

# 离散正交法(DOM)离散点的正交分析与程序设计

白象忠<sup>\*1,2</sup>, 田振国<sup>1,2</sup>

(1. 燕山大学 建筑工程与力学学院, 秦皇岛 066004;

2. 中国科学院 力学研究所 国家非线性连续介质力学重点实验室(LNM), 北京 100080)

**摘要:**对能够求解一系列线性常微分方程组边值问题的数值计算方法——离散正交法(DOM)进行了离散点的正交分析,给出了计算机实现数值计算的程序设计原理与计算流程图,指出了该方法能够克服传统计算方法由于所求函数的快速增长所引起的边界效应和局部效应的缺点,给出了得到稳定计算过程的可能性。为了推广应用,文中介绍了离散正交法的基本原理、实现方法和求解过程,讨论了采用离散正交法来求解非线性问题的处理方法。并且以承受均布载荷的环形板为例,将采用离散正交法的计算结果与经典解作了对比。

**关键词:**离散正交法;边值问题;常微分方程组;数值方法  
**中图分类号:**O441.3 **文献标识码:**A

## 1 引言

自离散正交法<sup>[1]</sup>问世以来,由于计算技术逐步发展,该法至今尚未在解决板壳非线性边值问题中得到广泛应用,在数值计算领域中,也未能充分发挥作用。众所周知,当求解板壳非线性问题时,通常采用迭代过程,迭代过程中每一步的线性边值问题都是可解的。因此,准线性化的方法是迭代过程的基础,即计算过程中的每一步都必须利用上一步的结果作为下一步的基础<sup>[2,3]</sup>。这样,作为求解一系列线性常微分方程组边值问题的数值计算方法——离散正交法(DOM),可以成为用来解决板壳非线性边值问题的一种有效的计算手段。

为了推广应用该法的计算机实施,使计算者能够正确掌握正交点的确定和计算结果的选取,顺利地根据计算目的编制出计算程序来,本文对该法进行了离散点的正交化分析;并在此基础上,给出了程序设计原理和计算流程图;指出了采用该方法,能够克服在传统计算方法中由于待求函数的快速增长所引起的边界效应和局部效应等缺点,给出了得到稳定计算过程的具体手段。为此,文中简略地介绍了离散正交法的基本原理、实现方法和求解过程;讨论了采用离散正交法求解非线性问题时的处

理方案,并且以承受均布载荷作用的环形板为例,将采用离散正交法计算的结果与经典解作了对比。

应用离散正交法不仅可以求解线性问题,亦可以求解非线性问题。对于同时含有时间变量的动力学问题,按照时间变量或者位置变量建立差分格式,仍旧可以应用离散正交法进行求解<sup>[4]</sup>。

## 2 离散正交法的基本原理

离散正交法是对一系列线性常微分方程组的边值问题进行求解的数值方法。对于一些工程问题,例如,圆盘上作用轴对称载荷的弯曲问题,圆柱壳的轴对称变形问题,都可以用常微分方程描述:

$$\frac{df}{dx} = A(x)f + q(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (1)$$

边界条件为

$$D_1 f(a) = d_1 \quad (2)$$

$$D_2 f(b) = d_2 \quad (3)$$

其中  $f = \{f_1, f_2 \dots f_n\}^T$  为  $n$  维纵向矢量,  $q = \{q_1, q_2 \dots q_n\}^T$  为  $n$  维纵向矢量微分方程的非齐次项,  $A(x)$  为  $n$  阶方阵,  $D_1$  和  $D_2$  为给定的对应于秩为  $k \times n$  和  $(n-k) \times n$  的直角矩阵,  $d_1$  和  $d_2$  为给定的矢量。对于边值问题(1)~(3),已有多种经典数值解法,例如,龙格—库塔法和阿达姆斯法<sup>[5]</sup>等。但是这些方法会由于所求函数的快速增长而引起的边界效应和局部效应,导致计算的不稳定性。而离散正交法对于在有限离散点上求解(1)~(3)所描述的边值问题,可得到稳定的计算过程。

收稿日期:2004-08-21;修改稿收到日期:2005-08-26  
基金项目:国家自然科学基金(50275128)资助项目。  
作者简介:白象忠\*(1942-),男,教授,博士生导师。



边值问题(1) ~ (3) 的解,问题的正向过程结束。

### 2.3 各离散点解的获得

欲求得问题在区间  $[a, b]$  内所有离散点处的解,关键是要得到解的常系数  $c_j^{(i)}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ )。

为此,考虑在  $[a, b]$  区间内任一离散点  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ) 处,式(10)和(11)成立,令表达式(10)和(11)两端相等有:

$$\sum_{j=1}^m c_j^{(i-1)} f_j^+(x_i) + f_{m+1}^+(x_i) = \sum_{j=1}^m c_j^{(i)} f_j^-(x_i) + f_{m+1}^-(x_i)$$

同时考虑式(9),由  $f_j$  来代替  $f_j^+$  则有:

$$\begin{aligned} c_1^{(i-1)} (f_{1,1} + c_2^{(i-1)} (f_{1,2} + c_2^{(i-1)} (f_{2,2} + \dots \\ + c_m^{(i-1)} (f_{1,m} + \dots + f_{m,m})) + \\ + 1 \cdot (f_{1,m+1} + f_{2,m+1} + \dots + \\ f_{m,m+1} + 1 \cdot f_{m+1}) = c_1^{(i)} f_{1,1} + \\ c_2^{(i)} f_{2,2} + \dots + c_m^{(i)} f_{m,m} + 1 \cdot f_{m+1} \end{aligned} \quad (15)$$

在式(15)中,令矢量  $f_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m + 1$ ) 的系数相等,得到:

$$c_j^{(i-1)} = c_j^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (16)$$

式中  $c^{(i)} = \{c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots, c_m^{(i)}\}$ 。式(16)亦可写为如下的形式:

$$c^{(i-1)} = f_j^{-1} c^{(i)} \quad (17)$$

由此,借助于式(17)的帮助,从  $i = N$  点即  $x_N$  处开始,进行反向运算,即可得到所有离散区间  $[a, b]$  上的在所有离散点处的常数  $c_j^{(i)}$  的值。按照式(11)计算可得到边值问题的解  $f(x_i)$ ,至此区间  $[a, b]$  上的所有离散点处的解全部得到。

### 3 离散点的正交分析及程序设计

在求解过程中,为了提高计算的精确性,往往会选择很多离散点,但实际上并不需要输出所有离散点处的函数值,而只是限制在一些点上输出所需要的函数值,这些点称为提供结果的点。显然,这些点要比所选的正交点少。利用下面的方法还可以有效地减少信息的存储量。设  $x_{i-1}$  和  $x_{i+j}$  为提供结果的点,由方程(13)可以得到<sup>[6]</sup>:

$$c_{i+j}^{(i+j)} \dots c_{i+j-1}^{(i+j-1)} \dots c^{(i-1)} = c^{(i+j)}$$

$$\text{或者: } \left( \prod_{k=0}^j c_{i+k}^{(i+k)} \right) c^{(i-1)} = c^{(i+j)}$$

由此得:

$$c^{(i-1)} = \left( \prod_{k=0}^j c_{i+k}^{(i+k)} \right)^{-1} c^{(i+j)} \quad (18)$$

因此,为了求得矢量  $c^{(i-1)}$ ,只须存储矩阵乘积  $\prod_{k=0}^j c_{i+k}^{(i+k)}$  的数据资料。例如,将区间  $[a, b]$  分成等长

的 100 个子区间,而只需输出 11 个点(点 0, 10, 20 ..., 100) 的计算结果即可,这样在计算过程中只需存储  $c_{k=1}^{10}, c_{k=10}^{20}, \dots, c_{k=90}^{100}$  及在各结果点处

正交化后的列向量  $f_r^+$  ( $r = 1, 2, \dots, m + 1$ ) 等数据。这时,在能够提供结果的一系列点  $x_i$  上还应该补充条件(4),则可以从表达式(11)的右边确定边界值  $f_j^+(x_i)$ ,而左侧边界值  $f_j^-(x_i)$  可以由下式得到:

$$f_j^+(x_i) = B_i f_j^-(x_i), f_{m+1}^+(x_i) = B_i f_{m+1}^-(x_i) + q_i$$

$$\text{由此有} \quad f_j^+(x_i) = \sum_{j=1}^m c_j(x_i) B_i f_j^-(x_i) + B_i f_{m+1}^-(x_i) + q_i = B_i \left( \sum_{j=1}^m c_j(x_i) f_j^-(x_i) + f_{m+1}^-(x_i) \right) + q_i$$

$$\text{即:} \quad \sum_{j=1}^m c_j(x_i) f_j^-(x_i) + f_{m+1}^-(x_i) = B_i^{-1} [f_j^+(x_i) - q_i] \quad (19)$$

至此,就可以用 FORTRAN 语言或其他计算软件编制程序进行计算。对于线性和非线性问题都可以应用离散正交法来进行求解。非线性问题的关键就是建立本文 4. 所示的迭代方程,将非线性问题转换为一系列的线性问题。在程序设计中几个核心问题分别为:边界条件的引入、初始变量的计算、选择合适的计算方法求解一系列的线性常微分方程组、正交化过程和过程数据的控制、迭代次数的控制及离散点、正交点、结果点的选择。

本文对算例描述的非线性问题编制程序,其流程如图 1 所示。采用高斯消去法计算式(13)中的初始变量,应用施密特正交化方法对计算过程变量正交化处理,选用阿达姆斯法求解一系列的线性常微分方程组。应当注意的是,具体算法的选择将影响收敛区间,从而影响计算的稳定性以及计算的精度。所以,为得到更高精度的计算结果,有时要做出一些计算时间的牺牲。至于在实际计算中的离散点、正交点、输出结果点的选取,可以根据计算精度、计算时间以及输出结果的要求进行选择。例如,若将整个计算区间划分成 300 个等长的小区间,即 301 个离散点,则可以选择 101 个正交点(即点 0, 3, 6 ..., 300),而只选取其中的 31 个点作为输出结果点(即点 0, 10, 20, ..., 300),这些都是根据具体计算要求选定的。若要求计算精度再高些,则可以将区间划分得更小,选择更多的离散点作为正交

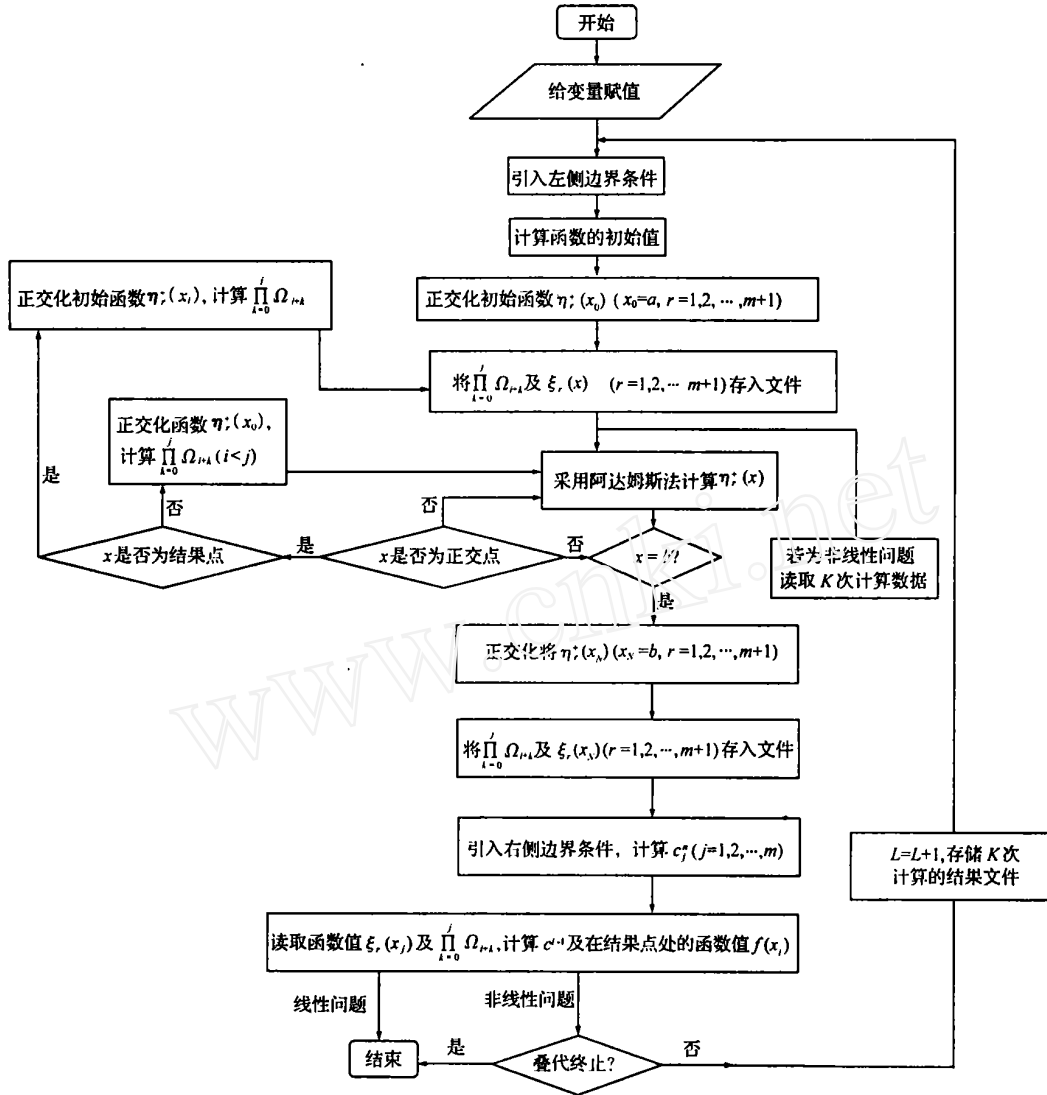


图 1 离散正交法的计算流程图  
Fig. 1 The flow chart of DOM

点,但需要付出较多的计算时间。若要求输出结果更真实地反映实际情况,则需要选取更多的正交点作为结果输出点,当然,同样要付出更多的计算时间,而且对计算机提出了更高的要求。

#### 4 应用离散正交法求解非线性问题

在实际工程中,很多问题必须应用非线性微分方程描述,当不可忽略非线性项时,若采用离散正交法来求解,则必须作如下处理:

设非线性边值问题可表示为

$$\frac{df}{dx} = F(x, f) \quad (a \leq x \leq b) \quad (20)$$

边界条件:  $D_1 f(a) = d_1, D_2 f(b) = d_2$  (21, 22)

式中  $F$  为  $n$  维矢量;  $f, D_1, D_2, d_1, d_2$  同前。设边值问题(20) ~ (22) 的近似解为  $f^{(k)}(x)$ , 这时,精确解  $f^*(x)$  可以记作下面形式:

$$f^*(x) = f^{(k)}(x) + f^*(x) \quad (23)$$

将式(23)代入式(20) ~ (22) 得

$$\frac{d}{dx}(f^{(k)} + f^*) = F(x, f^{(k)} + f^*)$$

借助于拉格朗日形式<sup>[8]</sup>

$$\frac{d}{dx}(f^{(k)} + f^*) = F(x, f^{(k)}) + (x, y^*) f^*$$

式中  $|y^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| \leq |f^*(x)|$ 。

其边界条件构成下面的形式:

$$\begin{aligned} D_1(f_0^{(k)} + f_0^{(k)})|_{x=a} &= d_1(f_0^{(k)} + f_0^{(k)}) + o(y_0^{(k)}, y_1^{(k)}) f_0^{(k)} \\ D_2(f_1^{(k)} + f_1^{(k)})|_{x=b} &= d_2(f_1^{(k)} + f_1^{(k)}) + o(y_0^{(k)}, y_1^{(k)}) f_1^{(k)} \end{aligned} \quad (24)$$

式中  $|y_0^{(k)}(x) - f_0^{(k)}(x)| \leq |f_0^{(k)}(x)|$   
 $|y_1^{(k)}(x) - f_1^{(k)}(x)| \leq |f_1^{(k)}(x)|$

设  $\mathbf{f}^{(k)}, \mathbf{f}^{(k+1)}, \mathbf{f}_0^{(k)}, \mathbf{f}_0^{(k+1)}, \mathbf{f}_l^{(k)}, \mathbf{f}_l^{(k+1)}$ 。  
由式(23)和式(24)就可以得到一个迭代过程:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}^{(k+1)}}{dx} &= \mathbf{F}(x, \mathbf{f}^{(k)}) + (x, \mathbf{f}^{(k)}) (\mathbf{f}^{(k+1)} - \mathbf{f}^{(k)}) \\ \mathbf{f}_0^{(k)}, \mathbf{f}_l^{(k)} \mathbf{f}_0^{(k+1)} &= -\mathbf{d}_1(\mathbf{f}_0^{(k)}, \mathbf{f}_l^{(k)}) + \\ &\quad \mathbf{f}_0^{(k)}, \mathbf{f}_l^{(k)} \mathbf{f}_0^{(k)} \\ \mathbf{f}_l^{(k)}, \mathbf{f}_l^{(k)} \mathbf{f}_l^{(k+1)} &= -\mathbf{d}_2(\mathbf{f}_0^{(k)}, \mathbf{f}_l^{(k)}) + \\ &\quad \mathbf{f}_l^{(k)}, \mathbf{f}_l^{(k)} \mathbf{f}_l^{(k)} \end{aligned} \quad (25)$$

得准线性迭代式为

$$\frac{d\mathbf{f}^{(k+1)}}{dx} = \mathbf{F}(x, \mathbf{f}^{(k)}) + (x, \mathbf{f}^{(k)}) (\mathbf{f}^{(k+1)} - \mathbf{f}^{(k)}) \quad (26)$$

$$D_1 \mathbf{f}^{(k+1)}(a) = \mathbf{d}_1, \quad D_2 \mathbf{f}^{(k+1)}(b) = \mathbf{d}_2 \quad (k = 0, 1, 2 \dots)$$

式中  $(x, \mathbf{f}^{(k)})$  为系统右侧部分的雅可比矩阵。至此即可应用离散正交法对其求解,在每一个离散点建立式(26)描述的迭代过程。

### 5 算例

考虑一个周边简支的环形板,如图2所示,采用极坐标描述,其基本方程为

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{1-\nu}{Eh} N_r - \frac{1}{2} \frac{w}{r}, \quad \frac{dw}{dr} = -\frac{u}{r} \\ \frac{dr}{dr} &= \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_r - \frac{u}{r} \\ \frac{dQ_r}{dr} &= -\frac{1}{r} Q_r - q_z \\ \frac{dN_r}{dr} &= -\frac{1-\nu}{r} N_r + \frac{Eh}{r^2} u - q_r \\ \frac{dM_r}{dr} &= -\frac{1-\nu}{r} M_r + Q_r + \frac{Eh^3}{12r^2} r + N_r r \end{aligned} \quad (27)$$

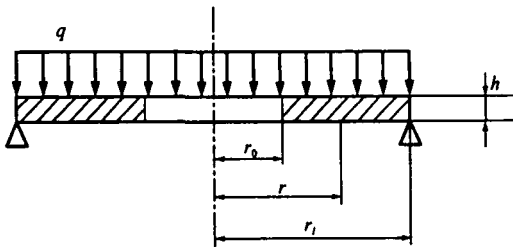


图2 作用有均布载荷的环形板  
Fig.2 The annular plate with equally distributed load

按照4节中介绍的方法建立迭代方程:

$$\begin{aligned} \frac{du_r^{(k+1)}}{dr} &= -\frac{1-\nu}{Eh} N_r^{(k+1)} - \frac{1}{2} (2 \frac{u_r^{(k+1)}}{r} - \frac{u_r^{(k)}}{r} - \frac{u_r^{(k)}}{r}) \\ \frac{dw^{(k+1)}}{dr} &= -\frac{u_r^{(k+1)}}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dr^{(k+1)}}{dr} &= \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_r^{(k+1)} - \frac{u_r^{(k+1)}}{r} \\ \frac{dN_r^{(k+1)}}{dr} &= -\frac{1-\nu}{r} N_r^{(k+1)} + \frac{Eh}{r^2} u_r^{(k+1)} - q_r \\ \frac{dQ_r^{(k+1)}}{dr} &= -\frac{1}{r} Q_r^{(k+1)} - q_z \\ \frac{dM_r^{(k+1)}}{dr} &= -\frac{1-\nu}{r} M_r^{(k+1)} + Q_r^{(k+1)} + \frac{Eh^3}{12r^2} \frac{u_r^{(k+1)}}{r} \\ &\quad + (N_r^{(k+1)} \frac{u_r^{(k)}}{r} + N_r^{(k)} \frac{u_r^{(k+1)}}{r} - N_r^{(k)} \frac{u_r^{(k)}}{r}) \end{aligned} \quad (28)$$

其边界条件为

当  $r = r_0$  时,  $N_r = 0, Q_r = 0, M_r = 0$

当  $r = r_1$  时,  $w = 0, u = 0, M_r = 0$

若环形钢板内径  $r_0 = 0.5 \text{ m}$ , 外径  $r_1 = 1.0 \text{ m}$ , 板厚  $h = 5 \text{ mm}$ , 弹性模量  $E = 210 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.24$ , 均布载荷集度  $q_z = 80 \text{ N/m}^2$ 。分别采用离散正交法和传统方法<sup>[9]</sup>的理论计算,结果如图3所示。在图3中,曲线a为理论解,曲线b为取30个离散点时的计算结果,曲线c为取100个离散点时的计算结果。最大计算误差发生在环形板内边界  $r = r_0$  处,取31个离散点时,  $< 10\%$ , 取101个离散点时,  $< 5\%$ , 若再增加离散点的个数,计算精度还会提高。

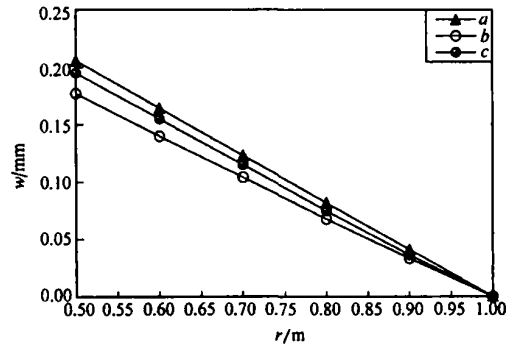


图3 w-r 曲线  
Fig.3 Curve w-r

### 6 结论

(1) 离散正交法不仅给出了得到稳定计算过程的可能性,并且可根据本文提供的方法恰当选择输出结果的点,以便减少信息存储量、减少计算时间,提高计算速度和计算的稳定性。

(2) 通过算例分析可见,离散正交法计算结果与经典理论解接近,若增加离散点,还可以提高计算精度。

(3) 应用离散正交法不仅可以求解非线性问题,亦可以求解线性问题。对于同时含有时间变量

的动力学问题或者更加复杂的二维问题,按照时间变量或者位置变量建立差分格式,仍旧可以利用离散差分法求解。

## 参考文献(References):

- [1] . . . . . [A]. . . . . [C]. 1961: . 171-174. (GODUNOV S K. Numerical solution for the boundary value problem of ordinary differential equations [A]. Mathematic Achievement [C]. Moscow. Science Press, 1961:171-174.
- [2] . . . . . [M]. . . . . 1983. (GRIGORENKO IA M, MU KOED A P. *Numerical Solution for Nonlinear Theory of Shells* [M]. Kiev: Higher Education Press, 1983.
- [3] . . . . . [A]. . . . . [C]. 1978, . 46-49. (MOLJCHEKO L V. Numerical solution of stress for geometrically nonlinear problems of current-carrying plates [A]. Report of Ukraine Academy of Sciences. Vol. A [C]. Kiev:Ukraine Academy of Sciences, 1978:46-49. (in Russian))
- [4] 田振国,白象忠,马世麟. 载流圆形薄板的磁弹性应力与变形分析[J]. 力学季刊, 2002, 23(1): 98-100. (TIAN Zhen-guo, BAI Xiang-zhong, MA Shi-lin. Analysis of magneto-elastic stress and strain in thin current-carrying circular plate[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2002, 109-114. (in Chinese))
- [5] 施妙根,顾丽珍. 科学和工程计算基础[M]. 北京:清华大学出版社,1999. (SHI Miao-gen, GUO Li-zhen. *The Computation Basis of Science and Engineering* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999. (in Chinese))
- [6] 刘丁酉. 矩阵分析[M]. 武汉:武汉大学出版社,2003. (LIU Ding-qiu. *Matrix Analysis* [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2003. (in Russian))
- [7] . . . . . [M]. . . . . 1979. (GRIGORENKO IAM, MU KOED AP. *Numerical Solution for Theory of Shells* [M]. Kiev: Higher Education Press, 1979. (in Russian))
- [8] . . . . . [M]. . . . . 1989. (MOLJCHEKO L V. *Magnetic Elasticity of Nonlinear Current-Carrying Thin Shell* [M]. Kiev: Higher Education Press, 1989. (in Russian))
- [9] 杨耀乾. 平板理论[M]. 北京:中国铁道出版社,1980. (YAN Yao-qian. *Theory of Flat Plate* [M]. Beijing: Chinese Railroad Press, 1980. (in Chinese))

## Discrete orthogonal point analysis of discrete orthogonal method and program design

BAI Xiang-zhong<sup>\*1,2</sup>, TIAN Zhen-guo<sup>1,2</sup>

(1. Institute of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;

2. The State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanical(LNM), Beijing 100080, China)

**Abstract:** The orthogonal analysis of discrete points in a numerical method, discrete orthogonal method (DOM), which can be used to solve a series of boundary value problem of ordinary differential equations, is presented in this paper. The principle of program design and the flow chart of numerical computation are shown here. It indicates that the DOM conquers the disadvantage of traditional method, which often caused boundary and local effects due to the fast increasing of the value of a function. The possibility of stable calculation is illustrated. For generalizing application, the basic principle, fulfillment method and the performance progress of DOM are introduced. The treatment to solve non-linearly problem with DOM is discussed. An example of an annular plate applied equally distributed load is presented, and the calculation results obtained by DOM and traditional method respectively are compared.

**Key words:** discrete orthogonal method; boundary value problem; ordinary differential equation; numerical method.