

# 圆域内双柱整流现象的数值模拟

熊鳌魁

(武汉交通科技大学, 武汉 430063)

浦群

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘要** 本文基于 Reyleigh 整流定律, 利用  $\psi-\omega$  形式的定常不可压 N-S 方程, 数值模拟了双柱在圆域内作高频小振幅振动时所产生的定常整流流动。揭示了流动随整流雷诺数的演化特性。此外就求解  $\psi-\omega$  形式的 N-S 方程所涉及的定解边界条件问题, 本文亦进行了必要的讨论。

**关键词** 数值模拟, 涡量边界条件, 定常整流

**分类号** O 352

## 1 引言

在实际工程应用中, 如海洋工程、风工程等, 物体结构都不可避免地会发生振动。此时由于流体运动的非线性特点, 就会产生各种非线性流体力学效应, 从而对结构物本身产生显著影响。高频小振幅振动的物体在流体中所诱发的一个典型非线性效应就是所谓整流现象。尽管整流研究最早可追溯到一个半世纪前的 Reyleigh<sup>[1]</sup> 时代, 然而由于整流现象复杂多样, 不同情况下, 其表现形式不一。而其在工程实践中又有应用价值, 所以一直吸引着人们的研究兴趣。柱体的研究首先是从单圆柱在无界域中的振动<sup>[2]</sup>, 发展到单圆柱在有界域内的振动<sup>[3]</sup> 及双圆柱在无界域中的振动情况<sup>[4][5]</sup>, 文献 [6] 则研究了柱栅在无界域中的整流问题。本文用数值方法探讨了双圆柱在有界域内的整流现象。

在数值模拟整流规律方面, 由于目前的研究对象大多为二维问题, 因而多以  $\psi-\omega$  形式的 N-S 方程为基本控制方程。其优点为消去了压力这一无直接控制方程的项, 其缺点一般认为是关于固壁上的涡量边界条件未知, 需人为导出可操作的边界条件。这个问题直到现在仍是一个研究课题<sup>[7][8]</sup>。目前以 Thom 提出的一阶涡量边界条件及其高阶改进型较为流行。但 Gresho<sup>[9]</sup> 则认为不存在涡量边界条件。本文认为从涡量的定义及涡量输运方程本身来源于数学运算这两点来看, Gresho 的结论是可以接受的, 其实涡量分布并不是问题求解的最终目标。就二维  $\psi-\omega$  描述流体运动体系而言, 正确的 (即满足方程及边界条件的) 流函数分布才是求解流体流动的关键。从数学角度看, 此时的定解问题应是一个关于  $\psi$  的具有四阶偏导及适定边界条件的偏微分方程, 而涡量可理解为一个中间变量。

本文在数值求解  $\psi-\omega$  形式的 N-S 方程时, 采用缩域的方法将  $\psi$  的第一、第二类边界条件

同时用于强制求解关于  $\psi$  的 Poisson 方程, 即避免提涡量边界条件, 又克服了 Poisson 方程的超定问题。这样就保证了求出的流场随时都满足不可滑移条件。

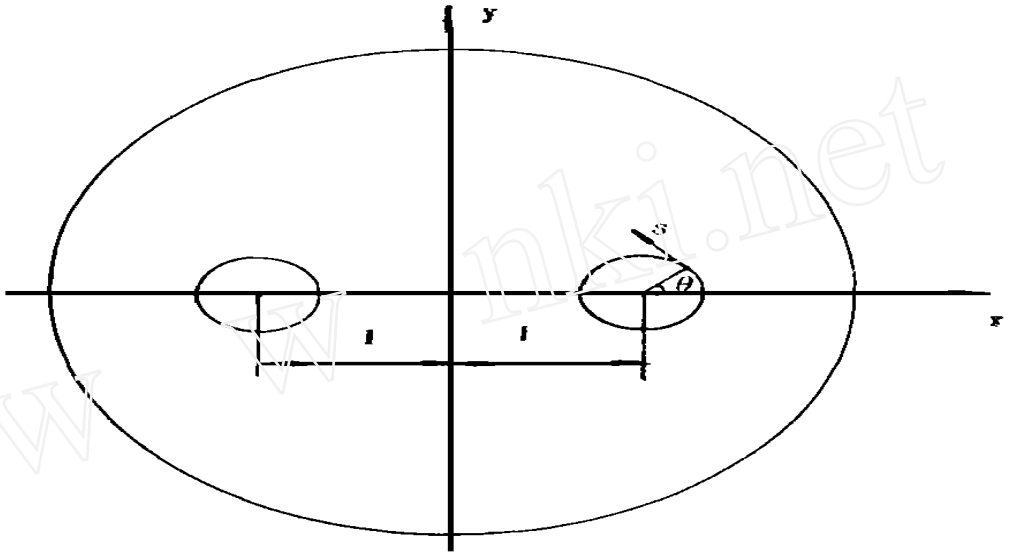


图1 几何示意图

## 2 整流定解问题

如图1示, 一大圆柱(直径为  $D$ ) 内有两个等直径小圆柱(直径为  $d$ ), 两小圆柱相距  $e = 2l$ 。三柱之间充满均质不可压粘性流体, 流体静止。当两小圆柱整体在  $x$  方向用高频小幅谐振动时 ( $U = U_0 \cos \omega t$ ), 由于在固壁邻近一薄层(Stokes 层) 外缘, 速度的定常分量不为零, 因而诱导产生 Stokes 层外的定常流。对于较高整流雷诺数, Stokes 层外定常整流的控制方程为连续方程及定常 N-S 方程。其在固壁上的定解边界条件由 Rayleigh 整流定律决定。即:

$$u_e = - \frac{3}{4} \frac{u_s}{\omega} \frac{du_s}{ds} \quad (1.1)$$

其中  $u_e$  为定常整流在固壁处的切向速度分量(法向速度分量为零),  $u_s$  为对应于柱体振动速度幅值  $U_0$  所诱导的势流速度在固壁处的切向分量,  $\omega$  为柱体振动频率,  $s$  为固壁的切向方向。

引入流函数  $\psi$  及涡量  $\omega$  后, 则定常整流无因次定解问题变为:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \omega \quad (1.3)$$

在边界上

$$\psi = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = u_e \quad (1.5)$$

式中  $n$  为固壁法线方向。在本例中, 相关的无因次参数有: 大小圆柱直径比  $(D/d)$ , 两内柱间距  $(e/d)$  及整流雷诺数  $Re = U_0^2/\omega\nu$ 。

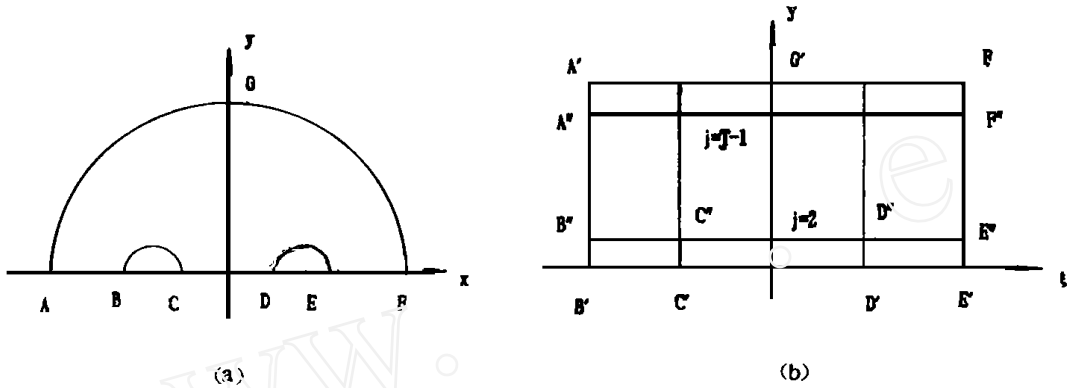


图2 边界网格线变换对应关系

### 3 计算网格

考虑到问题的上、下对称性, 只须求解半个域 (图2)。由于求解域边界不规则, 为求解方便, 须将物理平面求解域变换到计算平面矩形求解域。本文采用椭圆型方程网格生成法。其优点是所生成的域内网格线具有高度的光滑性且易于通过源项控制网格疏密度。但在本例中有其不足之处: 在物理平面上求解域有6个角点  $(A, B, C, D, E, F)$ , 而矩形平面只能有4个角点。因而存在两个奇点  $(C, D)$ 。由此带来两个问题: 一是不能生成正交网格; 二是奇点附近的网格密度不易控制, 除非控制网格疏密度的源项本身也具有某种奇异性。本文通过加密网格的办法来改善奇点附近的计算。

设变换函数为:

$$x = x(\xi, \eta) \quad (2.1)$$

$$y = y(\xi, \eta) \quad (2.2)$$

则  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ , 通过下述定解问题数值解出:

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0 \quad (2.3)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0 \quad (2.4)$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{J} (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)$$

$$\beta = \frac{1}{J} (x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta})$$

$$\gamma = \frac{1}{J} (x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2)$$

$$J = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$$

边界条件为在边界上满足图 2 所示的对应关系。上式中的下标均表示偏导。生成的网格如图 3 所示。

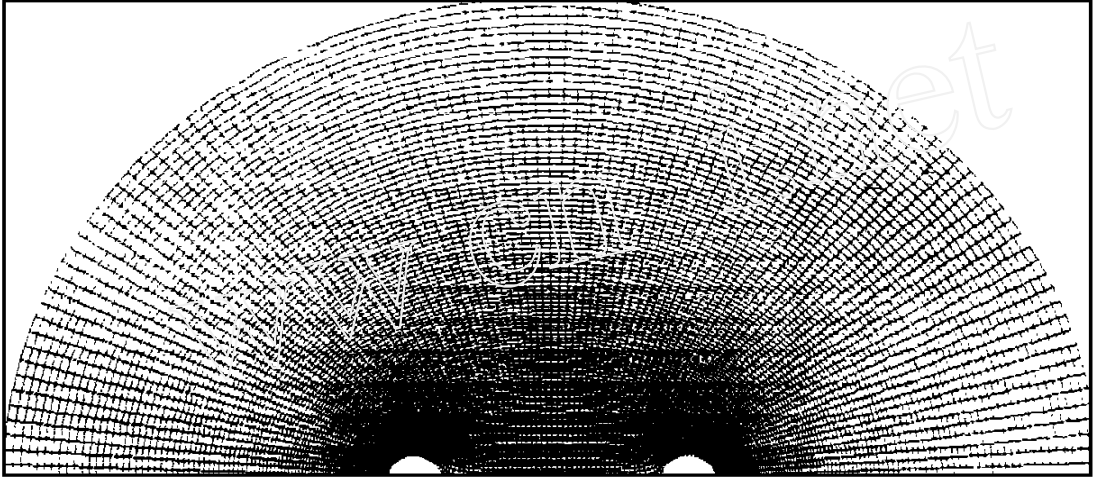


图 3 物理平面网格图

#### 4 $u_s$ 的确定

根据 Rayleigh 定常整流定律, 整流的边界条件取决于圆柱振动速度幅值所对应的势流速度在物面上的切向分量。因而在求解整流之前须求解相应的势流定解问题:

控制方程:

$$\alpha \psi_{\xi\xi} - 2\beta \psi_{\xi\eta} + \gamma \psi_{\eta\eta} = 0 \quad (3.1)$$

边界条件: 在  $AB, CD, EF$  及  $FGA$  段上有:

$$\psi = 0 \quad (3.2)$$

在  $BC, DE$  段上有:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \cos \theta \quad (3.3)$$

此处的  $\psi$  为势流流函数,  $s, \theta$  的定义见图 1。

#### 5 定常整流数值解法

在计算平面内定常整流的控制方程相应地变为:

$$\frac{1}{J} (\psi_{\eta\omega\xi} - \psi_{\xi\omega\eta}) = \frac{1}{JRe} (\alpha\omega\xi\xi - 2\beta\omega\xi\eta + \gamma\omega\eta\eta) \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{J} (\alpha\psi_{\xi\xi} - 2\beta\psi_{\xi\eta} + \gamma\psi_{\eta\eta}) = -\omega \quad (4.2)$$

前式为关于涡量的输运方程, 后式为关于流函数的 Poisson 方程。(4.1) 式的求解本文采用时间相关算子分裂方法, 即将 (4.1) 式分裂成若干方程:

$$\frac{\omega^{(1)} - \omega^{\eta}}{t} + \frac{1}{J} \psi_{\eta} \frac{(\omega_{\xi}^{(1)} + \omega_{\xi}^{\eta})}{2} = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\omega^{(2)} - \omega^{(1)}}{t} - \frac{1}{J} \psi_{\xi} \frac{(\omega_{\eta}^{(2)} - \omega_{\eta}^{(1)})}{2} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\omega^{(3)} - \omega^{(2)}}{t} = \frac{\alpha}{JR_e} \omega_{\xi}^{(3)} \quad (4.5)$$

$$\frac{\omega^{(4)} - \omega^{(3)}}{t} = \frac{\gamma}{JR_e} \omega_{\eta}^{(4)} \quad (4.6)$$

$$\frac{\omega^{(5)} - \omega^{(4)}}{t} = \frac{\alpha - 2\beta + \gamma}{4JR_e} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \omega^{(5)} - \frac{(\alpha + \gamma)}{4JR_e} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \omega^{(4)} \quad (4.7)$$

$$\frac{\omega^{\eta+1} - \omega^{(5)}}{t} = \frac{(\alpha + \gamma)}{4JR_e} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \omega^{\eta+1} - \frac{(\alpha - 2\beta + \gamma)}{4JR_e} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \omega^{(5)} \quad (4.8)$$

上述各式中, 上标  $n$  表示  $n$  时刻的值,  $n+1$  表示  $n+1$  时刻的值, 其余上标均表示中间变量。注意 (4.7)、(4.8) 两式均来源于 (4.1) 式粘性扩散项中的交叉导数项。其中用到关系式:

$$\frac{\partial}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2$$

以及:

$$-2\beta = (\alpha - 2\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma)$$

前者的目的是为获得网格对角线上的三对角系数矩阵。后者的目的是保证所有系数非负。这是因为  $\alpha + \gamma > 0$ ,  $\alpha - 2\beta + \gamma > 0$ 。

显而易见, (4.3) — (4.8) 式中的时间离散均为隐式。本文中空间二阶导数均用中心差分离散。一阶隐式导数项用一阶迎风格式离散, 而一阶显式导数项则“顺风”离散与之平衡, 从而得到最终差分格式, 且均为三对角系数矩阵, 可用追赶法解之, 应指出的是, 源于交叉导数项的 (4.7)、(4.8) 两式是条件稳定的。这是因为交叉导数项本身可以起正扩散或负扩散的作用, 以调节非正交坐标系中沿坐标轴方向的扩散量。实践表明, 本方法中整个扩散项的综合效果是稳定的, 反映了正扩散的物理本质。

(4.2) 式的求解则可利用  $n$  时刻的涡量分布, 使用中心差分格式及常规 SOR 迭代解之, 只是在边界条件问题上作特别处理。注意到本例中固壁边界为  $BC$ 、 $DE$  及  $AGF$ , 其上提有速度边界条件。其余边界为对称面, 其上涡量为零。因此可将求解域编为  $ABC CDD EFA$ 。相应的边界条件为:

$AB$ 、 $CD$  及  $EF$  段上:

$$\psi = 0$$

$AF$  段上:

$$\frac{3\psi_{i,j+1} - 4\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{2\eta} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_{i,j+1}$$

$BC$ 、 $DE$  段上:

$$-\frac{3\psi_{i,1} + 4\psi_{i,2} - \psi_{i,3}}{2\eta} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_{i,1}$$

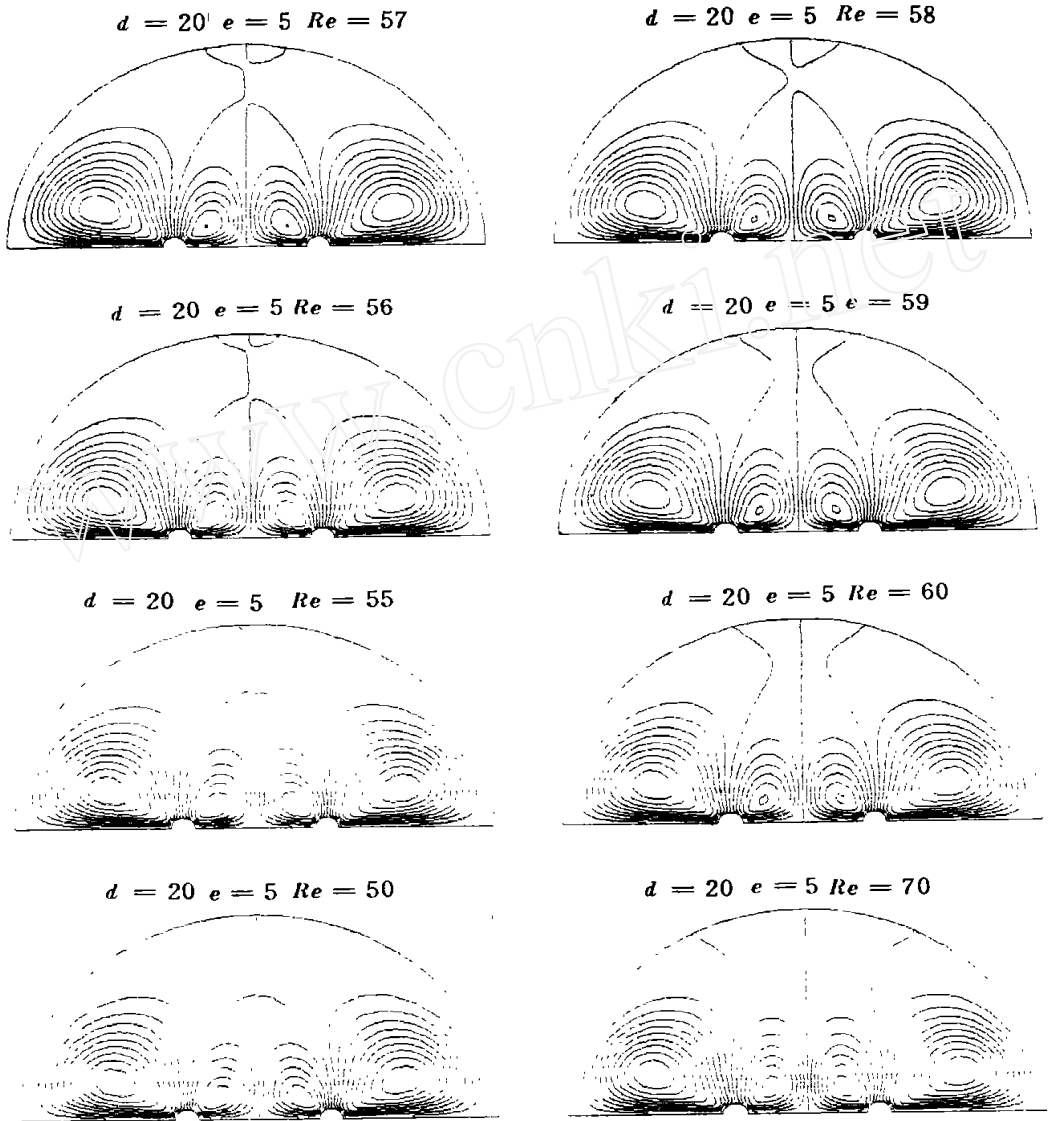


图4 流函数等值线分布图

上两式均为一阶导数的二阶偏差格式,且有  $\psi_{i,1} = \psi_{i,J+1} = 0$ 。

归纳整流定解问题的求解步骤为:

- (1) 指定缩域上的涡量初值。
- (2) 利用缩域上的涡量值求解(4.2)式得流函数值。
- (3) 仍用(4.2)式求余下域的涡量值。
- (4) 求解(4.1)式得下一时刻的涡量值。
- (5) 检验流场是否已趋于定常。若是结束运算,若不是返回第二步。

本文中检验流场是否定常的方法是同时校核求解内域的  $|\bar{\omega}^{n+1} - \bar{\omega}^n|/\bar{\omega}^n/t$  以及边界处的  $|\bar{\omega}^n - \bar{\omega}^{n-1}|/\bar{\omega}^{n-1}/t$  是否小于指定的精度(本文为  $5 \times 10^{-4}$ )。其中  $\bar{\omega}$  表示平均值。此外本文算例中的网格数为  $100 \times 50$ , 时间推进步为 0.01。

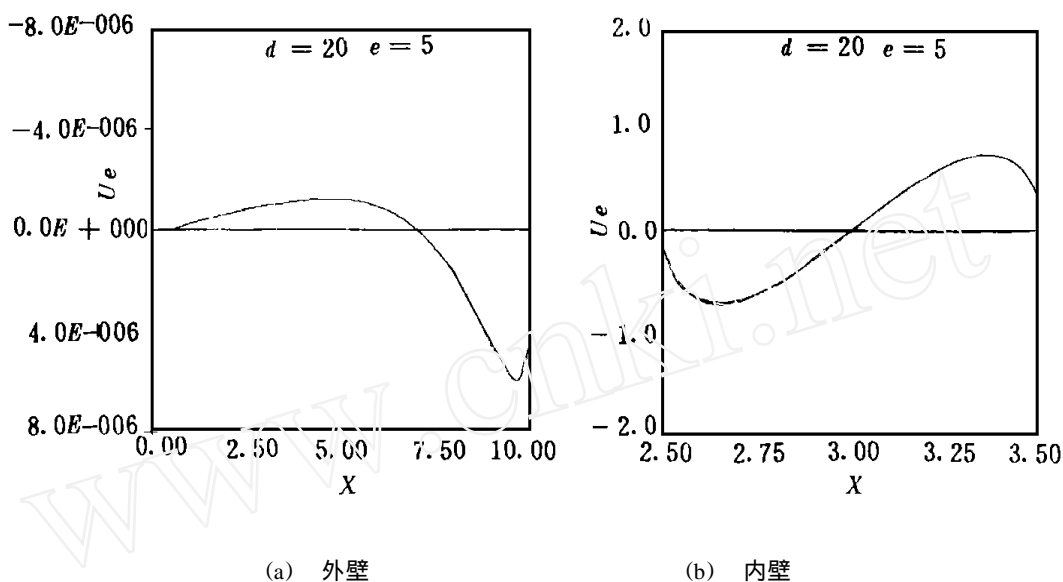


图5 边界速度分布

## 6 计算结果及讨论

图4为直径比20, 间距5时的流场流谱图。从图4右半部可见, 流动呈现有两个涡心较为稳定(不随 $Re$ 变)的涡区。涡区回流方向由速度边界条件所定。图5(a)为右半域外壁处的速度分布。图5(b)为右内柱壁面处的速度分布情况, 其中右半部分为正, 左半部分为负。这里内外壁处流速向右定义为正。由此可知外侧涡区的回流方向为流体在底部向外流动经上部返回, 而内侧涡区与之相反, 流体在底部向中心, 流动经上部返回。从图4中可见有一条特殊的流线或与对称轴相交或与外圆相接。这是一条零流线也是内外侧涡区的分界线。从流谱看, 不同 $Re$ 数的影响主要就体现在这条零流线的变化以及在区域顶部有一小涡区随 $Re$ 数的增大在衍生、发展, 最终与内侧涡合并。值得注意的是这一过程在极小 $Re$ 数范围内就完成了(本例约为55~58)。根据涡区的分布情况, 可将本例整流流态分为三种形态: I类为 $Re < 55$ , 其特征为只有两个涡区, 且内涡区被包含于外涡区之内; II类为 $Re = 55 \sim 58$ , 其特征为有三个涡区; III类为 $Re > 58$ , 其特征仍为有两个涡区, 但内外涡区并列。

显然上述现象除与 $Re$ 数有关外, 理应与外壁处的速度边界条件有关(应注意边界速度与 $Re$ 数无关)。注意到本例中顶部的边界速度尽管极小但为正值, 因此可对本例上述现象作如下解释: 在 $Re$ 数较小时, 由于外侧涡的强力扩散作用, 完全压制住了顶部边界速度的驱动作用, 从而将涡区扩充到几乎整个上部。随着 $Re$ 数的增加, 涡的扩散能力下降, 边界速度右向驱动作用凸现, 从而形成与内侧涡同方向的涡区, 并最终与内侧涡合并。由此不难理解, 若外壁速度分布均为负, 则不会出现顶部小涡区。又若外壁速度值较大, 则最终流谱取决于哪段边界层扩散能力最强, 这时有可能会只存在I、III类形态。上述推论有待进一步深入研究证实。

## 7 结论

本文数值模拟了圆域内双柱定常整流问题, 试验表明本文对非正交网格下所特有的交叉导数项的处理及边界条件问题的处理是简单有效的。

通过数值模拟揭示了整流流动随 $Re$ 数的演化特性。由于上部区域内速度太小以及所对应的 $Re$ 数变化范围亦极小,这一特性的揭示显示了数值试验的优越性。

### 参 考 文 献

- 1 Rayleigh L. On the Circulations of Air Observed in Kundt's Tubes and on Some Applied Acoustical Problems. *Phil. Trans.* 1883, A 175: 1-21.
- 2 Schlichting H. *Boundary Layer Theory*. 6th Edition. McGraw-Hill Book Company, 1968.
- 3 王伟. 振动圆柱间定常整流及传热研究. 中国科学院力学所博士论文, 1994.
- 4 Zapryanov Z, Kozhouknorova Zh & Iordanova A. On the Hydrodynamic Interaction of Two Circular Cylinders Oscillating in a Viscous Fluid. *J. Appl. Maths. Phys. (ZAMP)*, 1988, 39: 204-220.
- 5 Haddon E W & Riley N. The Steady Streaming Induced between Oscillating Circular Cylinders. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1979, 32: 265-282.
- 6 Yan B, Ingham D B & Morton B R. Streaming Flow Induced by an Oscillating Cascade of Circular Cylinders. *J. Fluid Mech.* 1993, 252: 147-171.
- 7 吴介之, 吴晓辉, 吴建民, 马晖扬. 关于涡量的动力学边界条件. *空气动力学学报*, 1994, 12(3): 275-281.
- 8 Huang H X & Seymour B R. The no-slip Boundary Condition in Finite Difference Approximations. *Inter. J. for Num. Methods in Fluids*, 1996, 22(8): 713-729.
- 9 Gresho P M. Incompressible Fluid Dynamics: Some Fundamental Formulation Issues. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1991, 23: 413-453.

#### 作者简介

熊鳌魁, 男, 1960年出生, 博士。

浦群, 女, 1941年1月出生, 研究员。

## Numerical Simulation of Streaming Flows in a Circular Region Caused by Oscillating Double Circular Cylinders

*Xiong A o-kui*

(Wuhan Transportation University, Wuhan 430063)

*Pu Qun*

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080)

**Abstract** This paper deals with the steady streaming flow caused by oscillating double circular cylinders in a circular region. Based on the Rayleigh streaming law and steady incompressible N-S equation in the  $\psi-\omega$  form, the flow is numerically simulated. The evolution of flow patterns with the streaming Reynolds number is analyzed. In addition, the involved boundary conditions are also discussed.

**Key words** numerical simulation, boundary conditions of vorticity, streaming flow.