for rectangular smart plates. *Mechanics and Practice*, 1999, 21(1): 25~27 (in Chinese))

GENERALIZED LOCATION FUNCTION METHOD FOR VIBRATION CONTROL OF SMART BEAMS

Feng Wei Liu Chuntu Zeng Xiaohui Hu Zhenwei*

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

* (*Department of Mechanical, Marine and Building Services Engineering,
Institute of Vocational Education, Hong Kong, China*)

Abstract Smart structure has arrested much attention in recent years because its adaptability and good functionality as incorporating sensors and actuators. Many researchers have put their mind to modeling and searching more easy calculation methods for smart structure. A new method of modeling and calculation for smart beam—generalized location function method was built in this paper. The relation between control voltage and vibration modal of a smart beam with distributed piezoelectric sensors and actuators was presented. Generalized Location Function was applied to define the location of the piezoelectric sensors and actuators, and its series expansion function was used to simplify the process of computation. A simply supported beam was studied as an example. The results show that the control effect is mainly determined by the number, length and location of the actuators.

Key words smart structure, beam, vibration control, generalized location function