特征向量导数计算的简单动柔度法

刘 俊 张德文

(中国科学院力学研究所) (北京强度环境研究所)

文摘 在计算很多特征向量导数时,以 Nelson 法为代表的直接法都显出效率低下,第二作者为此发展了直接法的一个分支——动柔度法。本文虽是动柔度法的继续,但就非重特征值情况而言,它是一种最好的动柔度法,因为它像 Fox 法一样,"一步求解"便可获得通解,然而它又不存在 Fox 法的缺点——支配方程的系数阵为满阵,所以说,在计算很多非重特征值的特征向量导数时,简单动柔度法不仅在计算步骤上比 Nelson 法简单,而且在计算时间上成倍地减少。

主题词 模态分析 向量运算 模态参数 动态灵敏度

1 引言

本文是文[1]的进一步发展。文[1]的动柔度法是为了解决特征向量导数中的直接法[2~8],在计算许多特征向量导数时,效率低下而提出的。例如,一个非重特征值 λ_s 的特征向量导数 φ_s' 的支配方程为[2,3]

$$(K - \lambda_s M)\varphi_s' = \lambda_s' M\varphi_s - (K' - \lambda_s M')\varphi_s \equiv g \tag{1}$$

式中 φ_s 为 λ_s 相应的特征向量,而 λ_s' 为 λ_s 的导数,且由下式计算[2]

$$\lambda_s' = \varphi_s^T (K' - \lambda_s M')\varphi_s \tag{2}$$

式(2)是根据式(1)有解的充要条件 $\varphi_s^T g = 0$ 导出的。由于 $\varphi_s^T g \equiv 0$ 存在,故式(1)确实是有解的,这些"解的存在"问题早被学者们解决了,不再赘述。显然,式(1)的系数阵奇异,故有无穷多个解,文[3～8]中的直接法就是先对式(1)的系数阵采取各种办法,直接消除其奇异性,从而求得无限个特解中的一个 v,然后构造通解为[3]

$$\varphi_s' = v + c\varphi_s \tag{3}$$

式中 c 为特定常数。φ_s 的质量归一条件 $\varphi_s^T M\varphi_s = 1$ 的导数式为

$$\varphi_s^T M\varphi_s' = -0.5\varphi_s^T M'\varphi_s \tag{4}$$

将式(3)代入式(4)便得待定常数

刘俊,男,1974 年 6 月生,硕士学位研究生,(10008)北京市中关村中国科学院力学研究所。

收稿日期:初稿 99-01-18,修改稿 99-03-26

$$c = -0.5\varphi_s^{\mathrm{T}} M' \varphi_s - \varphi_s^{\mathrm{T}} M v \tag{5}$$

由上述可见，式(1)的系数阵为λ_s的函数，故在消除其奇异性后，实现求解式(1)时，对不同λ_s就要重新分解其系数阵一次，这样耗费的计算时间太大。为此，文[1]发展了一种动柔度法，该方法的支配方程系数阵K(刚度阵)不为λ_s的函数，将K分解一次便可以计算任意个特征向量导数，故在计算很多(至少2个以上)特征向量导数的前提下，文[1]动柔度法的计算效率明显高于其它直接法[2~8]。

动柔度法[1,10,11]本质上仍属于直接法，因为它也要求先对式(1)之系数阵的奇异性进行直接消除。文[1]是采用文[8]的扰动技术消除奇异性的，从原理上讲，这便引入了扰动带来的"近似性"[9]；为了避免这种近似性，文[10,11]便利用一种过渡技术消除其奇异性，从而引出过渡动柔度法，这种方法虽不存在扰动近似性，但它要求先计算过渡特解，然后才求得真正特解。另外，不论是扰动动柔度法，还是过渡动柔度法，都像文[3～8]的直接法一样，需要先求特解v，然后仿照式(3)～(5)求通解，即两步求解法。

本文提出的简单动柔度法与扰动动柔度法[1]和过渡动柔度法[10,11]相比，又前进了一步，它不仅具有这两种动柔度法的优点——适用于很多特征向量导数计算，而且还克服了这两种方法的所有缺点，更甚者的是，它还不要求先计算特解，再求通解的"两步求解"过程，而是"一步求解"便获得通解，这一点类似Fox法[2]，但它又不具有Fox法的缺点。一个数值例题的结果表明，简单动柔度法是非常有效的。

最后指出，本文仅对特征向量导数计算的两大类方法之一的直接法展开叙述，对另一类间接法(或称模态法)不做任何涉及。同时，为了叙述简单，假设读者已了解文[1]的方法。

2 简单动柔度法

定义式(1)的系数阵为动刚度阵

$$S(\lambda_s) = K - \lambda_s M \tag{6}$$

简单动柔度法消除$S(\lambda_s)$奇异性的办法是，采纳与文[2]相并行的思想，实现方程式(1)和(4)的联立求解[12]。为此，用$dM\varphi_s$前乘式(4)两边，则得

$$dM\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}} M\varphi_s' = -0.5dM\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}} M' \varphi_s \tag{7}$$

式中d是任意非零常数，可以取为λ_s。将式(1)和(7)相加，则有[12]

$$(K - \lambda_s M + dM\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}} M)\varphi_s' = g - 0.5dM\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}} M' \varphi_s \tag{8}$$

式(8)的系数阵完全同于文[10,11]建立的过渡动刚度阵$\tilde{S}(\lambda_s)$，但式(8)却不是过渡动柔度法的原始方程，因为它俩的右端项不同。既然式(8)的系数阵同于过渡动刚度阵$\tilde{S}(\lambda_s)$，故很容易由文[10,11]的"数学引论"得知它为满秩阵。考虑完整性，这里再做一简单直接的证明。

按文[1]，将式(8)的系数阵[这里记为$F^{-1}(\lambda_s)$]写成谱表达式：

$$F^{-1}(\lambda_s) = K - \lambda_s M + dM\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}} M = M\Phi[\Omega\text{-}\lambda_s I]\Phi^{\mathrm{T}} M + dM\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}} M \tag{9}$$

将完备特征对(Ω,Φ)分成三组:$\Phi=[\bar{\Phi}_k,\varphi_s,\Phi_h]=[\Phi_k,\Phi_h]$和$\Omega=\mathrm{diag}[\bar{\Omega}_k,\lambda_s,\Omega_h]=\mathrm{diag}[\Omega_k,\Omega_h]$,其中$\Phi_k=[\bar{\Phi}_k,\varphi_s]$和$\Omega_k=\mathrm{diag}[\bar{\Omega}_k,\lambda_s]$统称为低阶特征对,而$\varphi_s$和$\lambda_s$称为本阶特征对(指待求导数的特征对)、而$\bar{\Phi}_k$和$\bar{\Omega}_k$称为附加特征对。这样,式(9)可写为

$$F^{-1}(\lambda_s)=M[\bar{\Phi}_k,\varphi_s,\Phi_h]\begin{bmatrix}\bar{\Omega}_k-\lambda_s I & & \\ & d & \\ & & \Omega_h-\lambda_s I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\Phi}_k^{\mathrm{T}}\\ \varphi_s^{\mathrm{T}}\\ \Phi_h^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}M \tag{10}$$

显然,$F^{-1}(\lambda_s)$为满秩阵。利用完备模态组的归一化条件$\Phi^T M\Phi=I$可得到关系$\Phi^{-1}=\Phi^{\mathrm{T}}M$,这样由式(10)得动柔度阵如下:

$$F(\lambda_s)=\bar{\Phi}_k(\bar{\Omega}_k-\lambda_s I)^{-1}\bar{\Phi}_k^{\mathrm{T}}+d^{-1}\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}}+\Phi_h(\Omega_h-\lambda_s I)^{-1}\Phi_h^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

由式(8)和(9)得知特征向量导数的通解为

$$\varphi_s'=F(\lambda_s)[g-0.5dM\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}}M'\varphi_s] \tag{12}$$

3 简单动柔度阵

实现式(12)的计算,关键在于动柔度$F(\lambda_s)$的计算式的建立。显然,式(11)是不适合工程计算的,因为高阶特征对(Φ_h,Ω_h)是未知的、或者说是不宜通过求解特征方程获取的。正如前面已指出,式(8)的系数阵完全同于文[10]中的过渡动刚度阵,故$F(\lambda_s)$也必然完全同于文[10]的过渡动柔度阵,文[10]虽是讨论重根情况的,但它的过渡动柔度阵在单根情况下,就是本文所需要的简单动柔度阵,现简述如下:

仿照文[1,10]的步骤,首先将式(11)中高阶特征对的贡献项$\Phi_h(\Omega_h-\lambda_s I)^{-1}\Phi_h^T$展开成$\lambda_s$的幂级数:$A_0+\lambda_s A_1+\lambda_s^2 A_2+\cdots$,即得

$$F(\lambda_s)=\bar{\Phi}_k(\bar{\Omega}_k-\lambda_s I)^{-1}\bar{\Phi}_k^{\mathrm{T}}+d^{-1}\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}}+A_0+\lambda_s A_1+\lambda_s^2 A_2+\cdots \tag{13}$$

其次,将$\bar{\Phi}_k$分割成两组模态:Φ_1和Φ_2,令它俩对应的两组特征值Ω_1和Ω_2分别小于和大于λ_s;注意,Φ_1可以包含有r个刚体模态。这样,可将式(13)改写成[1,10]

$$\begin{aligned}F(\lambda_s)=&-\lambda_s^{-1}\Phi_1\Phi_1^{\mathrm{T}}-\lambda_s^{-2}\Phi_1\Omega_1\Phi_1^{\mathrm{T}}-\lambda_s^{-3}\Phi_1\Omega_1^2\Phi_1^{\mathrm{T}}-\cdots\\&+\Phi_2\Omega_2^{-1}\Phi_2^{\mathrm{T}}+\lambda_s\Phi_2\Omega_2^{-2}\Phi_2+\lambda_s^2\Phi_2\Omega_2^{-3}\Phi_2^{\mathrm{T}}+\lambda_s^3\Phi_2\Omega_2^{-4}\Phi_2^{\mathrm{T}}+\cdots\\&+d^{-1}\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}}+A_0+\lambda_s A_1+\lambda_s^2 A_2+\lambda_s^3 A_3+\cdots\end{aligned} \tag{14}$$

其三,由式(9)得知下列关系

$$(K-\lambda_s M+dM\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}}M)F(\lambda_s)=I \tag{15}$$

其四,将式(14)代入式(15)、再展开式(15)、最后令式(15)两边具有λ_s同次幂的项彼此相等,便得一系列方程,其中对应$\lambda_s^{-q}\sim\lambda_s^{-1}(q>1)$的方程都自动满足,而对应$\lambda_s^0$,$\lambda_s^1$和$\lambda_s^2\sim\lambda_s^p(p>2)$的方程分别为

$$\lambda_s^0:\quad (K+dM\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}}M)A_0=I-M\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_1^{\mathrm{T}}-K(\Phi_2\Omega_2^{-1}\Phi_2^{\mathrm{T}}+d^{-1}\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}}) \tag{16}$$

$$\lambda_s^1: \quad (K + dM\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}}M)A_1 = M(d^{-1}\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}} + A_0) \tag{17}$$

$$\lambda_s^2 \sim \lambda_s^p: \quad (K + dM\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}}M)A_p = MA_{p-1}, \qquad p \geqslant 2 \tag{18}$$

式中

$$\widetilde{\Phi}_1 = [\Phi_1, \varphi_s] \tag{19}$$

其五，若想象 $A_0, A_1, \cdots$ 分别来自 $\Phi_h(\Omega_h - \lambda_s I)^{-1}\Phi_h^{\mathrm{T}}$ 中的各个项，便可推断出下列表达式

$$\Phi_R^{\mathrm{T}} MA_p = 0, \qquad p \geqslant 0 \tag{20}$$

$$\varphi_s^{\mathrm{T}} MA_p = 0, \qquad p \geqslant 0 \tag{21}$$

其六，用 $dM\varphi_s$ 前乘式(21)两边，得

$$dM\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}}MA_p = 0, \qquad p \geqslant 0 \tag{22}$$

其七，从式(16)～(18)中分别减去(22)就得到求解 $A_p(p \geqslant 0)$ 的支配方程为

$$KA_0 = I - M\widetilde{\Phi}_1\widetilde{\Phi}_1^{\mathrm{T}} - K(\Phi_2\Omega_2^{-1}\Phi_2^{\mathrm{T}} + d^{-1}\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}}) \tag{23}$$

$$KA_1 = M(d^{-1}\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}} + A_0) \tag{24}$$

$$KA_p = MA_{p-1}, \qquad p \geqslant 2 \tag{25}$$

一旦求得 $A_p(p \geqslant 0)$，则由式(13)就可得到简单动柔度阵 $F(\lambda_s)$。虽然对于不同的 λ_s，需要重新求解相应的 $A_p(p \geqslant 0)$，但由于其系数阵 K 不随 λ_s 而变化，故计算 $A_p(p \geqslant 0)$ 的效率是很高的。

4 应用

简单动柔度法在应用中的有关问题可参阅文[1,10]，这里仅指出一点：当式(23)～(25)应用于具有刚体运动的自由结构时，K 阵奇异，这时式(23)～(25)只有在特殊情况下才有解，即式(23)～(25)的右端项(统一记为 f)应该与 Φ_R 正交，就是说 $\Phi_R^{\mathrm{T}} f = 0$ 才有解，显然此条件是满足的，所以肯定式(23)～(25)有解。然而，由于式(23)～(25)缺少 r 个独立方程而无法求解。这时若像文[1]那样，利用式(20)分别给式(23)～(25)补充 r 个独立方程，来解决 K 的奇异性，即用 $\mu M\Phi_R$ 前乘式(20)两边，然后将其结果分别加到式(23)～(25)中去，那么将使得式(23)～(25)的系数阵变成$(K + \mu M\Phi_R\Phi_R^{\mathrm{T}}M)$，这个矩阵虽容易证明是满秩的[10,11]，但它破坏了原 K 阵的带状特征，对计算效率不利。这里建议采用移频技术[13]，可使式(23)～(25)分别变为

$$K^* A_0 = I - M\widetilde{\Phi}_1\widetilde{\Phi}_1^{\mathrm{T}} - K^*(\Phi_2\Omega_2^{*-1}\Phi_2^{\mathrm{T}} + d^{-1}\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}}) \tag{26}$$

$$K^* A_1 = M(d^{-1}\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}} + A_0) \tag{27}$$

$$K^* A_p = MA_{p-1}, \qquad p \geqslant 2 \tag{28}$$

相应的简单动柔度阵将为

$$F(\lambda_s) = F^*(\lambda_s^*) = \overline{\Phi}_k(\overline{\Omega}_k^* - \lambda_s^* I)^{-1}\overline{\Phi}_k^T + d^{-1}\varphi_s\varphi_s^T + A_0 + \lambda_s^* A_1 + \lambda_s^{*2}A_2 + \cdots \quad (29)$$

式中 $K^* = K - \Delta\lambda_s M, \Omega_2^* = \Omega_2 - \Delta\lambda_s I, \overline{\Omega}_k^* = \overline{\Omega}_k - \Delta\lambda_s I$ 和 $\lambda_s^* = \lambda_s - \Delta\lambda_s$，$\Delta\lambda_s$ 为移频量。

由于 K^* 非奇异，可以按式(26)～(28)计算自由结构的 $A_p(p \geqslant 0)$，且计算效率明显提高，因为 K^* 具有与 K 相同的带状特征。这时特征向量导数计算式为

$$\varphi_s' = F^*(\lambda_s^*)(g - 0.5dM\varphi_s\varphi_s^T M'\varphi_s) \quad (30)$$

实际上，对于约束结构也可采用式(26)～(30)计算特征向量导数，这样可以简化编程过程。

5 数值验证

本文例题是仅取文[5]例题的 xoz 平面内的纯弯曲振动，这样就由一个具有2重根的例题变成具有单根的例题，不过本例题是一个具有6个相同梁元的12自由度均匀悬臂梁。梁元刚度阵和质量阵公式为

$$K_e = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} 12I_y/L^2 & -6I_y/L & -12I_y/L^2 & -6I_y/L \\ & 4I_y & 6I_y/L & 2I_y \\ \text{对称} & & 12I_y/L^2 & 6I_y/L \\ & & & 4I_y \end{bmatrix} \quad (31a)$$

$$M_e = \frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ \text{对称} & & 156 & 22L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (31b)$$

求导设计参数选取为自由端梁元的 I_y，故梁元矩阵的导数公式为

$$K_e' = \frac{\partial K_e}{\partial I_y} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} 12/L^2 & -6/L & -12/L^2 & -6/L \\ & 4 & 6/L & 2 \\ \text{对称} & & 12/L^2 & 6/L \\ & & & 4 \end{bmatrix} \quad (32a)$$

$$M_e' = \frac{\partial M_e}{\partial I_y} = [0] \quad (32b)$$

由文[5]得知　$A = 420, E = 1000, L = I_y = \rho = 1$，故悬臂梁的组合矩阵为

$$K_g = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 8 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 24 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 8 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 24 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 8 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ & \text{对} & \text{称} & & & & & & 24 & 0 & -12 & -6 \\ & & & & & & & & & 8 & 6 & 2 \\ & & & & & & & & & & 24 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 8 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (33a)$$

$$
M_g = \begin{bmatrix}
156 & -22 & 54 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 4 & -13 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 312 & 0 & 54 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 8 & -13 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 312 & 0 & 54 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 8 & -13 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 312 & 0 & 54 & 13 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 8 & -13 & -3 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 312 & 0 & 54 & 13 \\
 & & & & & & & & & 8 & -13 & -3 \\
 & & & & & & & & & & 312 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 8
\end{bmatrix} \tag{33b}
$$

其导数矩阵为

$$
K'_g = \begin{bmatrix}
12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \text{对} & \cdot & \text{称} & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{bmatrix} \times 10^3 \tag{34a}
$$

$$
M'_g = [0]_{12\times 12} \tag{34b}
$$

计算情况

(1) 取第 1 ～ 第 3 特征向量构成 Φ_k，然后利用式(12) 和(13) 计算第 1 和第 2 特征向量的导数，这属于 Φ_k 中的特征向量个数多于待求导特征向量个数的情况，其结果列于表 1 和表 2(其中 $\Phi_k \in R^{12,3}$ 就指这种情况)；

(2) 取第 1 ～ 第 2 特征向量构成 Φ_k，然后利用式(12) 和(13) 计算第 1 和第 2 特征向量的导数，这属于 Φ_k 的所有特征向量都为待求导特征向量的情况，其结果列于表 1 和表 2(其中 $\Phi_k \in R^{12,2}$ 就指这种情况)。

第 1 和第 2 特征值分别为 $\lambda_{s,1} = 0.22712$ 和 $\lambda_{s,2} = 0.89241$；相应导数为 $\lambda'_{s,1} = 0.61743D-5$ 和 $\lambda'_{s,2} = 0.66720D-2$。为了分析特征向量导数的误差，选用文[8] 的直接扰动法所得通解作为“精确值”φ'_e，其过程为：对式(1) 的系数阵实施小扰动，则得原始扰动解 v_{op} 如下

$$
(K - \lambda_s M) v_{op} = g \tag{35}
$$

式中 $\tilde{\lambda}_s=(1+\eta)\lambda_s$，$\eta$ 为无因次小量，凭经验取 $\eta=0.001\sim0.0001$；式(1) 的特解取为[8]

$$v=(I-\varphi_s\varphi_s^{\mathrm{T}}M)v_{op}; \tag{36}$$

最后由式(3) 和(5) 获取直接扰动法通解 φ_e'。简单动柔度法结果 φ_s' 的误差指标定义为

$$\|\varphi_s'\|\%=\left(\frac{\|\varphi_e'-\varphi_s'\|}{\|\varphi_e'\|}\right)^{1/2}\% \tag{37}$$

该百分误差列于表 1 和表 2 的底部。表 1 和表 2 中的"二次近似"和"三次近似"指式(13) 或(29) 的尾部幂级数分别取到 λ_s^2 项和 λ_s^3 项所得结果。

表 1　简化动柔度法计算的第一特征向量导数

精确值	$\Phi_k\in R^{12,3}$ 情况		$\Phi_k\in R^{12,2}$ 情况	
	二次近似	三次近似	二次近似	三次近似
$-0.34037D-4$	$-0.34037D-4$	$-0.34037D-4$	$-0.34037D-4$	$-0.34037D-4$
$-0.57459D-4$	$-0.57459D-4$	$-0.57459D-4$	$-0.57459D-4$	$-0.57459D-4$
$0.83083D-5$	$0.83083D-5$	$0.83083D-5$	$0.83083D-5$	$0.83083D-5$
$0.22648D-5$	$0.22648D-5$	$0.22648D-5$	$0.22648D-5$	$0.22648D-5$
$0.60359D-5$	$0.60359D-5$	$0.60359D-5$	$0.60359D-5$	$0.60359D-5$
$0.22580D-5$	$0.22580D-5$	$0.22580D-5$	$0.22580D-5$	$0.22580D-5$
$0.38425D-5$	$0.38425D-5$	$0.38425D-5$	$0.38425D-5$	$0.38425D-5$
$0.21022D-5$	$0.21022D-5$	$0.21022D-5$	$0.21022D-5$	$0.21022D-5$
$0.19163D-5$	$0.19163D-5$	$0.19163D-5$	$0.19163D-5$	$0.19163D-5$
$0.17045D-5$	$0.17044D-5$	$0.17044D-5$	$0.17044D-5$	$0.17044D-5$
$0.53248D-6$	$0.53247D-6$	$0.53247D-6$	$0.53247D-6$	$0.53247D-6$
$0.10113D-5$	$0.10112D-5$	$0.10112D-5$	$0.10112D-5$	$0.10112D-5$
$\|\varphi'_s\|\%$	$0.755D-4$	$0.755D-4$	$0.760D-4$	$0.755D-4$

由表 1 和表 2 可知：式(13) 尾部幂级数所取项数多少，对其精度影响是显著的，特别对 Φ_k 中待求导的高阶特征向量更为如此，一般说，取到 $\lambda_s^2\sim\lambda_s^3$ 项便可获得很满意的精度。另外，Φ_k 中包含的特征向量个数比待求导的特征向量个数那怕多一个，对精度也是很有利的，这主要是对 Φ_k 中的高阶特征向量之导数有利，相反，对 Φ_k 中低阶特征向量之导数的影响不大。当然，这种措施只有在特征值"分离"(即不密集) 的情况下才会有效。一旦遇到"密集根"时，非得采用"分组移频"，然后利用式(26) ～ (30) 计算特征向量导数，因为"移频"可以加速式(29) 的 λ_s 幂级数收敛，从而提高精度。注意，绝不能对 Φ_k 中的每个待求导特征向量，采取"逐个移频"，否则动柔度法的优势完全丧失。

表 2　简化动柔度法计算的第二特征向量导数

精确值	$\Phi_k \in R^{12,3}$ 情况		$\Phi_k \in R^{12,2}$ 情况	
	二次近似	三次近似	二次近似	三次近似
$0.85318D-3$	$0.85317D-3$	$0.85318D-3$	$0.65259D-3$	$0.85310D-3$
$0.17396D-2$	$0.17396D-2$	$0.17396D-2$	$0.17388D-2$	$0.17395D-2$
$-0.35914D-3$	$-0.35914D-3$	$-0.35914D-3$	$-0.35901D-3$	$-0.35912D-3$
$-0.26629D-3$	$-0.26631D-3$	$-0.26630D-3$	$-0.26688D-3$	$-0.26637D-3$
$-0.96832D-4$	$-0.96829D-4$	$-0.96830D-4$	$-0.96453D-4$	$-0.96782D-4$
$-0.24332D-3$	$-0.24331D-3$	$-0.24332D-3$	$-0.24319D-3$	$-0.24330D-3$
$0.93781D-4$	$0.93775D-4$	$0.93780D-4$	$0.93764D-4$	$0.93779D-4$
$-0.12397D-3$	$-0.12397D-3$	$-0.12397D-3$	$-0.12343D-3$	$-0.12390D-3$
$0.13940D-3$	$0.13940D-3$	$0.13940D-3$	$0.13898D-3$	$0.13935D-3$
$0.28697D-4$	$0.28688D-4$	$0.28697D-4$	$0.28853D-4$	$0.28718D-4$
$0.64632D-4$	$0.64635D-4$	$0.64630D-4$	$0.64350D-4$	$0.64594D-4$
$0.97982D-4$	$0.97983D-4$	$0.97979D-4$	$0.97618D-4$	$0.97933D-4$
$\Vert\varphi'_s\Vert\%$	0.0016	0.0006	0.0733	0.0098

6　结论

对于非重根之特征向量导数的计算而言，本文发展了一种至今最好的动柔度法，它具有诸多的优点：

(1) 与 Nelson 法为代表的直接法相比，本文简单动柔度法只需“一步求解”便可获得通解；另外，当计算很多特征向量的导数时，简单动柔度法的计算效率显著高于 Nelson 法。

(2) 与 Fox 法相比，虽然都是“一步求解”就获得最终解，但 Fox 法的支配方程之系数阵为满阵，而简单动柔度法的支配方程之系数阵为带状矩阵。

(3) 与扰动动柔度法相比，简单动柔度法没有“扰动”引入的近似性。

(4) 与过渡动柔度法相比，简单动柔度法没有先求过渡特解，再求真正特解，最后还需计算通解等繁琐步骤。

诚然，当仅仅需要计算一个特征向量的导数时，本文简单动柔度法就不如 Nelson 法了。

参考文献

1　Zhang Dewen (Zhang D—W), Wei F—S. Efficient Computation of Many Eigenvector Derivatives Using Dynamic Flexibility Method. AIAA Journal, 1997, 35(4): 712-718

2　Fox R L, Kapoor M P. Rate of Change of Eigenvalues and Eigenvectors. AIAA Journal, 1968, 6(2): 2426～2429

3　Nelson R B. Simplified Calculations of Eigenvector Derivatives. AIAA Journal, 1976, 14(9): 1201～1205.

4　Ojalvo I U. Gradient for Large Structural Models with Repeated Frequencies. Socity of Automotive Engineers, Warrendale, PA, Paper 86～1789.

5 Dailey R L. Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues. AIAA Journal, 1989, 27(4): 486～491.
6 Ojalvo I U. Efficient Computation of Mode－shape Derivatives for Large Dynamic System. Proc of the 27th Structural Dynamics and Materials Conf, Pt 2, AIAA, 1986: 242～247
7 Mills－Curran W C. Calculation of Eigenvector Derivatives for Structure with Repeated Eigenvalues. AIAA Journal, 1988, 26(7): 867～871.
8 张德文，魏阜旋．重根特征向量导数计算的直接扰动法．固体力学学报，1993，14(4)：337～341
9 王荣昌，王文亮．广义逆在特征灵敏度计算中的应用．固体力学学报，1995，16(2)：114～123
10 张德文，黄晓明，张令弥．动柔度与特征向量导数．计算力学学报，1999，16(3)：261～269
11 张德文．精确的和简化的过渡动柔度式及应用．导弹与航天运载技术，1997，(3)：24～32
12 胡海昌．多自由度结构固有振动理论．北京：科学出版社，1987
13 张德文．对特征向量导数之动柔度法的补充．强度与环境，1998，(3)：21～27

Simple Dynamic Flexibility Method for Calculation of Eigenvector Derivatives

Liu jun

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

Zhang Dewen

(Beijing Institute of Structure and Environment Engineering)

ABSTRACT When many eigenvector derivatives need to be computed, the computational efficiency of Nelson's method, that is a deputy to the direct method, is lower. For this reason, the second author developed a category of dynamic flexibility method, for example, the perturbation dynamic flexibility method and intermediate dynamic flexibility method, which can be considered as a branch of direct method. In order to simplify the process of calculation for above－stated dynamic flexibility methods, a simple dynamic flexibility (SDF) method is proposed in this paper. The SDF method is a continuation of early dynamic flexibility technique, but it is best dynamic flexibility procedure for the computation of many eigenvector derivatives with non－repeated eigenvalues, since it not only possesses the merits of early dynamic flexibility methods, but also overcomes the shortcomes of them. As with Fox's method the SDF method can obtain the general solution through "one－step solving" process, but the SDF method has not the shortcome of Fox's method, that is, the coefficient matirx of governing equation for Fox's method is a full matrix, and that for the SDF method is a band－state matrix. So in the calculation of many eigenvector derivatives with non－repeated roots, adopting SDF method can save obviously the computer time in comparison with Nelson's method.

SUBJECT TERMS Modal analysis, Vector operation, Modal parameter, Dynamic sensitivity.