

Abstract Some constitutive models for thixotropic fluids were reviewed, which included: (1) models without elasticity and yield stress; (2) models without elasticity and with yield stress; (3) viscoelastic

models.

Key words constitutive model, thixotropic fluid, structural parameter, equation of state, rate equation

四边转角约束正交异性板的临界载荷

曾晓辉 柳春图 冯 玮

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 考虑横向剪切变形的影响和四边弹性转角约束的边界条件, 给出了一种求解正交异性板临界应力的方法。弹性转角约束的极限情况就是简支和固支。应用本文给出的方法, 在几种退化的情况下, 对若干矩形板进行计算, 并与现有文献进行了比较, 结果吻合较好, 从而验证了文中给出的方法。

关键词 屈曲, 临界载荷, 正交异性板, 横向剪切变形, 弹性转角约束

在造船界, 工程师们在进行方案设计时, 通常将一些特种舰船(如航空母舰)和大型、新型船舶结构中的双层板架简化为四边弹性转角约束的正交异性矩形板。双层板架结构的弯曲刚度很大而剪切刚度相对较小, 所以应该考虑横向剪切变形。计及横向剪切变形矩形板的屈曲分析已有一些, 但就作者所见, 仅能对简支和固支等边界条件下的各向同性板进行计算^[1~4]。由于缺少合适的分析方法, 所以目前在进行双层板架的屈曲分析时, 只能不考虑横向剪切变形。

为解决这一实际问题, 本文提出在四边弹性转角约束的边界条件下(极限情况就是四边简支和固支), 考虑横向剪切变形, 且适用于正交异性板的屈曲分析方法。退化到极限情况的计算(以便与现有的解进行比较)表明, 本文给出的方法是可靠的。

1 分析方法

1.1 三个广义位移及位移函数的构造

放弃直法线假设, 计入横向剪切变形的方法较多^[5]。本文采用如下做法: 认为变形前中面的法线变形后仍为直线, 但不再正交于变形后的中面。这时板的变形由三个广义位移来描述, 即, 中面挠度 $w(x, y)$ 和板变形前中面法线的两个转角 $\theta(x, y), \phi(x, y)$ 。其中 θ

是法线在 xz 平面的转角, ϕ 是法线在 yz 平面的转角。约定 θ 从 x 轴正向向 z 轴正向转动为正, ϕ 从 y 轴正向向 z 轴正向转动为正。

以下采用能量法来求正交异性板的临界载荷。其中的关键是给出满足弹性角约束边界条件的三个广义位移函数。经过反复地分析、试算和验证, 本文构造出满足这种边界条件的下列位移函数

$$\left. \begin{array}{l} w(x, y) = bw_{mn}w_m(x)w_n(y) \\ \theta(x, y) = \theta_{mn}\theta_m(x)w_n(y) \\ \phi(x, y) = \phi_{mn}\phi_m(x)\phi_n(y) \end{array} \right\} \quad (1)$$

其中

$$w_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+G_{zm}} \left\{ \sin \frac{m\pi x}{a} + G_{zm} \left[1 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{\gamma_m} \sin \frac{\gamma_m x}{a} - \cos \frac{\gamma_m x}{a} \right] \right\} & (m \text{ 为偶数}) \\ \frac{1}{1+G_{zm}} \left\{ \sin \frac{m\pi x}{a} + G_{zm} \left[1 - \cos \frac{(m+1)\pi x}{a} \right] \right\} & (m \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (2)$$

$$\theta_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+G_{zm}} \left\{ \cos \frac{m\pi x}{a} + G_{zm} \left[\gamma_m \sin \frac{\gamma_m x}{a} - 4 \sin^2 \left(\frac{\gamma_m x}{2a} \right) \right] \right\} & (m \text{ 为偶数}) \\ \frac{1}{1+G_{zm}} \left\{ \cos \frac{m\pi x}{a} + G_{zm} \sin \frac{(m+1)\pi x}{a} \right\} & (m \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (3)$$

本文于 1999-12-29 收到。

$$G_{xm} = \begin{cases} \frac{mR}{\pi(m+1)^2} & (m \text{ 为奇数}) \\ \frac{m\pi R}{\gamma_m^2} & (m \text{ 为偶数}) \end{cases} \quad (4)$$

$w_{mn}, \theta_{mn}, \phi_{mn}$ 分别为三个位移的幅值参数; C 为给定的边界转角约束弹性常数(其含义为板端部产生单位弧度转角所需的力矩); $R = CL/D$ 为无量纲数, L 视取 x, y 为自变量分别取为板长 a 和板宽 b ; 同样, D 也取相对应的刚度值. 只要把 $w_m(x), \theta_m(x)$ 中的 m, a, x 取为相应的 n, b, y 即可得到 $w_n(y), \phi_n(y)$. γ_m 是方程 $\operatorname{tg}(\gamma_m/2) = \gamma_m/2$ 的第 m 个正实根. 容易验证, 式(1)~(4) 所给出的位移模式完全满足板的边界条件, $R \rightarrow 0$ 和 $R \rightarrow \infty$ 这两种极端情况分别对应于板的简支和固定边界条件.

1.2 临界载荷的计算

计及横向剪切的正交异性板的应变能为

$$\begin{aligned} U_0 = \frac{1}{2} \iint_A & \left[D_{11} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & 2D_{12} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + D_{33} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \\ & \left. A_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \phi \right)^2 + A_{22} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

其中 D_{ij} 和 A_{kk} 分别是弯曲和剪切刚度. 角约束变形能为

$$\begin{aligned} U_1 = \frac{1}{2} C_x \int_0^b & \left[(\theta|_{x=0})^2 + (\theta|_{x=a})^2 \right] dy + \\ \frac{1}{2} C_y \int_0^a & \left[(\phi|_{y=0})^2 + (\phi|_{y=b})^2 \right] dx \end{aligned} \quad (6)$$

外力的力函数为

$$W = \frac{1}{2} P \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (7)$$

由势能极小原理有

$$\delta(U_0 + U_1 - W) = 0 \quad (8)$$

将式(1)~式(7)代入式(8), 得到

$$\begin{aligned} & (2K_{11}\theta_{mn} + 2K_{12}\phi_{mn} + 2K_{13}w_{mn})\delta\theta_{mn} + \\ & (2K_{21}\theta_{mn} + 2K_{22}\phi_{mn} + 2K_{23}w_{mn})\delta\phi_{mn} + \\ & (2K_{31}\theta_{mn} + 2K_{32}\phi_{mn} + 2K_{33}w_{mn})\delta w_{mn} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

其中 K_{ij} 是与板的几何尺寸、刚度及下面 12 个量有关的参数

$$\begin{aligned} P_{m0} &= \int_0^a w_m^2(x) dx, \quad P_{m1} = \int_0^a \theta_m^2(x) dx \\ P_{m2} &= \int_0^a \theta_m'^2(x) dx, \quad P_m = \int_0^a \theta_m'(x) w_m(x) dx \\ Q_{m1} &= \int_0^a w_m'^2(x) dx, \quad R_{m1} = \int_0^a w_m'(x) \theta_m(x) dx \\ P_{n0} &= \int_0^b w_n^2(y) dy, \quad P_{n1} = \int_0^b \phi_n^2(y) dy \\ P_{n2} &= \int_0^b \phi_n'^2(y) dy, \quad P_n = \int_0^b \phi_n'(y) w_n(y) dy \\ Q_{n1} &= \int_0^b w_n'^2(y) dy, \quad R_{n1} = \int_0^b w_n'(y) \phi_n(y) dy \end{aligned}$$

由于 $\delta\theta_{mn}, \delta\phi_{mn}, \delta w_{mn}$ 为任意值. 要使式(9)成立必有

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{mn} \\ \phi_{mn} \\ w_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

板发生屈曲时 $\theta_{mn}, \phi_{mn}, w_{mn}$ 不全为 0, 于是令式(10)系数行列式等于 0 即可得到对应于给定的各 m, n 的特征值. 其中的最小值就是所求的临界载荷. 当然, 在此之前必须先求出 $P_{m0}, P_{m1}, P_{m2}, P_m, Q_{m1}, R_{m1}$ 和 $P_{n0}, P_{n1}, P_{n2}, P_n, Q_{n1}, R_{n1}$ 的值. 这些值与板的几何尺寸、边界约束常数、屈曲波形的半波数等量有关. 由于比较繁琐, 下面只具体给出 P_{m0} 的值.

当 m 为偶数时

$$\begin{aligned} P_{m0} = \int_0^a & w_m^2(x) dx = \\ & \left(\frac{1}{1+G_{xm}} \right)^2 \left[\frac{a}{2} + \frac{1}{3} a G_{xm}^2 + \right. \\ & \frac{2G_{xm}^2 a}{\gamma_m^3} (\gamma_m - \sin \gamma_m \cos \gamma_m) + \\ & \frac{4G_{xm} a}{m\pi} + \frac{a G_{xm}^2}{2\gamma_m} (\gamma_m + \sin \gamma_m \cos \gamma_m) + \\ & \frac{4G_{xm} m\pi a \sin \gamma_m}{\gamma_m (\gamma_m^2 - m^2 \pi^2)} + \frac{2a G_{xm}^2}{\gamma_m} \sin \gamma_m + \\ & \left. \frac{2G_{xm} m\pi a (1 - \cos \gamma_m)}{(\gamma_m^2 - m^2 \pi^2)} - \right. \\ & \left. \frac{4G_{xm}^2 a}{\gamma_m^2} (1 - \cos \gamma_m) - \frac{2G_{xm}^2 a}{\gamma_m^2} \sin^2 \gamma_m \right] \end{aligned}$$

当 m 为奇数时

$$P_{m0} = \int_0^a w_m^2(x) dx = \frac{a}{(1+G_{xm})^2} \left[\frac{3G_{xm}^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{4G_{xm}}{m\pi} + \frac{4mG_{xm}}{(2m+1)\pi} \right]$$

2 算例及分析

为验证本文方法的正确性, 将上述分析退化到四边简支和固支各向同性板的情况, 并与现有的解进行比较。

文献 [1~4] 考虑了横向剪切变形的影响, 分析了四边简支和固支各向同性板的屈曲问题。表 1 和表 2 列出了本文计算结果与文献 [1~4] 的比较, 从中可看出吻合良好。

表 1 四边简支正方形板的临界应力系数 k

b/t	本文	文献 [1]	文献 [2]	文献 [3]	文献 [4]
1000	4.00000	4.0000	4.0000	4.0625	4.025
20	3.94438	3.9444	3.911	3.9991	3.981
10	3.78645	3.7865	3.741	3.8299	3.849
6.6667	3.54958	3.5496		3.5240	3.643

表 2 四边固支正方形板的临界应力系数 k

b/t	本文	文献 [2]	文献 [1]
1000	10.6555	10.811	10.9903
20	10.2801	10.318	10.3788
10	9.2722	9.151	8.9159
6.6667	7.4913	7.692	7.1916

3 结 论

许多实际的矩形板结构的边界都是弹性转角约束的(如大型、特种船舶的双层板架)。本文给出了在这种边界条件下, 适用于正交异性矩形板, 且考虑横向剪切变形的临界载荷计算方法。将本文方法用于一些退化的情况, 对几种特定边界条件下、不同边长比和宽厚比的一系列矩形板进行了屈曲计算。与现有解(包括不考虑剪切的解和某些特定边界条件下计及剪切的

各向同性板的解)的比较表明, 本文所提出的方法是合理的、可行的。

参 考 文 献

- Rao GV, Venkataramana J, Raju KK. Stability of moderately thick rectangular plates using a high precision triangular finite element. *Comp & Struct*, 1975, 5: 257~259
- Srinivas S, Rao AK. Buckling of thick rectangular plates. *AIAA J*, 1969, 7: 1645~1646
- 罗继伟. 中厚板屈曲的平衡模型有限分析. 固体力学学报, 1983 (2): 177~185
- 华伯浩, 吴长春, 刘小玲. 模糊试解和杂交方法对厚、薄板屈曲的统一分析. 固体力学学报, 1985 (2): 160~169
- 蔡四维. 复合材料结构力学. 北京: 人民交通出版社, 1987

THE CRITICAL STRESS OF SHEAR DEFORMABLE ORTHOTROPIC PLATE WITH FOUR EDGES ELASTIC-ANGLE-CONSTRAINED

ZENG Xiaohui LIU Chuntu FENG Wei
(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences,
Beijing 100080, China)

Abstract A method for calculating the critical stress of shear deformable orthotropic plate with four edges elastic angle constrained is proposed. Simply-supported and clamped-supported are two limiting situations. With this method, critical stresses of several kinds of rectangular plates are calculated in some degenerated cases. The comparison with other references shows good agreement, which verifies this method.

Key words buckling, critical stress, orthotropic plate, transverse shear deformation, elastic angle constrained

• 编者的话 •

第四届全国周培源大学生力学竞赛已胜利结束, 并于 2000 年 11 月 5 日上午在北京清华大学逸夫科学楼举行了颁奖仪式。本期先刊登第四届全国周培源大学生力学竞赛初赛的材料力学和理论力学试题。2001 年第 1 期刊登初赛试题的答案, 获奖者和优胜团体的名单, 以及颁奖大会情况的有关文章。