

中厚扁壳断裂问题的特征根及特征函数*

徐永君 柳春图

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

摘 要 证明了含任意切口、任意切口边界的多材料中厚扁壳问题的特征根等于相应的平面切口问题和平板弯曲切口问题两部分的特征根组合. 进而证明了中厚扁壳切口问题的特征根等于相应反平面切口问题和平面切口问题的组合. 中厚扁壳切口问题的特征根及其对应的 0 级特征函数均可直接按相应的两类基本问题(反平面切口问题和平面切口问题)进行求解.

关键词 中厚扁壳, 特征根, 特征函数, 反平面切口, 平面切口, 平板弯曲

1 引言

壳体结构分析是一项非常复杂的工作, 为了能够比较方便地分析和计算, 做一些合理且对分析精度影响不大的假设和假定是十分必要的, 扁壳理论就是这些假定中比较合理的一种. 中厚扁壳理论能够反映剪切变形的影响且在单元之间仅要求位移 C^0 连续, 所以受到高度重视并得到广泛应用^[1~6]. 对于大多数数值方法, 若要有效地计算应力强度因子, 都要在不同程度上直接或间接地利用问题的特征解. 文[7, 8]从不同切口边界条件的单材料平面断裂问题的特征方程入手, 解析地对第一阶特征根的分布作了分析和讨论. 文[9]从单材料平面问题的弹性力学复势出发, 讨论了 V 形切口的特征值问题并给出了特征值随切口角度的变化规律, 指出了高阶特征值曲线的分支现象和临界角概念. 文[10]利用有限元特征根法求解了两材料具有相同角度的双材料平面切口问题的特征根. 文[11]给出双材料反平面问题和单材料平面问题的特征根分布区间并利用二分法求解, 文[12]证明了反平面断裂问题特征值都是实根并利用超逆幂迭代法求解完备解. 文[13]利用基于留数理论的嵌入法对平面切口问题的完备特征解进行了有效求解. 文[14]结合嵌入法和 Müller 法的优点, 证明了联合求解是一种很好的改进. 文[15]对二维切口问题的特征根的重根进行了探讨, 证明了最大可能出现的重根数等于对应问题的自由度. 文[16]对文[11~15]进行了详细的回顾和总结. 本文推证了基于双级数展开理论中厚扁壳的特征根等于相应的反平面和平面应力切口问题的特征根的组合, 可直接调用相应求解程序进行求解或直接应用相应特征根.

2 基本方程

考虑如图 1 所示的多 (N) 种材料切口中厚扁壳问题, 取切口尖端为坐标原点, 考虑剪切变形影响的五个位移分量为 u_r, u, w, r, θ , 相应的应力分量分别为中面内力(薄膜内力) N_r, N_θ, N_r 和平板内力(弯曲内力) M_r, M_θ, M_r 和 Q_r, Q_θ (横向剪力). 由于扁壳中扁平的假设, 在下面的公式和推导中不区分法向和垂直方向、切向和水平方向以及它们相对应的变形, 第 j 种材料所在域内平衡方程^[3]为

* 国家自然科学基金(19872066)资助项目.

1998-09-25 收到第 1 稿, 2000-05-10 收到修改稿.

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \begin{cases} \frac{\partial V_r^j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r^j}{\partial \theta} + \frac{N_r^j - N^j}{r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r^j}{\partial \theta} + \frac{\partial V_r^j}{\partial r} + \frac{2N_r^j}{r} = 0 \end{cases} \quad (1a) \\
 \text{(ii)} \quad & \begin{cases} \frac{\partial M_r^j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_r^j}{\partial \theta} + \frac{M_r^j - M^j}{r} - Q_r^j = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial M_r^j}{\partial \theta} + \frac{\partial M_r^j}{\partial r} + \frac{\partial M_r^j}{r} - Q^j = 0 \end{cases} \quad (1b) \\
 \text{(iii)} \quad & \frac{\partial Q_r^j}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(Q_r^j + \frac{\partial Q_r^j}{\partial \theta} \right) - \bar{r}_r N_r - 2 \bar{r}_r N_r - \bar{r}_r N = 0 \quad (1c)
 \end{aligned}$$

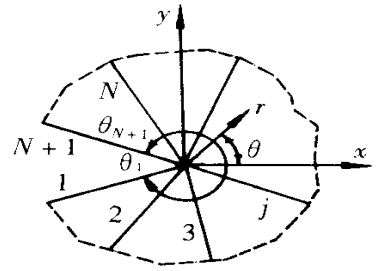


图 1 N 种材料切口示意图

其中 $\bar{r}_r, \bar{r}_r, \bar{r}_r$ 为扁壳的初曲率

$$\left\{ \bar{r}_r, \bar{r}_r, \bar{r}_r \right\} = - \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\}$$

切口边界条件为

$$\text{(i, ii)} \quad \begin{cases} F|_{=j} = 0, F_r|_{=j} = 0 \\ D_r|_{=j} = 0, D|_{=j} = 0 \end{cases}, \text{(iii)} \quad \begin{cases} Q|_{=j} = 0, \{ F = N, D = u \}, \{ F = M, D = \} \\ w|_{=j} = 0 \end{cases} \quad j = 1, N + 1 \quad (2)$$

应力平衡和位移连续的交界条件为

$$\begin{aligned}
 \text{(i, ii)} \quad & \begin{cases} (F^{j-1} - F^j)|_{=j} = 0, (F_r^{j-1} - F_r^j)|_{=j} = 0 \\ (D_r^{j-1} - D_r^j)|_{=j} = 0, (D^{j-1} - D^j)|_{=j} = 0 \end{cases}, \{ F = N, D = u \}, \{ F = M, D = \} \quad (3) \\
 \text{(iii)} \quad & (Q^{j-1} - Q^j)|_{=j} = 0, (w^{j-1} - w^j)|_{=j} = 0 \quad j = 2, 3, 4, \dots, N
 \end{aligned}$$

设广义位移的双级数特征展开式分别为

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} u_r^j = \sum_{i,n} r^{i+n} f_{ni}^j(\theta) \\ u^j = \sum_{i,n} r^{i+n} h_{ni}^j(\theta) \end{cases}, \text{(ii)} \quad \begin{cases} F_r^j = \sum_{i,n} r^{i+n} a_{ni}^j(\theta) \\ F^j = \sum_{i,n} r^{i+n} b_{ni}^j(\theta) \end{cases}, \text{(iii)} \quad w^j = \sum_{i,n} r^{i+n} c_{ni}^j(\theta) \quad (4)$$

记对于特征根 λ 对应的最低阶项(即第 $n=0$ 项,略去表示区域的角标 j) 为

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \bar{u}_{r,0} = r f_0(\theta) \\ \bar{u}_0 = r h_0(\theta) \end{cases}, \text{(ii)} \quad \begin{cases} \bar{F}_{r,0} = r a_0(\theta) \\ \bar{F}_0 = r b_0(\theta) \end{cases}, \text{(iii)} \quad \bar{w}_0 = r c_0(\theta) \quad (5)$$

相应的 0 阶薄膜内力、弯曲内力和横向剪力记为 $\{ \bar{N}_{r,0}, \bar{N}_0, \bar{N}_{r,0} \}, \{ \bar{M}_{r,0}, \bar{M}_0, \bar{M}_{r,0} \}$ 和 $\{ \bar{Q}_{r,0}, \bar{Q}_0 \}$ 。令 $\tilde{N} = \frac{\bar{N}_0}{h}, \tilde{M}_0 = \bar{M}_0 \left(-\frac{12}{h^3} \right), \tilde{Q}_0 = \bar{Q}_0 \left(\frac{6}{5h} \right)$ 得

$$\text{(i, ii)} \quad \begin{cases} \tilde{F}_{r,0} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial \bar{D}_{r,0}}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{D}_0}{\partial \theta} + \frac{\bar{D}_{r,0}}{r} \right) \right] \\ \tilde{F}_0 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{D}_0}{\partial \theta} + \frac{\bar{D}_{r,0}}{r} + \frac{\partial \bar{D}_{r,0}}{\partial r} \right] \end{cases}, \{ F = N, D = u \}, \{ F = M, D = \} \quad (6a)$$

$$\text{(iii)} \quad \tilde{Q}_{r,0} = G \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}, \quad \tilde{Q}_0 = G \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \theta} \quad (6b)$$

$$(i, ii) \begin{cases} \frac{\partial \tilde{F}_{r,0}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}_{r,0}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{F}_{r,0} - \tilde{F}_{\theta,0}}{r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}_{\theta,0}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{F}_{r,0}}{\partial \theta} + \frac{2\tilde{F}_{r,0}}{r} = 0 \end{cases}, \quad \{ F = N, D = u \}, \{ F = M, D = \} \quad (7a)$$

$$(iii) \quad \frac{\partial \tilde{Q}_{r,0}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\tilde{Q}_{r,0} + \frac{\partial \tilde{Q}_{\theta,0}}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (7b)$$

相应的交界条件略. 式(7)的(i)、(ii)和(iii)的两套关系式之间并不存在任何耦合. 可以看出(i)套关系式对立与平面应力问题一致,(ii)和(iii)则与反映 Reissner 型板弯曲特征问题的 0 级部分相一致. 对于特征根求解, 中厚扁壳断裂问题可以分为相应平面应力问题和相应 Reissner 型板弯曲问题两部分. 进而同样也可分为两类基本问题的组合.

3 中厚扁壳断裂问题特征根求解

3.1 平面问题基本方程及其比拟

考虑如图 1 所示的平面应力切口断裂问题, 位移与应力的关系为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \right] \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \nu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] \\ \tau_{r\theta} = G \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right] \end{cases} \quad (8)$$

熟知平面断裂问题的特征根 对应的 Williams 展开项为

$$u_r = r f_1(\lambda), \quad u_\theta = r f_2(\lambda) \quad (9)$$

不难得出如下的比拟关系

$$\begin{cases} a_0(f_0) \sim f_1, \quad b_0(h_0) \sim f_2, \quad \bar{u}_{r,0}(\bar{u}_{r,0}) \sim u_r, \quad \bar{u}_{\theta,0}(\bar{u}_{\theta,0}) \sim u_\theta \\ \tilde{M}_{r,0}(\tilde{N}_{r,0}) \sim \sigma_r, \quad \tilde{M}_{\theta,0}(\tilde{N}_{\theta,0}) \sim \sigma_\theta, \quad \tilde{M}_{r\theta,0}(\tilde{N}_{r\theta,0}) \sim \tau_{r\theta} \end{cases} \quad (10)$$

3.2 反平面问题基本方程及其比拟

考虑如图 1 所示的反平面应力切口断裂问题, 位移与应力的关系为

$$\tau_{rz} = G w_{,r}, \quad \sigma_z = \frac{1}{r} G w_{,z} \quad (11)$$

熟知平面断裂问题的特征根 对应的 Williams 展开项为

$$w = r f_1(\lambda) \quad (12)$$

等价关系

$$c_0 \sim f, \quad \bar{w}_0 \sim w, \quad \tilde{Q}_{r,0} \sim \tau_{rz}, \quad \tilde{Q}_{\theta,0} \sim \sigma_z \quad (13)$$

4 特征函数的求解

对于固定的 n 关于 r^{-n-2} 的基本方程为

$$(i) \begin{cases} B_j \left[(\lambda^2 - 1) f_n^j + \frac{1-\nu}{2} f_n^j + \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda^2 - \frac{3-\nu}{2} \right) h_n^j \right] + \\ [B_j (\lambda^2 - 1) (\bar{r}_+ - \bar{r}_-) c_{n-1} + B_j (1 - \nu) (\bar{r}_+ c_{n-1} + (\bar{r}_- - \bar{r}_+) c_{n-1})] = 0 \\ B_j \left[\frac{1-\nu}{2} (\lambda^2 - 1) h_n^j + h_n^j + \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda^2 + \frac{3-\nu}{2} \right) f_n^j \right] + \\ (B_j (\bar{r}_+ + \bar{r}_-) c_{n-1} + B_j (1 - \nu) \bar{r}_- (\lambda^2 + 1) c_{n-1}) = 0 \end{cases} \quad (14a)$$

$$(ii) \begin{cases} D_j \left[(\alpha_j^2 - 1) a_n^j + \frac{1 - \alpha_j}{2} a_n^j + \left(\frac{1 + \alpha_j}{2} \alpha_j - \frac{3 - \alpha_j}{2} \right) b_n^j \right] + C_j [(\alpha_j - 1) c_{n-1}^j - c_{n-2}^j] = 0 \\ D_j \left[\frac{1 - \alpha_j}{2} (\alpha_j^2 - 1) b_n^j + b_n^j + \left(\frac{1 + \alpha_j}{2} \alpha_j + \frac{3 - \alpha_j}{2} \right) a_n^j \right] + C_j (c_{n-1}^j - b_{n-2}^j) = 0 \end{cases} \quad (14b)$$

$$(iii) \quad c_n^j + \alpha_j^2 c_{n-1}^j - \alpha_j a_{n-1}^j - b_{n-1}^j - B_j (\bar{\alpha}_r + \bar{\alpha}_r) ((\alpha_j - 1) f_{n-1} + \bar{\alpha}_r c_{n-2}) - B_j (\bar{\alpha}_r + \bar{\alpha}_r) \cdot (f_{n-1} + h_{n-1} + \bar{\alpha}_r c_{n-2}) + \frac{1}{2} B_j (1 - \alpha_j) \bar{\alpha}_r (f_{n-1} + (\alpha_j - 2) h_{n-1} + 2 \bar{\alpha}_r c_{n-2}) = 0$$

$$\alpha_j = \alpha_j + n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (14c)$$

式中不存在的项(如 $n = 0$ 时的项 c_{-1}^j) 取为零. (f_n^j, h_n^j) 、 (a_n^j, b_n^j) 与 c_n^j 相互不存在耦合, 可分为齐次方程的通解叠加非齐次项的特解. 式(14) 齐次方程的通解分别为

$$(i, ii) \begin{cases} f\{a\}_n^j(\alpha_j) = A_{n1}^j \cos(\alpha_j + 1) + A_{n2}^j \sin(\alpha_j + 1) + A_{n3}^j \cos(\alpha_j - 1) + A_{n4}^j \sin(\alpha_j - 1) \\ h\{b\}_n^j(\alpha_j) = -A_{n1}^j \sin(\alpha_j + 1) + A_{n2}^j \cos(\alpha_j + 1) - A_{n3}^j \sin(\alpha_j - 1) + A_{n4}^j \cos(\alpha_j - 1) \end{cases}$$

$$(iii) \quad c_n^j(\alpha_j) = D_{n1}^j \cos \alpha_j + D_{n2}^j \sin \alpha_j \quad (15)$$

$$\alpha_j = \alpha_j + n, \quad j = \frac{(1 + \alpha_j) \alpha_j + 3 - \alpha_j}{(1 + \alpha_j) \alpha_j - (3 - \alpha_j)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N$$

对于式(14(iii)), 其 1 阶特解可统一为

$$c_{n特}^j = \frac{\cos(\alpha_j)}{\alpha_j} d \sin(\alpha_j) - \frac{\sin(\alpha_j)}{\alpha_j} d \cos(\alpha_j) \quad (16)$$

$$= \alpha_j a_{n-1}^j + b_{n-1}^j + B_j (\bar{\alpha}_r + \bar{\alpha}_r) (\alpha_j - 1) f_{n-1} + B_j (\bar{\alpha}_r + \bar{\alpha}_r) (f_{n-1} + h_{n-1}) - \frac{1}{2} B_j (1 - \alpha_j) \bar{\alpha}_r [f_{n-1} + (\alpha_j - 2) h_{n-1}]$$

对于式(14(ii)), $n = 1$ 时相应的 1 阶特解有多种形式, 文[17]给出了单材料的一种特解形式, 可直接应用到本文讨论的多材料问题

$$\begin{cases} a_{n特}^j = -\frac{C_j}{D_j} \frac{D_{01}}{\alpha_j (1 + \alpha_j) + 3 - \alpha_j} \cos(\alpha_j - 1) - \frac{C_j}{D_j} \frac{D_{02}}{\alpha_j (1 + \alpha_j) + 3 - \alpha_j} \sin(\alpha_j - 1) \\ b_{n特}^j = 0 \end{cases} \quad (17)$$

当 $n = 0$, 式(14) 中(i)、(ii)和(iii)均为齐次方程, 其系数 $\{D_{01}^j, D_{02}^j\}$ 和 $\{A_{01}^j, A_{02}^j, A_{03}^j, A_{04}^j\}$ 的确定可按反平面和平面问题中给出的方法求解, 当 $n > 0$, 非齐次项的特解可视为已知, 确定齐次通解部分对应的系数 $\{D_{n1}^j, D_{n2}^j\}$ 和 $\{A_{n1}^j, A_{n2}^j, A_{n3}^j, A_{n4}^j\}$.

5 小结

基于双级数展开理论推证了中厚扁壳的特征根等于相应的平面切口问题和板弯曲切口问题两部分组合, 因此也就是等于反平面和平面应力切口问题的特征根的组合, 即相应的特征根和 0 级特征函数与相应的平面问题和反平面问题对应的特征根和特征函数完全相同. 所以对任意多材料、任意切口张角、任意切口边界条件的情况可直接调用已有的相应求解反平面和平面切口问题的求解程序进行求解或直接应用已有的相应特征根.

参 考 文 献

- 1 Zienkiewicz D C, Taylor R L, Too J M. Reduce integration technique in general analysis of plates and shells. *Int J Num Meth Enyng*, 1971, 3(2) :275 ~ 290
- 2 Pawsey S F, Clough R W. Improved numerical integration of thick shell finite element. *Int J Num Meth Enyng*, 1977, 3(2) :1529 ~ 1543
- 3 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京:科学出版社,1979
- 4 黄克智. 板壳理论. 北京:清华大学出版社,1987
- 5 刘人怀. 板壳力学. 北京:机械工业出版社,1990
- 6 Yuan Si. The finite element method of lines: theory and applications. Science Press, BeijingNew York, 1993
- 7 Williams M L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension. *J Appl Mech*, 1952, 14 :526 ~ 528
- 8 England A H. On stress singularities in linear elasticity. *Int J Engng Sci*, 1971, 9 :571 ~ 585
- 9 Fan Zhong, Long Yuqiu. Sub-region mixed finite element analysis of V-notched plates. *International Journal of Fracture*, 1992, 56 :333 ~ 344
- 10 Yoshinobu Fujitani, Daiji Fujii. Analysis of stress singularity in the vicinity of the tip of crack and notch along the bi-material interface. *Lecture Notes in Num Appl Anal. Modeling, Computation and Analysis in Fracture Mechanics*, Kinokuniya, Tokyo, 1994, 13 :75 ~ 92
- 11 徐永君,袁骝. 断裂问题特征根区间及其二分迭代求解. *工程力学*,1996,13(4) :28 ~ 40
- 12 Xu Yongjun, Yuan Si. Complete eigen solutions for anti-plane notches with multi-materials by superinverse iteration. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1997, 10(2) :157 ~ 166
- 13 Xu Yongjun, Yuan Si. Complete eigen solutions for plane notches with multi-materials by the imbedding method. *International Journal of Fracture*, 1996, 81 :373 ~ 381
- 14 袁骝,徐永君. 嵌入法和 Müller 法联合求解断裂问题特征根的完备解. *计算力学学报*,1997,14(spec) :639 ~ 642
- 15 徐永君,袁骝,柳春图. 断裂问题特征根的重根探讨. *力学学报*,1999,31(5) :618 ~ 624
- 16 徐永君,袁骝,柳春图. 二维切口问题完备特征解的研究现状与进展. *力学进展*,2000,30(2) :216 ~ 226
- 17 柳春图. 承受弯曲的板在裂纹顶端附近的应力和变形. *固体力学学报*,1983,3 :441 ~ 448

THE EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS IN SHALLOW SHELL FRACTURE ANALYSIS

Xu Yongjun Liu Chuntu

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080*)

Abstract Solving eigenvalue of shallow shell with crack/notch, which around the vertex with multi-materials, arbitrary opening angles and various surface conditions, is discussed. It is shown that the shallow shell eigenproblem is tantamount to a combination form of a in-plane problem and a bending plate problem. Furthermore, it can also be divided into two base parts, one is the anti-plane crack/notch problem and the other is in-plane crack/notch problem. So we can use the corresponding eigen-solving programs or the eigenvalues directly and use the corresponding eigenfunctions (anti-plane crack/notch and in-plane crack/notch problems) as 0 series eigenfunctions of the shallow shell.

Key words shallow shell, eigenvalue, eigenfunction, anti-plane notch, in-plane notch, plate bending