

具有单元分裂功能的间断有限元方法

邱 峰 丁 桦

(中国科学院力学研究所工程科学部, 北京 100080)

摘要 介绍一种能够模拟材料开裂过程的有限元方法, 该方法引入单元分裂和界面分离技术, 结合具体的破坏准则, 模拟材料变形中的破坏, 同时还可以方便地处理材料中任意分布的界面结构. 以三点弯曲实验为例, 通过数值模拟结果和实验数据的比较, 验证了该方法的适用性.

关键词 有限元, 界面, 单元分裂, 动态松弛

ELEMENT SPLITTING TECHNIQUE IN DISCONTINUOUS FINITE ELEMENT METHOD

QIU Feng DING Hua

(Division of Engineering Sciences, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract An element splitting technique is introduced into the discontinuous finite element method which admits discontinuity between elements by using joint elements. The method can be applied to simulate the fracture of materials not only at the interfaces but also in the material mass based on a given criteria. The validation of this method is shown by comparing the numerical calculation with the 3-point bending experiment.

Key words FEM, interface, splitting of element, dynamic relaxation

1 引 言

破坏过程的模拟一直是固体力学研究中的热门话题, 其中, 尤其是非连续介质的破坏模拟, 目前存在很多问题, 如离散带来的尺度效应、材料非连续性的表征、破坏准则的选取、材料破坏后的几何描述等.

有限元方法是目前应用最为广泛的数值方法之一, 由于该方法基于连续性假设, 早期的有限元主要用于描述计算连续介质. 为了将有限元方法应用于岩体等非连续介质, Goodman^[1], Zienkiewicz^[2], Ghaboussi^[3], Katona^[4], Desai^[5] 等人相继提出了各式各样的断裂单元, 断裂单元的应用在很大程度上推动了有限元方法的发展, 但是限于小位移和断裂面不可分离, 在处理破坏裂纹扩展方面存在一定的局限, 另外, 过多的断裂单元还会带来刚度矩阵的病态问题.

为了克服上述困难, 使有限元方法更好地模拟破坏问题, 一些学者在采用非连续形函数的基础上提

出了强化有限元方法, Belytschko^[6,7], Daux^[8] 等人在这方面作了很多工作. Duarte^[9,10] 和 Strouboulis^[11,12] 等人又在此基础上, 结合材料不均匀性和非线性的处理, 发展了广义有限元方法, 并将其应用于非线性断裂分析.

基于有限元方法引入一种单元分裂和界面分离技术, 该技术能够描述材料破坏过程中的拓扑结构变化, 综合考虑了材料本身及其界面对材料整体破坏的影响. 文章以二维问题为例介绍该方法, 结合三点弯曲实验, 通过数值模拟与实验的比较, 验证该方法的适用性.

2 方法介绍

下面分别从计算模型、破坏准则、单元分裂处理和求解方法几方面对这种具有单元分裂功能的间断有限元方法进行介绍.

2.1 计算模型

结合单元分裂和界面分离技术, 在本文的计算模型中采用常应变单元和节理单元, 常应变单元用于

2005-07-13 收到第 1 稿, 2006-02-17 收到修改稿.

模拟均匀连续介质材料，节理单元用于模拟材料中的间断界面，如图 1 所示。

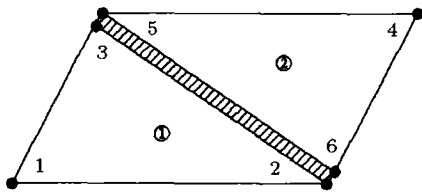


图 1 界面的单元构造

常应变单元是有限元方法中最基本的单元类型，基本变量是节点线位移。由于采用线性位移模式，满足完备性条件；位移在单元边界满足 C^0 阶连续，属于协调单元，因此保证了算法结果一致收敛。

节理单元最初是由 Goodman^[1] 等人提出的一种用于模拟不连续面的无厚度力学模型，随后，朱伯芳^[13] 提出了等厚度节理单元，并将其与无厚度节理单元形成统一的计算公式。节理单元分为线性节理单元、高次节理单元和无限节理单元，为了和常应变单元相协调，本模型采用线性节理单元。

2.2 破坏准则

本文介绍的方法并不局限于某一特定材料，为了和后面的计算实例一致，这里以岩石材料为例。岩石材料的破坏一般分为张拉和剪切两种形式，考虑到这两种破坏形式，综合 Mohr-Coulomb 准则和 Griffith 准则，提出如下破坏准则

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 < -3\sigma_3, \sigma_3 \leq -\sigma_T \\ \sigma_1 > -3\sigma_3, \tau \leq c + \sigma \tan \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中， $\sigma_1 < -3\sigma_3$ 对应张拉破坏， $\sigma_1 > -3\sigma_3$ 对应

剪切破坏， σ_T 为材料的拉伸强度， c 为材料的粘结力， φ 为材料的内摩擦角。

对于节理同样存在张拉破坏和剪切破坏，规定节理的法向只能承受压应力 ($\sigma_n > 0$)，切向遵循 Mohr-Coulomb 准则 ($\tau_s \leq c_j + \sigma_n \tan \varphi_j$)。

2.3 单元分裂处理方法

根据破坏准则，首先判断出材料的破坏形式，随后进行相应的破坏处理。本文引入单元分裂和界面分离技术模拟材料的破坏过程，对于张拉破坏，具体方法如下：

(1) 确定破坏单元的破坏方向

在常应变单元内部，必然存在一条与破坏方向一致并且通过单元节点与对边相交的直线，为叙述方便起见，称这样的直线为破坏线，如图 2 所示。

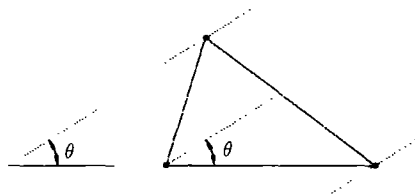


图 2 单元破坏线

(2) 分裂破坏单元

确定单元破坏线后 (图 3(a-1), 图 3(b-1))，在破坏线与单元边界的交点位置引入两个新节点，沿着破坏线的方向将破坏单元 (母单元) 分裂为两个子单元，规定一个子单元保持母单元的单元编号，另一个子单元的编号在原有单元数目上扩充 (图 3(a-2), 图 3(b-2))。

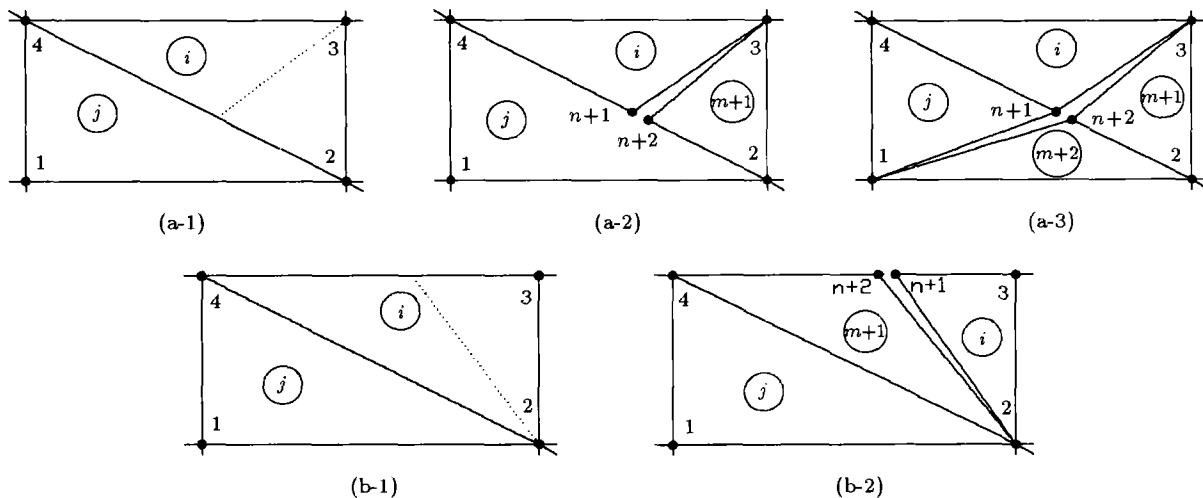


图 3 单元内部分裂示意图

(3) 分裂相邻单元

如果破坏单元在破坏线的相交边存在相邻单元(图3(a-2)), 需要在步骤(2)的基础上, 采用类似的单元分裂操作将该相邻单元分裂为两个子单元(图3(a-3)).

上述操作对应应在单元内部产生分裂, 如果单元破坏线与单元某一条边的夹角很小(图4(a)), 为了避免产生“狭长”单元, 在这条边的中点位置引入两个新节点, 沿着这条边将破坏单元与其相邻单元分离(图4(b)).

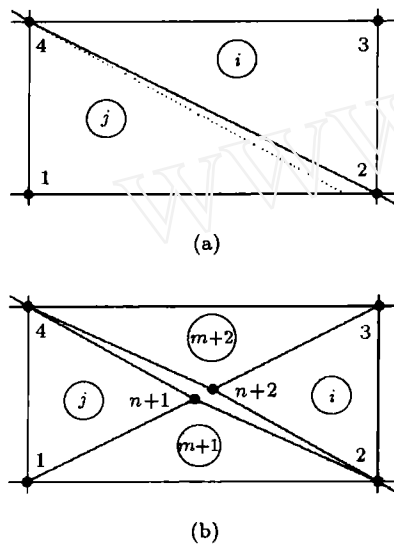


图4 单元边界分裂示意图

(4) 单元节点编号调整

单元分裂之后模型的拓扑结构发生变化, 对比分裂前(图3(a-1), 图3(b-1), 图4(a))和分裂后(图3(a-3), 图3(b-2), 图4(b))的单元变化, 调整相应单

元的节点编号.

与张拉破坏相比, 剪切破坏除了需要上述4个操作步骤外, 还需要在单元分裂处引入节理单元(图5). 所有由于剪切破坏而引入的节理单元, 切向刚度 k_s 均为零, 同时在节理单元的切向引入摩擦力 $\tau_s = f\sigma_n$, 以此来模拟剪切破坏后剪切面上的作用关系.

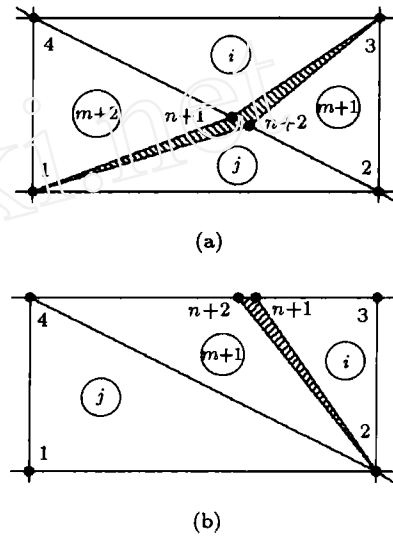


图5 单元剪切破坏分裂示意图

(5) 贯通开裂层

随着材料内部的开裂层不断扩展, 数值模拟的过程中由于单元分裂将会产生多个开裂层, 因此需要将这些彼此独立的开裂层贯通起来. 当开裂层发展到模型边界(图6(a-1)), 在边界交点位置引入一个新节点, 将开裂层端部分裂开(图6(a-2)); 如果开裂层在模型内部发生汇交(图6(b-1)), 同样在交点位置引入一个新节点, 将汇交开裂层贯通(图6(b-2)).

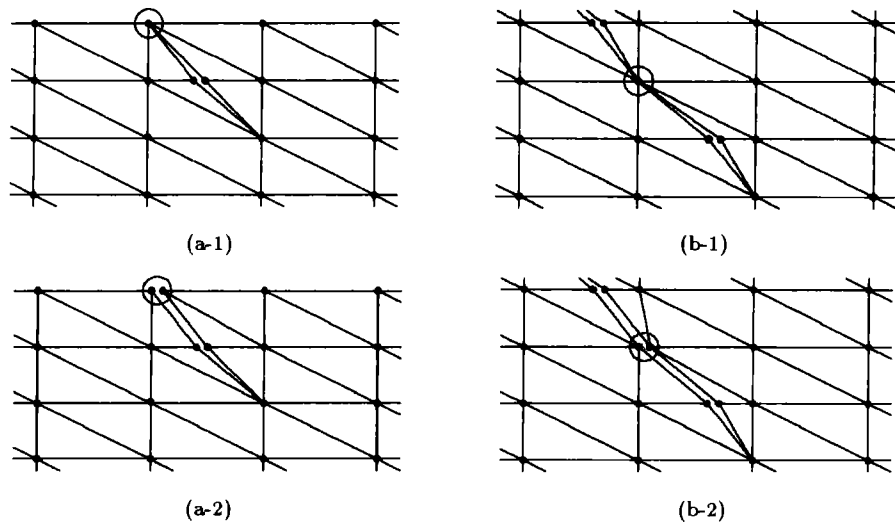


图6 开裂层的贯通

2.4 求解方法

由于引入单元分裂技术, 破坏必然产生新的单元和节点, 使得模型拓扑结构发生变化, 传统有限元求解方法处理这类问题比较困难, 本文引入动态松弛求解方法. 结合该计算模型, 动态松弛处理方法如下: 将每个常应变单元均匀分布的质量平均分配到单元节点 (图 7), 这样就将原先以单元作为基本计算单位转化为以节点作为基本计算单位.

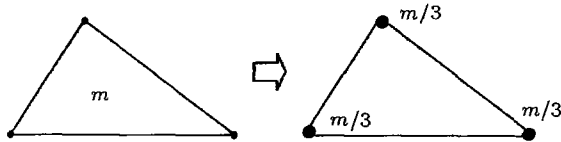


图 7 单元质量分配示意图

根据动力学基本方程

$$M_i \ddot{X}_i(t) + C_i \dot{X}_i(t) + \sum_{j=1}^n K_{ij} X_j(t) = F_i(t) \quad (2)$$

利用中心差分

$$\ddot{X}_i(t) = \frac{\dot{X}_i(t + \frac{1}{2}\Delta t) - \dot{X}_i(t - \frac{1}{2}\Delta t)}{\Delta t} \quad (3)$$

将式 (3) 代入式 (2), 得

$$\begin{aligned} (M_i + \frac{1}{2}C_i\Delta t)\dot{X}_i(t + \Delta t) = \\ (M_i - \frac{1}{2}C_i\Delta t)\dot{X}_i(t) + \\ \Delta t [F_i(t) - \sum_{j=1}^n K_{ij}X_j(t)] \end{aligned} \quad (4)$$

结合速度与位移的关系

$$X_i(t + \Delta t) = X_i(t) + \Delta t \dot{X}_i(t) \quad (5)$$

由式 (4) 和式 (5) 通过迭代求出模型在荷载作用下的平衡状态.

2.5 算法校核

为了验证算法程序的正确性, 分别从以下两方面对计算结果进行验证:

(1) 截面平衡 沿任意截面将模型分开, 被分开的各部分满足 $\sum F = 0, \sum M = 0$.

(2) 遵循强度准则 模型所有单元的应力状态都遵循算法采用的强度准则.

3 实验验证

以岩石材料的三点弯曲实验为对象, 测得试件在加载过程中的位移 - 荷载 ($F-u$) 曲线, 拍摄记录试件的破坏状况. 采用本文介绍的方法对实验试件进行数值模拟, 将数值模拟的结果和实验数据进行比较, 验证方法的适用性.

3.1 实验简介

实验在 MTS810 液压伺服材料试验机上进行, 试件由花岗岩加工而成, 基本尺寸为 $150\text{ mm} \times 30\text{ mm} \times 20\text{ mm}$, 支座间距 120 mm , 试件底部跨中预制有开口, 开口宽度为 3 mm (图 8), 根据试件预开口深度与截面高度比值 $\alpha = a/d$ (0.1, 0.3, 0.5) 将试件分为 3 组, 每组 3 个试件, 加载速率为 0.001 mm/s . 通过试件的实验测量和标定得到材料的弹性模量 $E = 27.4\text{ GPa}$, 抗拉强度 $f_t = 45.0\text{ MPa}$.

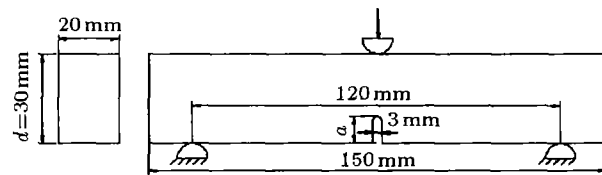
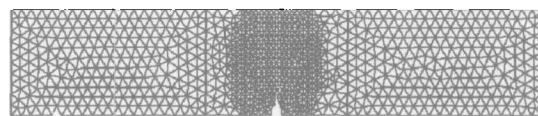


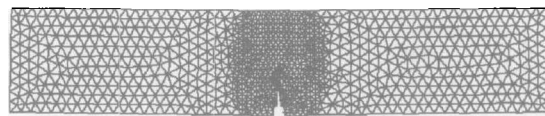
图 8 试件尺寸示意图

3.2 数值模拟

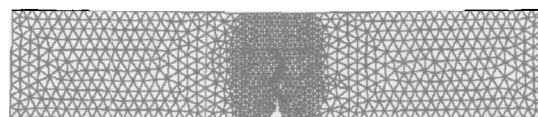
利用有限元商业软件 ANSYS 对试件进行建模并划分网格 (图 9(a)), 这里以 $\alpha = 0.1$ 试件为例, 读出节点单元信息作为算法程序的输入文件, 对破坏过程进行数值模拟, 计算结束后通过 ANSYS 进行结果显示 (图 9(b)~ 图 9(d)).



(a)

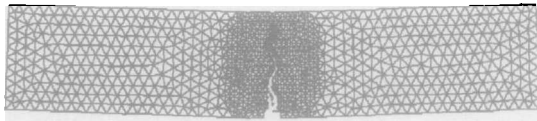


(b)



(c)

图 9 模型断裂破坏过程



(d)

图9 模型断裂破坏过程(续)

3.3 结果比较

图10,图11分别显示了实验试件的破坏情况和数值模拟的破坏结果.

图12显示的是加载破坏过程中实验记录和数值模拟得到的 $F-u$ 曲线比较.

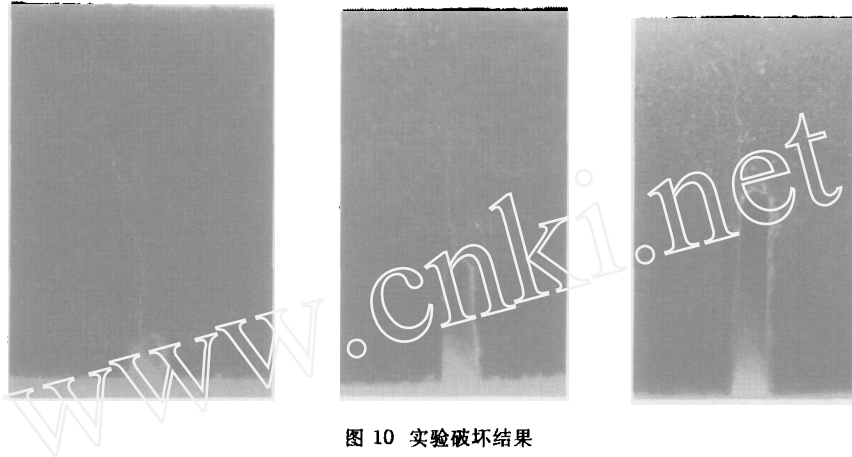


图10 实验破坏结果

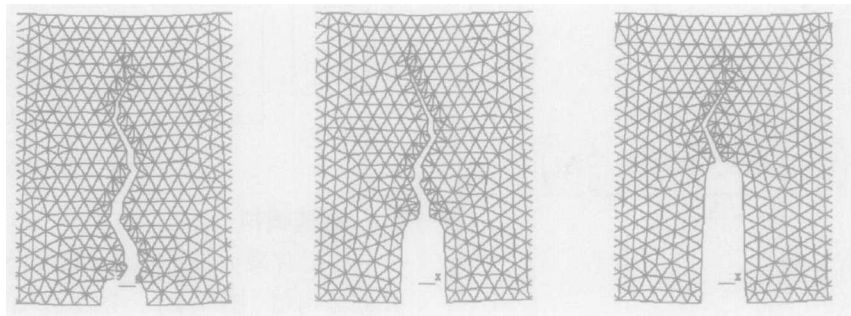
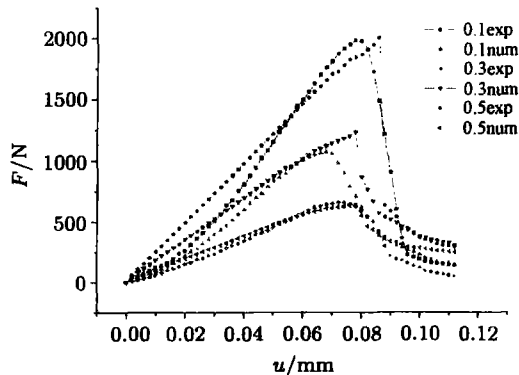


图11 数值模拟破坏结果

图12 实验与数值模拟的 $F-u$ 曲线比较

通过图12的比较可以看出,数值模拟的结果与实验结果在整体趋势上是一致的,差别主要体现在两个方面:首先,在数值算法中,由于材料采用线弹性本构模型,破坏前荷载和位移始终保持线性关系,而从实验 $F-u$ 曲线中可以看出,在加载的初始阶段,荷载与位移并不是严格的线性关系,这主要

是因为岩石材料内部存在空隙的缘故;另外,破坏发生后,与实验相比,数值模拟的 $F-u$ 曲线荷载下降速度更快,这主要是因为数值算法以脆性材料作为计算对象,而真实岩石材料具有一定的塑性.

4 总结

针对固体力学中的破坏问题,引入了一种单元分裂和界面分离技术,该方法综合考虑了界面开裂与材料本身开裂对材料整体破坏的影响,通过与实验数据的比较可以看出这种处理方法的适用性.由于求解部分采用动态松弛方法,因此需要根据网格大小选择合适的时间步长和阻尼系数,保证算法迭代的收敛性.

参考文献

- 1 Goodman RE, Taylor RL, Brekke TL. A model for the mechanics of jointed rock. *J Soil Mech Div ASCE*, 1968,

- 94(3): 637~659
- 2 Zienkiewicz OC, Best B, Dullage C, et al. Analysis of non-linear problems in rock mechanics with particular reference to jointed rock systems. In: Proceedings of the Second International Congress on Rock Mechanics, Belgrade, 1970
 - 3 Ghaboussi J, Wilson EL, Isenberg J. Finite element for rock joints and interfaces. *J Soil Mech Div ASCE*, 1973, 99(10): 833~848
 - 4 Katona MG. A simple contact-friction interface element with applications to buried culverts. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 1983, 7: 371~384
 - 5 Desai CS, Zamman MM, Lightner JG, Siriwardane HJ. Thin-layer element for interfaces and joints. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 1984, 8: 19~43
 - 6 Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal re-meshing. *Int J Numer Methods Eng*, 1999, 45: 601~620
 - 7 Belytschko T, Moës N, Usui S, et al. Arbitrary discontinuities in finite element method. *Int J Numer Methods Eng*, 2001, 50: 993~1013
 - 8 Daux C, Moës N, Dolbow J, et al. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int J Numer Methods Eng*, 2000, 48: 1741~1760
 - 9 Duarte CA, Babuska I, Oden JT. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Comput Struct*, 2000, 77: 215~232
 - 10 Duarte CA, Hamzeh ON, Kiszka JT, et al. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. *Computer Methods Appl Mech Eng*, 2001, 190: 2227~2262
 - 11 Strouboulis T, Babuska I, Copps K. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods Appl Mech Eng*, 2000, 181: 43~69
 - 12 Strouboulis T, Copps K, Babuska I. The generalized finite element method. *Computer Methods Appl Mech Eng*, 2001, 190: 4081~4193
 - 13 朱伯芳. 有限单元法原理及应用. 北京: 水利电力出版社, 1979

~~~~~

(上接第 50 页)

### 参 考 文 献

- 1 逢治宇, 陈昕, 沈世钊. 哈尔滨速滑场网壳结构静力、动力以及稳定性分析. 见: 第五届空间结构学术交流会论文集, 1990. 229~233 (Feng Zhiyu, Chen Xin, Shen Shizhao. The analysis of static, dynamic and stability about the reticulated shell structure on haerbin's speed-slip sport. In: Proceedings of the Fifth Spatial Structure Conference, 1990. 229~233 (in Chinese))
- 2 董石麟, 詹伟东. 单双层球面扁壳连续化方法非线性稳定理论临界荷载的确定. *工程力学*, 2004 (3): 6~14 (Dong Shilin, Zhan Weidong. Non-linear stability critical loads of single-layer and double-layer reticulated spherical shallow shells based on continuum analogy method. *Engineering Mechanics*, 2004 (3): 6~14 (in Chinese))
- 3 Xiao Tan, Liu Renhuai. Nonlinear bending theory of diagonal square pyramid reticulated shallow shell. *Archive of Applied Mechanics*, 2001, 22(7): 747~755
- 4 Nie Guohua. Non-linear vibration of rectangular reticulated shallow shell structures. *Archive of Applied Mechanics*, 1994, 15(6): 525~535
- 5 Liu RH, Wang F. Nonlinear dynamic buckling of symmetrically laminated cylindrically orthotropic shallow spherical shells. *Archive of Applied Mechanics*, 1998, 68: 375~384
- 6 李勇. 双层网格扁球壳的非线性稳定性及振动研究. [硕士论文]. 暨南大学, 2005 (Li Yong. Study on nonlinear stability and vibration of a double-deck reticulated shallow spherical shell. [Master Dissertation]. Jinan University, 2005 (in Chinese))
- 7 Zeeman EC. Catastrophe Theory. *Scientific American*, 1976
- 8 Posto T, Stewart IN. Catastrophe Theory Catastrophes. London: Pitman, 1978
- 9 王 璠. 剪切刚度对复合材料层合扁球壳非线性振动屈曲的影响. *强度与环境*, 2000(1): 34~41 (Wang Fan. The effect of shear rigidity on nonlinear vibration buckling of composite laminated shell shallow spherical shells. *Structure & Environment Engineering*, 2000 (1): 34~41 (in Chinese))
- 10 刘人怀, 朱金福. 夹层壳非线性理论. 机械工业出版社, 1993. 2 (Liu Renhuai, Zhu Jinfu. The nonlinear theory of interlayer shell. *Chinese Mechanics Press*, 1993. 2 (in Chinese))