

有限弹塑性变形的几何模型¹⁾

宋 凡 孙 毅[†] 王 铎[‡]

(中国科学院力学研究所, LNM 开放实验室, 北京 100080)

[†](哈尔滨工业大学航天工程与力学系, 哈尔滨 150001)

摘要 以连续介质力学内变量理论为基础, 建立了一个以材料内部微结构变量为底流形, 材料外部变形状态为对应纤维的材料状态纤维丛模型, 使材料的力学特性与模型的几何性质自然对应起来. 在模型上讨论和分析了有限弹塑性变形中变形梯度的 Lee 和 Clifton 的分解和联系, 并证明了塑性变形为沿内变量演化在纤维丛的水平空间的运动. 由此获得了塑性变形随内变量演化的变化方程和塑性速率梯度与内变演化的协调关系.

关键词 状态纤维丛, 有限弹塑性变形, 内变量理论

引 言

材料的有限弹塑性变形与材料内部微结构及其演化是紧密联系的, 对它们的研究不仅涉及到固体力学、材料力学以及固体物理学等多种学科间的相互交叉和渗透, 而且需要从不同层次(宏观、细观、微观等)用不同的研究方法对材料进行更全面细致的理论分析和实验检验, 这样才有利于对材料认识的进一步深化. 因此将现代数学方法应用到材料科学的研究中是值得探索的.

现有的含微结构材料的力学研究中, 连续介质力学的唯象理论具有比较简明和易于应用的优点. 然而在不可逆连续介质热力学理论的框架范围内, 如何选取反映材料内部微结构状态的内变量, 如何正确地给出包含这类内变量及其演化规律的材料本构关系成为材料内变量理论所要解决的最根本问题. 通常处理这个问题的方法是先将表征材料微结构的内变量和材料宏观状态分别加以描述和研究, 然后采用适当的方法(如自洽方法等)将所获材料宏、细(或微)观性能连接起来. 显然, 在这种方法的使用中必然导致材料某些特征量的损失, 从而影响到材料真实性能的反映. 因此, 研究材料的宏观、细观和微观能够被同时描述和分析的数学模型和方法对研究材料的不同层次的性能是极为有利的.

在现有的连续介质力学研究含微结构材料的方法中, 就其数学手段而言, 一般以经典的张量分析为主, 尽管也有一些现代数学方法的应用, 但基本上限于一些特殊材料问题的形式处理. 与现代物理学规范场理论的应用类似, 微分几何学中的纤维丛理论所特有的联系和处理不同几何空间和不同空间几何量的方法, 为连续介质力学能够同时描述和研究含微结构材料的不同层次特征和相互联系提供了可行的数学方法. 本文正是有关这方面研究的尝试.

在本文中我们假设在材料的变形过程中, 塑性变形完全是由于材料内部微结构的变化所致, 因此材料的塑性变形可完全由内变量及演化唯一确定. 在这个假设条件下, 本文将材料在

1997-04-06 收到第一稿, 1998-07-21 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金, 国家教委回国人员基金和黑龙江省自然科学基金资助项目.

整个变形过程中的状态划分为表征材料微结构的内变量状态和外部变形状态两类，建立了一个以内变量为底流形，对应的外部变形状态为纤维的材料状态纤维丛模型。利用丛上的垂直线性和水平非线性的几何特征，将材料外部变形状态进一步分解为弹性变形状态和塑性变形状态，并分别与丛的这两类结构相对应，由此获得了材料的这两种变形在纤维丛上的几何特性，从而分析和讨论了有限弹塑性变形中变形梯度的 Lee 和 Clifton 分解在模型上的对应情况。通过与连续介质力学结果的比较，证明了塑性变形是随内变量演化在丛上的水平空间中运动，并获得了塑性变形随内变量演化的变化方程，同时也得到了塑性速率梯度与内变量演化间的协调关系。

1 材料状态的纤维丛结构及性质

在载荷作用下，假设材料变形过程中任意时刻的状态可用两类连续可微的力学量进行描述。一类为表征材料微结构的内部状态量；另一类为表征材料变形的外部状态量。它们一起构成了材料的状态空间。

进一步假设材料变形过程中所有可能的内部状态的集合构成一个模空间为 R^n 的光滑流形 B ，即在 B 上任意取一点 x 它代表了材料变形过程中与某一时间对应的内部微结构的状态。设 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 为内部状态流形 B 上的一个 C^∞ 相容图册 $\alpha \in I$ ， I 为自然指标集合，对任意的 $x \in U_\alpha$ ，其坐标为

$$\varphi_\alpha(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \stackrel{\text{def}}{=} (x^\mu) \quad (1.1)$$

其中 $x^\mu \in R$ ， $(x^\mu) \in R^n$ ， $\mu = 1, 2, \dots, n$ ，为以下运用方便，(1.1) 简记为

$$x = (x^\mu) \quad (1.2)$$

设与流形上某一内部状态 $x \in B$ 相对应的一切可能的材料变形状态的集合为 S_x 它们构成了光滑的子流形。若将 S_x 作为流形 B 上 x 点处的纤维，则材料变形过程中的一切可能的外部变形状态 $S = \bigcup_{x \in B} S_x$ 构成一个内部状态为底流形 B ，以对应的材料变形状态为纤维的状态纤维丛。设其正则丛投影为

$$\left. \begin{aligned} \pi : S &\rightarrow B \\ p &\rightarrow x = \pi(p) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

其中 $p \in S$ ， $x \in B$ 。

在本文中我们假设：在材料变形过程中，变形的塑性部分完全由材料内变量变化所引起，并且可由当时的材料内变量及相关物理量唯一确定，因此对给定的某一内部状态 $x \in B$ ，在对应的纤维 S_x 中，所有元素的塑性变形部分是相同的，并且若 $x = (x^\mu)$ 非零， S_x 中元素的塑性也不为零。

若取内部状态 $x \in B$ 所对应的变形状态流形 S_x 为材料变形梯度所构成，则 S_x 中的每一个元素均为一个非奇异的二阶张量，由纤维丛理论可知，丛 S 的结构群 G 应为一般线性群 $GL(3, R)$ ，显然它与 B 上每一点 x 的纤维 S_x 同构，因此材料状态流形是一个主纤维丛。

设从 S 的 C^∞ 相容坐标图册为 $(U_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)$ ， $\alpha \in I$ 。对任意的 $\tilde{p} \in S_{U_\alpha}$ ，

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_\alpha : S_{U_\alpha} &\rightarrow U_\alpha \times G \\ \tilde{p} &\rightarrow (x, F) = \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{p}) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

其中 $x = \pi(\tilde{p}) \in U_\alpha$, $F = (F_j^i) \in G$, $i, j = 1, 2, 3$, F_j^i 表示 \tilde{p} 点的纤维坐标, 即材料的变形梯度. 由纤维丛的局部平凡性, 任意的 $\tilde{p} \in S_{U_\alpha}$, 均可表示为

$$\tilde{p} = (x, p) \quad (1.5)$$

这里 $x = \pi(\tilde{p}) \in U_\alpha$, $p \in S_x$, 因此对某一纤维上的点 $p \in S_x$ 在 G 与 S_x 的同构下, G 中有一元素 F 与点 p 对应, 其坐标简记为

$$p \stackrel{\text{def}}{=} F = (F_j^i) \quad (1.6)$$

在丛 S 中, 对同一纤维上的任意两点 $p_1^*, p_2^* \in S_x$, 存在一个元素 $g \in G$, 使得

$$p_2^* = R_g p_1^* = p_1^* g \quad (1.7)$$

其中 R_g 表示 g 在 S_x 的右作用, 对应地在 G 上有

$$F_2 = \tilde{R}_g F_1 = F_1 \tilde{g} \quad (1.8)$$

这里 F_1, F_2 分别为 p_1^*, p_2^* 在 S_x 到 G 上的同构映射的像, \tilde{R}_g 为与 R_g 对应的在 G 中的右作用.

因为结构群 G 为非奇异矩阵构成, 所以在 G 中存在一个元素 $\tilde{h} \in G$, 使得 \tilde{h} 的左作用 \tilde{L}_h 与元素的右作用 \tilde{R}_g 等价, 即 (1.8) 等价于

$$F_2 = \tilde{L}_h F_1 = \tilde{h} F_1 \quad (1.9)$$

对应地在纤维 S_x 上 $h \in G$ 和左作用 L_h 使得方程

$$p_2^* = L_h p_1^* = h p_1^* \quad (1.10)$$

与方程 (1.7) 等价.

对于在底流形 B 上与任意内部状态 x 相对应的纤维 S_x 中的任意一点 p , 其对应的变形梯度 F 的塑性部分 F^p 在 S_x 中是不变的, 变化的是弹性部分 F^e , 因此 S_x 中沿纤维方向的变化仅是由 F^e 变化引起. 这与纤维丛中沿纤维方向是线性结构的几何特征相吻合. 由纤维丛理论可知在不同纤维间的变化是非线性的, 由 F^p 的非线性性可推断 F 和 F^p 应反映为丛 S 上在纤维间的变化. 由此我们可以将材料的这几类变形均定义为丛 S 上的映射.

设与初始内部状态 $x_0 \in B$ 相对应的某一材料变形状态为 $p_0 \in S_{x_0}$, 在变形梯度 F 作用下达到与内部状态 $x \in B$ 相对应的某一变形状态 $p_2 \in S_x$,

$$\left. \begin{aligned} F : S_{x_0} &\rightarrow S_x \\ p_0 &\rightarrow p_2 = F(p_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

其中 $\pi(p_0) = x_0$, $\pi(p_2) = x$, $F(p_0) = (F_j^i)_{p_0}$ 为状态 p_0 对应的变形梯度.

在定义弹性变形 F^e 和塑性变形 F^p 之前, 先将状态丛 S 分解为由与底流形 B 平行的层状子流形的集合 $\{B_i\}$ 构成, 即 $S = \bigcup_{i \in I} B_i$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, ($i \neq j$). 对任意的 $i \in I$, B_i 平行于 B , 其中 \emptyset 为空集. 如图 1 所示. 这样由上述分析弹性变形度 F^e 可定义为丛 S 中在相同纤维的不同层间的映射

$$\left. \begin{aligned} F^e : S_x \cap B_i &\rightarrow S_x \cap B_j \quad (i \neq j) \\ p_1 &\rightarrow p_2 = F^e(p_1) \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

其中 $\pi(p_1) = \pi(p_2) = x$ 为 B 上任意一点；塑性变形梯度 F^P 可定义为从 S 中在相同层内的不同纤维间的映射，即

$$\left. \begin{aligned} F^P : S_{x_0} \cap B_i &\rightarrow S_x \cap B_i \\ p_0 \rightarrow p_1 &= F^P(p_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

其中 $\pi(p_0) = x_0, \pi(p_1) = x$. 这里我们将塑性变形 F^P 定义为在从 S 中纤维间的水平映射，其合理性将在下节由此所获得结论与连续介质力学的结果的一致性所证明.

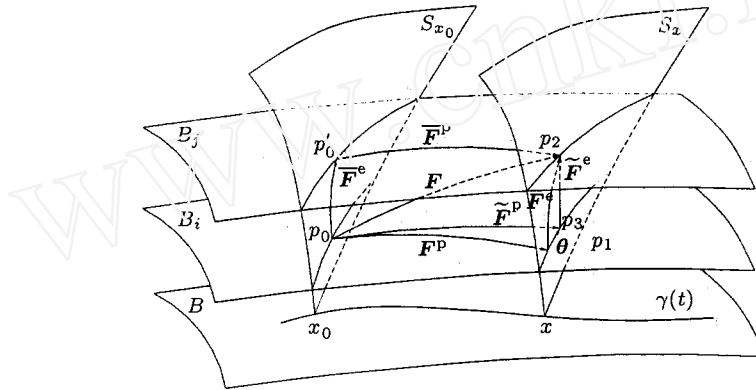


图 1 材料状态纤维丛和丛上映射间的关系

Fig.1 Fiber bundle of material states and the relations of mappings on the bundle

在映射 (1.12) 中，若取 $i = j$ ，则 (1.12) 表示了从 S 中的在相同纤维和相同层状子流形 B_i 上的一个映射，它既不代表弹性变形，也不代表塑性变形，因此在材料运动中只能是刚性运动。由于 S_x 与 G 同构，即任意纤维上的点均为一个非奇异二阶张量，由此可知若 $i = j$ 映射 (1.12) 只能是一个刚性转动，即

$$\left. \begin{aligned} \theta : S_x \cap B_i &\rightarrow S_x \cap B_i \\ p_1 \rightarrow p_3 &= \theta(p_1) \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

并且满足

$$\theta^T = \theta^{-1} \quad (1.15)$$

其中 $\pi(p_1) = \theta(p_2) = x$, θ^T 和 θ^{-1} 分别表示 θ 的转置和逆映射.

这样在状态丛 S 上就定义了弹性、塑性、刚性及它们的复合运动. 其作用如图所示. 在方程 (1.10) 中，左作用 L_h 现在就是定义 (1.12) 中的弹性变形或定义 (1.14) 中的刚性转动，下面就这两种情况分别进行讨论.

因为方程 (1.10) 中的 $p_1^*, p_2^* \in S_x$ 是任意的，首先假设它们满足定义 (1.12)，即 $p_1^* \in B_i, p_2^* \in B_j, i \neq j$ ，则这时左作用 L_h 与弹性变形 F^e 相同，将映射 (1.11), (1.12) 和 (1.13) 代入 (1.10)，注意到这时分别与定义中的 p_1, p_2 相对应，得

$$F(p_0) = F^e F^P(p_0) \quad (1.16)$$

即

$$F = F^e F^P \quad (1.17)$$

这就是有限弹塑性分析中变形梯度的 E.H. Lee 的分解.

其次若 (1.10) 方程中 $p_1^*, p_2^* \in B_i$, 则左作用 L_h 成为定义 (1.14) 中的刚性转动 θ , 这时 $p_2^* = p_3, p_1^* = p_1$. 因为 p_0 也在 B_i 上, 因此 p_0 到 p_3 的映射相当于定义了另一个塑性变形 \tilde{F}^p , 即

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}^p : S_{x_0} \cap B_i &\rightarrow S_x \cap B_i \\ p_0 &\rightarrow p_3 = p_2^* = \tilde{F}^p(p_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

将映射 (1.13) 和 (1.18) 代入 (1.14), 得

$$\tilde{F}^F = \theta \cdot F^p \quad (1.19)$$

而将 $p_3 \in B_i$ 作用到 $p_2 \in B_j$ 相当于定义了另一个弹性变形 \tilde{F}^e , 即

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}^e : S_x \cap B_i &\rightarrow S_x \cap B_j \quad (i \neq j) \\ p_3 &\rightarrow p_2 = \tilde{F}^e(p_3) \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

注意到刚性转动 θ 的转置 θ^T 的作用

$$\left. \begin{aligned} \theta^T : S_x \cap B_i &\rightarrow S_x \cap B_i \\ p_3 &\rightarrow p_1 = \theta^T(p_3) \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

将 (1.20), (1.21) 代入 (1.12), 得

$$\tilde{F}^e = F^e \cdot \theta^T \quad (1.22)$$

因此由 (1.19), (1.22), 并注意 (1.15) 得

$$F^e F^p = (\tilde{F}^e \cdot \theta)(\theta^T \cdot \tilde{F}^p) = \tilde{F}^e \tilde{F}^p \quad (1.23)$$

显然方程 (1.23) 反映了 Lee 分解 (1.17) 的不唯一性, 并且各种分解中其因子间仅相差一个由 (1.14) 所定义的刚性转动.

另一方面在与初始内部状态 $x_0 \in B$ 所对应的纤维 S_{x_0} 上取弹性变形

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}^e : S_{x_0} \cap B_i &\rightarrow S_{x_0} \cap B_j \quad (i \neq j) \\ p_0 &\rightarrow p'_0 = \bar{F}^e(p_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

在层 B_j 中取塑性变形

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}^p : S_{x_0} \cap B_j &\rightarrow S_x \cap B_j \\ p'_0 &\rightarrow p_2 = \bar{F}^p(p'_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

其中 $\pi(p_0) = \pi(p'_0) = x_0, \pi(p_2) = x$. 将映射 (1.11), (1.24) 代入 (1.25) 中, 得

$$F = \bar{F}^p \cdot \bar{F}^e \quad (1.26)$$

方程 (1.26) 就是变形梯度的 R.J. Clifton 的分解模型. 对分解 (1.26) 也可以作与分解 (1.17) 相类似的讨论. 有关这两种分解的更详细的讨论 (如文献 [1]~[3]), 同样可以作为状态丛 S 的几何特征被给出.

由以上论述可以看出,材料的力学性质与状态纤维丛上的几何性质有着十分自然的对应关系,因此通过对材料状态纤维丛的几何性质的研究而获得材料力学特征的方法是可行的,并具有几何直观性.

2 塑性变形演化方程

假设材料内变量的演化方程为

$$\dot{x}^\mu(t) = \Phi^\mu(x, \tau) \quad (2.1)$$

其中 $\tau = \tau(t)$ 为第一类 Piola-Kirchhoff 应力, 在方程 (2.1) 中 τ 被视为参变量, t 为时间, $\mu = 1, 2, \dots, n$. 其积分曲线为底流形 B 上的一光滑曲线

$$x = \gamma(t) = (x^\mu(t)) \quad (2.2)$$

$(x^\mu(t)) \in R^n$, $\dot{x}^\mu(t) = dx^\mu/dt$ 为 $x(t)$ 的变化率.

设材料对应于内变量演化曲线 (2.2) 在状态丛 S 中的变形曲线为

$$p = \tilde{\gamma}(t) = (x^\mu(t), F_j^i(t)) \quad (2.3)$$

其切向量为

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}^\mu(t) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \dot{F}_j^i(t) \frac{\partial}{\partial F_j^i} \quad (2.4)$$

其中 $F_j^i(t) \in G$ 为对应于内部状态 x 的材料变形梯度, $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 为 $x \in B$ 点的自然标架, $\frac{\partial}{\partial F_j^i}$ 为 $\tilde{p} \in S_x$ 点的自然标架. 它们的组合构成了 $p = (x, \tilde{p}) \in S$ 点的自然标架, 并且方程 (2.3) 满足 $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$, 这里 π 为 (1.3) 定义的正则丛投影. 方程 (2.4) 及以下所有方程均服从 Einstein 求和约定, 不再说明.

在纤维丛 S 上, 对于任意一点 $p \in S$, 其切空间 $T_p S$ 可分解为垂直向量空间 $V_p S$ 与水平向量空间 $H_p S$ 之和, 即

$$T_p S = V_p S \oplus H_p S \quad (2.5)$$

对于 $T_p S$ 中的切向量 \dot{F} 在与丛 S 相对应的切丛 TS 的坐标图中, 其中坐标表达形式为

$$\dot{F} = \alpha_j^i \frac{\partial}{\partial F_j^i} + \beta^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + C_{\mu j}^i \frac{\partial}{\partial F_j^i} \right) \quad (2.6)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial F_j^i}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x^\mu} + C_{\mu j}^i \frac{\partial}{\partial F_j^i}$ 分别为 $V_p S$ 和 $H_p S$ 的基向量, $C_{\mu j}^i$ 为主纤维丛 S 上的联络形式 ω 所确定的系数, α_j^i, β^μ 分别表示向量 \dot{F} 在 $V_p S$ 和 $H_p S$ 的分量.

因为对于曲线 (2.2) 上的任意点 x 所对应的纤维 S_x 中的点 $p \in S$, 其切向量 \dot{F} 在空间 $V_p S$ 中的分量表示了沿纤维 S_x 的变化率, 由上节的分析可知它对应着弹性变形梯度的变化, 而在空间 $H_p S$ 的分量则对应材料塑性变形梯度的变化.

由上节方程 (1.17), 得

$$\dot{F} = \dot{F}^e F^p + F^e \dot{F}^p \quad (2.7)$$

由上面的讨论可知 $\dot{F}^e F^p \in V_p S$, $F^e \dot{F}^p \in H_p S$, 比较方程 (2.6) 和 (2.7) 得到

$$\dot{F}^e F^p = \alpha_j^i \frac{\partial}{\partial F_j^i} \quad (2.8)$$

和

$$F^e \dot{F}^p = \beta^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + C_{\mu j}^i \frac{\partial}{\partial F_j^i} \right) \quad (2.9)$$

对于从 S 中的材料变形曲线 (2.3), 若将它取作内变量演化曲线 (2.2) 的水平提升, 则其切向量应在水平向量空间 $H_p S$ 中, 因此它仅表示了 F 的塑性变化 $F^p \dot{F}^p$, 这样方程 (2.4) 变为

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + (F^e \dot{F}^p)_j^i \frac{\partial}{\partial F_j^i} \quad (2.10)$$

因为方程 (2.9) 和 (2.10) 仅为水平空间 $H_p S$ 中在同一点 p 处的切向量 \dot{F} 的不同表示, 因此

$$\beta^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + C_{\mu j}^i \frac{\partial}{\partial F_j^i} \right) = \dot{x}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + (F^e \dot{F}^p)_j^i \frac{\partial}{\partial F_j^i} \quad (2.11)$$

即

$$\dot{x}^\mu = \beta^\mu \quad (2.12)$$

$$(F^e \dot{F}^p)_j^i = \beta^\mu C_{\mu j}^i \quad (2.13)$$

为确定系数, 取从 S 上的联络形式在坐标图中为

$$\omega = (F_j^i)^{-1} dF_j^i + (F_j^i)^{-1} A_\mu^\alpha(x) (E_a)_j^k dx^\mu F_k^i \quad (2.14)$$

其中 $A_\mu^\alpha(x)$ 为相关水平空间 $H_p S$ 的联络, E_a 为结构群 G 的李代数的基向量. 由纤维丛理论, 对任意向量 $\dot{F} \in T_p S$, 有

$$\langle \omega, \dot{F} \rangle = (F_j^i)^{-1} (\alpha_j^i + \beta^\mu C_{\mu j}^i) + (F_j^i)^{-1} A_\mu^\alpha(x) (E_a)_j^k F_k^i \beta^\mu \quad (2.15)$$

上面方程中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为从 S 上的内积, 并用到了方程 (2.6) 和 (2.14). 若取 $\dot{F} \in H_p S$, 则方程 (2.15) 为零, 因此在 (2.15) 中令 $\alpha_j^i = 0$, 则 (2.15) 为

$$(F_j^i)^{-1} \beta^\mu C_{\mu j}^i + (F_j^i)^{-1} A_\mu^\alpha(x) (E_a)_j^k F_k^i \beta^\mu = 0 \quad (2.16)$$

即

$$C_{\mu j}^i = -A_\mu^\alpha(x) (E_a)_j^k F_k^i \quad (2.17)$$

这样就获得了系数 $C_{\mu j}^i$, 注意到方程 (1.17), (2.1) 和 (2.12), 将 (2.17) 代入 (2.13), 得

$$(F^e \dot{F}^p)_j^i + A_\mu^\alpha(x) (E_a)_j^k (F^e \dot{F}^p)_k^i \beta^\mu = 0 \quad (2.18)$$

消去弹性变形 F^e , 得到

$$(\dot{F}^p)_j^i + A_\mu^\alpha(x) (E_a)_j^k \beta^\mu (F^p)_k^i = 0 \quad (2.19)$$

方程 (2.19) 就是材料塑性变形梯度 F^P 随内变量演化 (2.1) 的变化方程. 其中 $A_\mu^\alpha(x)$ 可以由材料的热力学自由能给出, 即由材料的自由能可获得底流形 B 的度量, 从而获得联络系数 $A_\mu^\alpha(x)$.

在上节的讨论和本节方程推导中, 均用到塑性变形 F^P 在平行于底流形的水平空间中变化这一假设. 为证明其合理性, 在方程 (2.19) 两边同乘, $(F^P)^{-1}_i$ 得

$$(L^P)^i_i = -A_\mu^\alpha(x)(E_\alpha)_j^k (F^P)^i_k (F^P)^{-1}_{j\dot{x}^\mu} \quad (2.20)$$

其中

$$L^P = \dot{F}^P (F^P)^{-1} \quad (2.21)$$

为材料的塑性速率梯度, $(F^P)^{-1}$ 为塑性变形 F^P 的逆.

由方程 (2.20) 可知, 材料塑性速率梯度与内部状态演化率呈一次齐次关系, 这与连续介质力学的有关结论完全一致^[4,5], 由此证明本文对塑性变形定义的合理性.

在连续介质力学中 L^P 和 \dot{x} 的函数形式很难确定, 一般由实验给出^[4]. 因此方程 (2.20) 实际上给出了它们间的一个协调关系.

本节的方程推导是按 Lee 的分解进行的, 若取 Clifton 的分解模型, 可得到完全一致的结论.

3 讨 论

本文建立了一个材料变形状态的纤维丛型, 并讨论了有限弹塑性变形梯度的 Lee 和 Clifton 的分解与本文模型的几何结构间的对应关系, 证明了塑性变形在模型中是水平变化的, 由此获得了塑性变形随内变量演化的变化方程以及塑性速率梯度与内变量演化的协调关系.

本文内容及方法还可以做进一步扩展:

1) 考查本模型中丛空间的对偶空间, 即材料的应力状态空间, 若仍以内部状态为其底流形, 则同一内部状态上的两条纤维间的相互关系就是材料的本构关系.

2) 随着内变量的演化, 材料状态在内变量演化到某一值上可能产生突变或分叉现象^[7], 在本文模型上可以运用 Morse 理论或相关的分叉理论进行研究.

参 考 文 献

- 1 Rice JR. Inelastic constitutive relations for solids: An internal variable theory and its application to metal plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1971, 19(6): 433~455
- 2 Clifton R.J. On the equivalence of $F^P F^e$ and $F^e F^P$. *J Appl Mech*, 1972, 39: 287~289
- 3 黄筑平, 段祝平. 有限弹塑性变形中应变及应变率的分解. 力学进展, 1990, 20(1): 24~39 (Huang Zhuping, Duan Zhuping. On the decomposition of strain and strain rate in finite elasto-plastic theory. *Advances in Mechanics*, 1990, 20(1): 24~39 (in Chinese))
- 4 黄克智. 非线性连续介质力学. 北京: 清华大学出版社, 1989. 439~479 (Hwang Kehchih. *Nonlinear Continuum Mechanics*. Beijing: Tsinghua University Press, 1989. 439~479 (in Chinese))
- 5 匡震邦. 非线性连续介质力学基础. 西安: 西安交通大学出版社, 1989 (Kuang Zhenbang. *Introduction for Nonlinear Continuum Mechanics*. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1989 (in Chinese))
- 6 Saxce GD, Huang ND. The geometric nature of plasticity laws. *Eng Frac Meah*, 1985, 21(4): 781~798
- 7 夏蒙芬, 韩闻生, 柯孚久, 白以龙. 统计细观损伤力学和损伤演化诱致突变. 力学进展, 1995, 23: 1~40, 145~173 (Xia Mengfen, Han Wensheng, Ke Fujiu and Bai Yilong. Statistical meso-scopic damage mechanics and damage evolution induced catastrophe. *Advances in Mechanics*, 1995, 23: 1~40, 145~173 (in Chinese))

A GEOMETRICAL MODEL FOR FINITE ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION¹⁾

Song Fan Sun Yi[†] Wang Duo[†]

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

[†] (Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract In this paper, based on theory of internal state variables in continuum mechanics, a fibre bundle model of material states are presented. First of all, the states of material are divided into the internal microstructural states and the external deformation states. Assuming that the plastic deformation of material can be given by the internal states of material and their evolution laws, a principal fibre bundle structure and the correspondent relationships between the geometrical characterization and the mechanical properties of the structure are obtained. In the structure the states of material internal microstructure are taken as the base manifold and the states of the material deformation as the fibres over the base. Then the Lee's and the Clifton's decomposition for finite elasto-plastic deformation are described and discussed on the model. It is shown that elastic deformation is a vertical motion over the same fiber and the plastic one is a kind of level motion along the direction of evolution of internal variables on the bundle. Finally, the equation of the level motion is given on the model.

Key words the fibre bundle of states, finite elastic-plastic deformation, the theory of internal variables

Received 6 April 1997, revised 21 July 1998.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China and Foundation of the State Education Commission of China and National Natural Science of Heilongjiang Province.