第 29 卷 第 3 期 力 学 进 展 Vol. 29 No. 3
1999 年 8 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Aug. 25, 1999

粘弹性力学的对应原理及其数值反演方法 *

魏培君 张双寅 吴永礼
中国科学院力学研究所，北京 100080

摘 要 积分变换是处理粘弹性混合边值问题的重要数学工具. 积分变换的应用使粘弹性混合边值问题在象空间与相应弹性混合边值问题对应起来, 从而使粘弹性混合边值问题的求解可以继承和借鉴弹性问题的求解方法. 再利用积分反演方法就可求得时间域粘弹性边值问题的解. 本文结合国内外的研究成果, 就粘弹性力学中存在的各种对应原理及数值反演方法进行了归类和总结. 结合在求解粘弹性边值问题中的应用, 对各类方法的特点进行了评述, 并指出存在的问题及发展新的数值方法的研究重点.

关键词 粘弹性, 对应原理, 积分变换, Laplace 逆变换

1 引 言

粘弹性材料是自然界中广泛存在的一类材料, 例如, 聚合物、复合材料、岩土、混凝土等. 有些材料尽管在室温下不呈现粘弹性性质, 但在高温, 高应力特殊工作环境下, 也会呈现粘弹性性质. 粘弹性力学随着粘弹性材料的日益广泛的应用已经成为国内外研究热点之一, 并在复合材料、地质勘探、地震预测等应用领域有广泛应用. 粘弹性材料的本构有线性和非线性之分 [1~5], 线性粘弹性本构可用 Stieljes 卷积积分 [1] 表示为

$$e_{ij}(t) = F_1(t) * \mathrm{d}s_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} F_1(t-\tau)\frac{\mathrm{d}s_{ij}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{1}$$

对于线性粘弹性混合边值问题, 积分变换是一种重要的数学工具. Laplace 积分变换定义为

$$F(p) = \int_0^t f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \tag{2}$$

简记为: $F(p) = L[f(t)]$, 其中: L 是 Laplace 变换算子, $f(t)$ 称为原函数, $F(p)$ 称为象函数. 由于卷积的积分变换的特殊性质 $L[f(t) * g(t)] = F(p) \cdot G(p)$, 其中 $F(p)$, $G(p)$ 分别为 $f(t)$, $g(t)$ 的象函数, 就使得在象空间粘弹性混合边值问题与相应弹性混合边值问题 (具有相同几何形状和边界性质) 对应起来, 从而粘弹性混合边值问题的求解可以继承弹性混合边值问题的所有方法, 例如, 有限元法 (FEM), 有限差分法 (FDM), 边界积分方程法 (BIEM), 然后再将象

收稿日期: 1998-04-20, 修回日期: 1998-11-16
* 国家自然科学基金 (19772064) 和中国科学院基金 (KJ951-1-20) 资助项目

空间的结果求逆得到时间域的解，这种求解粘弹性问题的方法一般称为对应原理方法. 沈亚鹏等[6]在总结粘弹性问题数值解法时将方法归为两类，一类是利用 FEM, FDM, BIEM 直接在时间域求解，另一类就是利用对应原理[7~34]. 在经典的准静态粘弹性 - 静态弹性对应原理[7~13]基础上，国内外学者进一步发展了动态粘弹性 - 动态弹性对应原理[14~25]，热粘弹性 - 热弹性对应原理[26~30]，起始状态非自然状态的对应原理[29,31]，具有运动边界的对应原理[26,27,32,33]，非线性粘弹性与非线性弹性对应原理[34]等. 对应原理解决了象空间粘弹性混合边值问题的求解，但我们还必须将这个解还原到时间域去，实现这种解的还原与积分反演方法紧密相关. 宁亚琴[35,36]对常用 Laplace 变换表进行了补充，扩大了可直接查表求逆的函数范围. 对于比较简单的函数，可利用围道积分技术进行解析求逆[37]，另外 Dehoop 方法[38]是求双积分变换逆的有效方法. 由于实际问题的复杂性，能够求得解析逆的问题是很有限的，因此求数值逆的数值方法在实际问题的求解中具有重要的意义. 积分求逆是个相对困难的问题， Laplace 逆的数值方法在近半个世纪一直是应用数学家和其他领域众多学者的研究热点，提出了多种数值方法[39~62]，近年又有新的研究成果出现[63~69]，发展了效率更高的数值方法. 本文将根据作者所掌握的资料对粘弹性力学中的对应原理及与之紧密相关的积分变换数值反演方法进行归类和总结，并对现有反演方法的特点，存在的问题和今后发展更好的数值反演方法进行了讨论.

2 粘弹性力学中的对应原理

2.1 准静态粘弹性 - 静态弹性对应原理[7~13]

所谓准静态是指，尽管粘弹性混合边值问题中的 $\sigma_{ij}(x,t)$, $\varepsilon_{ij}(x,t)$ 都是时间 t 的依赖函数，但由于时间变化率不大，以致惯性力可以忽略不计的受力情况. 在此假设下，在时间域及对时间 t 进行 Laplace 变换后的象空间中粘弹性混合边值问题及相应弹性混合边值问题可表述如表 1.

表 1

准静态粘弹性		静态弹性
时间域	象空间	时间域
平衡： $\sigma_{ij,j}(x,t)+\rho f_i(x,t)=0$	$\overline{\sigma}_{ij,j}(x,p)+\rho\overline{f}_i(x,p)=0$	平衡： $\sigma_{ij,j}(x)+\rho f_i(x)=0$
几何： $\varepsilon_{ij}(x,t)=\frac{1}{2}[u_{i,j}(x,t)+u_{j,i}(x,t)]$	$\overline{\varepsilon}_{ij}(x,p)=\frac{1}{2}[\overline{u}_{i,j}(x,p)+\overline{u}_{j,i}(x,p)]$	几何： $\varepsilon_{ij}(x)=\frac{1}{2}[u_{i,j}(x)+u_{j,i}(x)]$
边界： $\sigma_{ij}(x,t)n_j=F_i(x,t)$ s_σ 上	$\overline{\sigma}_{ij}(x,p)n_j=\overline{F}_i(x,p)$ s_σ 上	边界： $\sigma_{ij}(x)n_j=F_i(x)$ s_σ 上
$u_i(x,t)=u_i^0(x,t)$ s_u 上	$\overline{u}_i(x,p)=\overline{u}_i^0(x,p)$ s_u 上	$u_i(x)=u_i^0(x)$ s_u 上
本构：		本构：
积分型： $s_{ij}(x,t)=G_1(t)^*\mathrm{d}e_{ij}(x,t)$	积分型： $\overline{s}_{ij}(x,p)=p\overline{G}_1(p)\overline{e}_{ij}(x,p)$	积分型： $s_{ij}(x)=2Ge_{ij}(x)$
$\sigma_{kk}(x,t)=G_2(t)^*\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(x,t)$	$=\frac{Q_1(p)}{P_1(p)}\overline{e}_{ij}(x,p)$	$\sigma_{kk}(x)=3K\varepsilon_{kk}(x)$
微分型： $P_1(D)s_{ij}(x,t)=Q_1(D)e_{ij}(x,t)$	$\overline{\sigma}_{kk}(x,p)=p\overline{G}_2(p)\overline{\varepsilon}_{kk}(x,p)$	
$P_2(D)\sigma_{kk}(x,t)=Q_2(D)\varepsilon_{kk}(x,t)$	$=\frac{Q_2(p)}{P_2(p)}\overline{\varepsilon}_{kk}(x,p)$	

从表中可见，准静态粘弹性混合边值问题在象空间与时间域静态弹性边值问题具有相同的场方程形式，其中本构方程中对应材料参数为

$$\text{粘弹性问题}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{Q_1(p)}{P_1(p)}=p\overline{G}_1(p)\Leftrightarrow 2G\\[2ex]\dfrac{Q_2(p)}{P_2(p)}=p\overline{G}_2(p)\Leftrightarrow 3K\end{array}\right\}\text{弹性问题}$$

准静态粘弹性 - 静态弹性对应原理又称经典对应原理，其适用条件： 1) 本构方程是线性的，即 Boltzmann 叠加原理成立． 2) 准静态假设，即惯性力可以忽略不计． 3) 起始状态处于自然状态，即 $t<0$ 时， $\sigma_{ij}(x,t)=\varepsilon_{ij}(x,t)=0$． 4) 静止边界，即边界性质 (位移边界，应力边界) 和边界法线均不依赖时间变化．

2.2 动态粘弹性 - 动态弹性对应原理 [5,14~25]

所谓动态粘弹性是指粘弹性混合边值问题中的 $\sigma_{ij}(x,t)$, $\varepsilon_{ij}(x,t)$ 都是时间 t 的依赖函数，且变化速率较大，以致惯性力不能忽略的受力状况．动态问题包括瞬态问题和稳态问题．对于瞬态问题，在对时间 t 作 Laplace 变换后的象空间中动态粘弹性和动态弹性混合边值问题可表述如表 2．这里所述动态对应原理，不同于静态对应原理．静态对应原理是指象空间的准静态粘弹性与时间域的静态弹性之间的对应关系．动态对应原理是指象空间的动态粘弹性与象空间的动态弹性之间的对应关系．从表 2 中可见动态粘弹性混合边值问题与相应动态弹性混合边值问题在象空间中的对应参数为

$$\text{动态粘弹性}\left\{\begin{array}{l} p\lambda(p)\Leftrightarrow\lambda \\ p\mu(p)\Leftrightarrow\mu \end{array}\right\}\text{动态弹性}$$

其中： $\lambda(t)=\dfrac{1}{3}[G_2(t)-G_1(t)]$, $\mu(t)=\dfrac{1}{2}G_1(t)$．上述对应关系等价于

$$\text{动态粘弹性}\left\{\begin{array}{l} p\overline{G}_1(p)\Leftrightarrow 2G \\ p\overline{G}_2(p)\Leftrightarrow 3K \end{array}\right\}\text{动态弹性}$$

表 2

时间域		象空间	
动态粘弹性	动态弹性	动态粘弹性	动态弹性
运动：		运动：	
$\sigma_{ij,j}(x,t)+\rho f_i(x,t)=\rho\ddot{u}_i(x,t)$	同左	$\overline{\sigma}_{ij,j}(x,p)+\rho\overline{f}_i(x,p)=\rho p^2\overline{u}_i(x,p)$	同左
几何：		几何：	
$\varepsilon_{ij}(x,t)=\dfrac{1}{2}[u_{i,j}(x,t)+u_{j,i}(x,t)]$		$\overline{\varepsilon}_{ij}(x,p)=\dfrac{1}{2}[\overline{u}_{i,j}(x,p)+\overline{u}_{j,i}(x,p)]$	
边界：		边界：	
$\sigma_{ij}(x,t)n_j=T_i(x,t)$ s_σ 上		$\overline{\sigma}_{ij}(x,p)n_j=\overline{T}_i(x,p)$ s_σ 上	
$u_i(x,t)=u_i^0(x,t)$ s_u 上		$\overline{u}_i(x,p)=\overline{u}_i^0(x,p)$ s_u 上	
初始：当 $t=0$ 时			
$\sigma_{ij}(x,t)=\varepsilon_{ij}(x,t)=u_i(x,t)$			
$=\dot{u}_i(x,t)=0$			
本构：		本构：	
积分型：		积分型：	
$s_{ij}(x,t)=G_1(t)^*\mathrm{d}e_{ij}(x,t)$	$s_{ij}(x,t)=2Ge_{ij}(x,t)$	$\overline{s}_{ij}(x,p)=p\overline{G}_1(p)\overline{e}_{ij}(x,p)$ $=\dfrac{Q_1(p)}{P_1(p)}\overline{e}_{ij}(x,p)$	$\overline{s}_{ij}(x,p)=2G\overline{e}_{ij}(x,p)$
$\sigma_{kk}(x,t)=G_2(t)^*\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(x,t)$	$\sigma_{kk}(x,t)=3K\varepsilon_{kk}(x,t)$	$\overline{\sigma}_{kk}(x,p)=p\overline{G}_2(p)\overline{\varepsilon}_{kk}(x,p)$ $=\dfrac{Q_2(p)}{P_2(p)}\overline{\varepsilon}_{kk}(x,p)$	$\overline{\sigma}_{kk}(x,p)=3K\overline{\varepsilon}_{kk}(x,p)$
微分型：			
$P_1(D)s_{ij}(x,t)=Q_1(D)e_{ij}(x,t)$			
$P_2(D)\sigma_{kk}(x,t)=Q_2(D)\varepsilon_{kk}(x,t)$			
位移型运动方程：		位移型运动方程：	
$(\lambda(t)+\mu(t))*\nabla\cdot\mathrm{d}u_i+$ $\mu(t)*\nabla^2\mathrm{d}u_i+\rho f=\rho\ddot{u}_i$	$(\lambda+\mu)\nabla\cdot u_i+\mu\nabla^2u_i$ $+\rho f_i=\rho\ddot{u}_i$	$p(\lambda(p)+\mu(p))\nabla\cdot u_i+p\mu(p)\nabla^2u_i$ $+\rho f_i=\rho p^2u_i(x,p)$	$(\lambda+\mu)\nabla\cdot u_i+\mu\nabla^2u_i$ $+\rho f_i=\rho p^2u_i(x,p)$

对于稳态问题，引入复模量 $\lambda^c(\omega)$, $\mu^c(\omega)$, 则得频域内运动方程

$$[\lambda^c(\omega)+\mu^c(\omega)]\nabla\cdot u_i+\mu^c(\omega)\nabla^2 u_i+\rho f_i=\rho\ddot{u}_i \tag{3}$$

频域内的动态粘弹性与时间域内的动态弹性之间存在直接的对应关系，对应参数为

$$\text{动态粘弹性}\left\{\begin{array}{l}\lambda^c(\omega)\Leftrightarrow\lambda\\ \mu^c(\omega)\Leftrightarrow\mu\end{array}\right\}\text{动态弹性}$$

其中

$$\lambda^c(\omega)=\frac{1}{3}[G_2(0)-G_1(0)+\mathrm{i}\omega(\widetilde{G}_2(\omega)-\widetilde{G}_1(\omega))]$$

$$\mu^c(\omega)=\frac{1}{2}[G_1(0)+\mathrm{i}\omega\widetilde{G}_1(\omega)]$$

$$\widetilde{G}_i(\omega)=F[G_i(t)],\quad (F[\,]\text{ 表示 Fourier 变换})$$

2.3 热粘弹性 - 热弹性对应原理 [5,26~30]

当恒温条件不满足时，即温度随时间变化时，必须考虑温度场与力场的耦合作用. 温度的改变可以引起材料的体积变化，若这种变化受到某种约束就会引起力场的改变. 反之，材料体积的变化必伴有温度的改变，从而对温度场产生影响. 另外，材料松弛模量等也是随温度而变化的. 热粘弹性混合边值问题与热弹性混合边值问题可表述如表 3. 从表 3 可见，热粘弹性边

表 3

时间域		象空间	
热粘弹性	热弹性	热粘弹性	热弹性
平衡:		平衡:	
$\sigma_{ij,j}(x,t)+\rho f_i(x,t)=0$		$\overline{\sigma}_{ij,j}(x,p)+\rho\overline{f}_i(x,p)=0$	
几何:		几何:	
$\varepsilon_{ij}(x,t)=\frac{1}{2}[u_{i,j}(x,t)+u_{j,i}(x,t)]$		$\overline{\varepsilon}_{ij}(x,p)=\frac{1}{2}[\overline{u}_{i,j}(x,p)+\overline{u}_{j,i}(x,p)]$	
边界:		边界:	
$\sigma_{ij}(x,t)n_j=F_i(x,t)$ s_σ 上	同左	$\overline{\sigma}_{ij}(x,p)n_j=\overline{F}_i(x,p)$ s_σ 上	同左
$u_i(x,t)=u_i^0(x,t)$ s_u 上		$\overline{u}_i(x,p)=\overline{u}_i^0(x,p)$ s_u 上	
$T(x,t)=T^0(x,t)$ s_t 上		$\overline{T}(x,p)=\overline{T}^0(x,p)$ s_u 上	
$\delta_{ij}kT_{,j}(x,t)=0$ s_q 上		$\delta_{ij}k\overline{T}_{,j}(x,p)=0$ s_q 上	
初始: 当 $t=0$ 时 $T(x,t)=\sigma_{ij}(x,t)=u_i(x,t)=0$			
本构:		本构:	
$s_{ij}(x,t)=G_1(t)^*\mathrm{d}e_{ij}(x,t)$	$s_{ij}(x,t)=2Ge_{ij}(x,t)$	$\overline{s}_{ij}(x,p)=p\overline{G}_1(p)\overline{e}_{ij}(x,p)$	$\overline{s}_{ij}(x,p)=2G\overline{e}_{ij}(x,p)$
$\sigma_{kk}(x,t)=G_2(t)^*\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(x,t)-3\varphi(t)^*\mathrm{d}T(x,t)$	$\sigma_{kk}(x,t)=3K(\varepsilon_{kk}(x,t)-3\alpha T(x,t))$	$\overline{\sigma}_{kk}(x,p)=p\overline{G}_2(p)\overline{\varepsilon}_{kk}(x,p)-3p\overline{\varphi}(p)\overline{T}(x,p)$	$\overline{\sigma}_{kk}(x,p)=3K(\overline{\varepsilon}_{kk}(x,p)-3\alpha T(x,p))$
能量守衡:		能量守衡:	
$\frac{k}{T_0}T_{,ii}(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}[m(t)^*\mathrm{d}T(x,t)+\varphi(t)^*\mathrm{d}\varepsilon_{kk}(x,t)]$	$\frac{k}{T_0}T_{,ii}(x,t)=\frac{c\rho}{T_0}\frac{\partial}{\partial t}T(x,t)+3K\alpha\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{kk}(x,t)$	$\frac{k}{T_0}\overline{T}_{,ii}(x,p)=p^2\overline{m}(p)\overline{T}(x,p)+p^2\overline{\varphi}(p)\overline{\varepsilon}_{kk}(x,p)$	$\frac{k}{T_0}\overline{T}_{,ii}(x,p)=\frac{c\rho}{T_0}p\overline{T}(x,p)+3K\alpha p\overline{\varepsilon}_{kk}(x,p)$

其中: $T(x,t)$ 表示变温，T_0 表示基础温度. s_t 为温度边界，s_q 为绝热边界，$m(t)$, $\varphi(t)$ 表示材料力学性能函数 [29].

值问题在象空间的场方程与时间域热弹性场方程有相同的形式，可以按处理热弹性问题的同样方法求得热粘弹性问题象空间的解．对应参数为

$$\text{热粘弹性耦合边值问题}\left\{\begin{array}{l} p\overline{G}_1(p) \Leftrightarrow 2G \\ p\overline{G}_2(p) \Leftrightarrow 3K \\ p\overline{\varphi}(p) \Leftrightarrow 3K\alpha \\ p\overline{m}(p) \Leftrightarrow c\rho/T_0 \end{array}\right\}\text{热弹性耦合边值问题}$$

3 Laplace 积分逆变换的数值方法

Laplace 积分变换定义见式 (2), Laplace 积分逆变换定义为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p \tag{4}$$

对 Laplace 积分逆变换的数值方法的研究主要起因于两点：(1) 相应弹性问题解的表达式非常复杂，以致于难以找到其解析逆．(2) 相应弹性问题的解是如此复杂以致只能知道离散的数值解，因此求其逆也只能是数值方法．经过半个世纪众多学者的研究，现已提出了很多种数值方法． L. Cost (1964)[70] 最早对若干 Laplace 数值反演方法，结合在粘弹性边值问题中的应用进行了对比． R. Piessens[71,72] 对 1934~1976 年期间的有关文献和方法进行了汇总． B. Davies & B. Martin[73] 对 1979 年以前提出的方法，精选 14 种通过若干算例，从实用性、适用函数类、精度、效率、程序实现的难易程度等方面进行了对比． G.V. Narayanan (1982)[74] 精选 8 种方法，结合动态响应、强迫振动、动应力集中、粘弹性应力分析等算例进一步进行了对比和讨论．遗憾的是 80 年代后期至今发展的新的数值求逆方法尚未见对比分析和粘弹性问题应用实例．本文不准备就各种方法的具体适用范围、特点和计算效率进行过多的讨论，对此感兴趣的读者可参考上述文献，而将重点放在对方法的归类和总结，并根据方法所依据的求逆原理不同，从整体上评述各类方法的特点．从而使读者面对各种各样的反演方法不会无所适从，而能清楚地把握各类方法的具有共性的特征，并根据具体问题进行正确的选择．本文将现有方法分为 4 类，尽管这 4 类方法不可能涵盖所有的方法，但最基本、最主要的方法都已包括在内，读者藉此可对 Laplace 逆变换的数值方法有一个全面的认识．

3.1 基于 $\delta(x-x_0)$ 函数的数值方法 [39~45]

通过恰当的变量代换，在 Laplace 积分变换的积分号内，构造出一个近似的 $\delta(x-x_0)$ 函数，利用 $\delta(x-x_0)$ 函数的积分平移性质：$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = f(x_0)$, 可将逆函数 $f(t)$ 从积分号内解放出来．不同的 $\delta(x-x_0)$ 函数，将具有不同的中心点，这个中心点就成为联系 $f(t)$ 和 $F(p)$ 的重要参数．

3.1.1 Widder 公式 [39]

由 Laplace 变换表知

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}F(p)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}F(p) = (-1)^n\int_0^{\infty} f(t)t^n\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

又 $\dfrac{p^{n+1}}{n!}t^n\mathrm{e}^{-pt} \approx \delta(t-t_0)$, $\quad t_0 = \dfrac{n}{p}$ 且 n 越大近似程度越高，所以

$$(-1)^n \frac{p^{n+1}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}F(p) \approx f(t_0)$$

令 $t_0 = t$, 则

$$f(t) = \left[(-1)^n \frac{p^{n+1}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}F(p)\right]_{p=n/t} \tag{5}$$

当 $n=1$ 时 Widder 公式成为

$$f(t) = -\left[p^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}F(p)\right]_{p=1/t} \tag{6}$$

此式又称 Alfrey 公式 [7].

3.1.2 T. Hear 公式 [40]

若取 $p^2t\mathrm{e}^{-pt} \approx \delta(t-t_0)$, $t_0 = \dfrac{1}{p}$ 则

$$F(p) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}[t\mathrm{e}^{-pt}]\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{f(t)}{p^2t}[p^2t\mathrm{e}^{-pt}]\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{f(t)}{p^2t}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = \left.\frac{f(t)}{p^2t}\right|_{t=t_0=1/p}$$

所以

$$f(t) = [pF(p)]_{p=1/t} \tag{7}$$

3.1.3 Schapary 公式 [41]

令 $u = \log p$, $v = \log t$, $w = u+v$, $f(t) = \psi(v)$, 则

$$pF(p) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}p\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^\infty \psi(v)(\mathrm{e}^{-10^w}10^w\ln 10)\mathrm{d}w = \int_{-\infty}^\infty \psi(w-u)(\mathrm{e}^{-10^w}10^w\ln 10)\mathrm{d}w$$

其中

$$\mathrm{e}^{-10^w}10^w\ln 10 \approx \delta(w-w_0), \quad w_0 = \log\mathrm{e}^{-c} \quad (\text{欧拉常数 } c \approx 0.58)$$

令 $w_0 - u = v = \log t$, 则 $\log\mathrm{e}^{-c} - \log p = \log t$, 即： $\quad t = \mathrm{e}^{-c}/p$.

所以

$$\left.\begin{aligned} pF(p) &= \psi(w_0-u)\,|_{w_0=\log\mathrm{e}^{-c}} \\ f(t) &= \psi(v) = [pF(p)]\,|_{p=\frac{\mathrm{e}^{-c}}{t}\approx\frac{0.5}{t}} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

3.1.4 Zakian 公式 [42~44]

取

$$\delta(\lambda-\lambda_0) \approx \sum_{i=1}^\infty K_i\frac{1}{t}\exp\left(-\alpha_i\frac{\lambda}{t}\right), \quad \lambda_0 = t$$

则

$$f(t) = \int_0^\infty f(\lambda)\delta(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^\infty K_i\frac{1}{t}\int_0^\infty f(\lambda)\exp\left(-\alpha_i\frac{\lambda}{t}\right)\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^\infty K_i\frac{1}{t}F\left(\frac{\alpha_i}{t}\right) \tag{9}$$

其中系数 K_i, α_i 应恰当选择，以使所取函数最大程度地近似 $\delta(\lambda-\lambda_0)$. Zakian 在文献 [42] 中对系数 K_i, α_i 的特点进行了说明，在文献 [43] 中给出了用古典 Pade 近似方法确定系数 K_i, α_i 的方法，在文献 [44] 中给出了用最小方差方法确定系数 K_i, α_i 的方法.

3.1.5 Stehfest 公式 [45]

取

$$\delta(\lambda-\lambda_0)\approx\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\frac{\ln 2}{t}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{t}\lambda})^n\exp\Big(-n\frac{\ln 2}{t}\lambda\Big),\quad \lambda_0=t$$

$$f(t)\approx\int_0^\infty f(\lambda)\delta(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}\lambda=\frac{\ln 2}{t}\sum_{i=1}^N K_iF\Big(\frac{\mathrm{i}\ln 2}{t}\Big) \tag{10}$$

Stehfest 公式可看成是 Zakian 公式在 $\alpha_i=\mathrm{i}\ln 2$ 的特殊情况.

基于 $\delta(x-x_0)$ 函数的数值方法的特点: (1) 一般适用于 $F(p)$ 为解析形式的情况. (2) 不仅需要 $F(p)$ 的信息, 同时需要 $F(p)$ 导数的信息, 且高阶导数的信息越多, 方法的精度越高. (3) 不用导数信息的单项近似方法 (T.Hear 公式, Schapary 公式), 其精度只在时间 t 的一定范围内得到保证. (4) 不用导数信息的多项组合方法 (Zakian 公式, Stehfest 公式), 其精度取决于组合系数的确定方法. 一般情况下, 其精度较单项近似方法高, 且能够在很宽的时间范围内得到保证.

3.2 基于 $f(t)$ 函数展开的数值方法 [41,46~52]

将 $f(t)$ 函数按三角函数, 指数函数, 或某种正交多项式展开, 其中展开系数未知, 然后逐项进行 Laplace 变换, 并通过在象空间中去拟合 $F(p)$ 函数而求得展开系数.

3.2.1 Schapary 指数函数展开 [41]

$$f(t)=A+Bt+\sum_{k=1}^N a_k\mathrm{e}^{-b_kt} \tag{11}$$

逐项进行 Laplace 变换

$$p\overline{f}(p)=A+Bp^{-1}+\sum_{k=1}^N a_k\big(1+b_kp^{-1}\big)^{-1}$$

取 N 个样本点进行拟合

$$\overline{f}(p)=F(p)\,|_{p=b_k},\quad k=1,N$$

可确定系数 a_k, 而系数 A,B 可由初始条件确定: $f(0)=\dot{f}(0)=0$

3.2.2 Papoulis 三角函数展开 [46]

令

$$\mathrm{e}^{-\sigma t}=\cos\theta,\quad \sigma>0;\quad f(t)=\sum_{k=0}^N C_k\sin(2k+1)\theta \tag{12}$$

则

$$\sigma F(p)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\Big(\frac{p}{\sigma}-1\Big)\sin\theta f(\theta)\mathrm{d}\theta$$

取样本点: $p=(2k+1)\sigma$,

$$\sigma F[(2k+1)\sigma]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta^{2k}\sin\theta f(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^k 2^{-2k}\big[C_n^{2k}-C_{n-1}^{2k}\big]C_{k-n}$$

解上述线性代数方程组可确定系数 C_k.

3.2.3 Papoulis 的 Legendre 函数展开 [46~48]

$$f(t)=\sum_{n=0}^{N}a_nP_{2n}(\mathrm{e}^{-rt}) \tag{13}$$

逐项进行 Laplace 变换

$$\overline{f}(p)=\sum_{n=0}^{N}a_nL[P_{2n}(\mathrm{e}^{-rt})]=\frac{a_0}{p}+\sum_{n=1}^{N}\frac{(p-r)\cdots[p-(2n-1)]}{p\cdots(p+2nr)}a_n$$

取 $N+1$ 个样本点进行拟合， $F(p)=\overline{f}(p)\mid_{p=(2k+1)r}$, $(k=0,1,\cdots,N)$, 确定系数 a_n.

此外, $f(t)$函数还可以展开成Chebyshev多项式[47], Jacobi 多式[50], Laguerre 多项式 [49,51,52].

事实上，不仅 $f(t)$ 可以进行函数展开，同样可以对函数 $F(p)$ 进行函数展开，然后进行逐项求逆.

3.2.4 Piessens 展开 [51]

$$(p+c)^{\alpha+1}F(p)=\sum_{k=1}^{N}a_kZ^K,\quad Z=\frac{p+c-1}{p+c},\quad F(p)=\frac{1}{(p+c)^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{N}a_kZ^K$$

逐项求逆

$$f(t)=t^n\mathrm{e}^{-ct}\sum_{0}^{N}a_k\frac{k!}{(\alpha+k)!}L_K^{\alpha}\left(\frac{t}{T}\right) \tag{14}$$

多项式展开方法的特点： (1) 数值结果对计算参数的选择依赖性较大. (2) 随着多项式项数的增加，代数方程组的系数矩阵越来越趋于病态，从而产生解的不稳定. (3) 抗干扰性差. $F(p)$ 的小误差会导致 $f(t)$ 较大的误差，对于实际问题， $F(p)$ 多是数值结果而非封闭形式，必然存在误差，因而在求解实际问题时误差往往较大. (4) 在 $0<t<\infty$ 全范围内精度较差.

3.3 基于 Fourier 级数的数值方法 (DAC 法)[53~55]

该法直接从 Laplace 变换的定义出发，导出原函数 $f(t)$ 的 Fourier 级数表达式，余弦级数表达式，正弦级数表达式. 进而将求 $f(t)$ 的问题转化成一个广义积分问题.

从 Laplace 变换的定义出发

$$F(p)=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ct}f(t)[\cos wt-\mathrm{i}\sin wt]\mathrm{d}t,\quad p=c+\mathrm{i}w$$

$$\mathrm{Re}\,F(p)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ct}f(t)\cos wt\mathrm{d}w$$

$$\mathrm{Im}\,F(p)=-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ct}f(t)\sin wt\mathrm{d}w$$

其逆变换为

$$f(t)=f_c(t)=\frac{2\mathrm{e}^{ct}}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\,F(p)\cos wt\mathrm{d}w \tag{15}$$

$$f(t)=f_s(t)=-\frac{2\mathrm{e}^{ct}}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Im}\,F(p)\sin wt\mathrm{d}w \tag{16}$$

另一方面，从 Laplace 逆变换定义出发

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}w}^{c+\mathrm{i}w}F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ct}[\mathrm{Re}\,F(p)+\mathrm{i}\mathrm{Im}\,F(p)]\cdot[\cos wt+\mathrm{i}\sin wt]\mathrm{d}w$$

$f(t)$ 为实数，所以

$$f(t)=\frac{\mathrm{e}^{ct}}{\pi}\int_0^{\infty}[\mathrm{Re}\,F(p)\cos wt-\mathrm{Im}\,F(p)\sin wt]\mathrm{d}w \tag{17}$$

Dubner 和 Abate[53] 首先以式 (15) 为依据，进一步将之离散化，构造了 $f(t)$ 的计算格式

$$f_c(t)=\frac{2\mathrm{e}^{ct}}{T}\left[\frac{1}{2}F(c)+\sum_{K=1}^{\infty}\mathrm{Re}\,F\left(c+\frac{K\pi\mathrm{i}}{T}\right)\cos\frac{K\pi t}{T}\right] \tag{18}$$

Durbin[54] 和 Crump[55] 又先后以式 (16), (17) 为依据构造了 $f(t)$ 的另外两个计算格式

$$f_s(t)=-\frac{2\mathrm{e}^{ct}}{T}\left[\sum_{K=1}^{\infty}\mathrm{Im}\,F\left(c+\frac{K\pi\mathrm{i}}{T}\right)\sin\frac{K\pi t}{T}\right] \tag{19}$$

$$f_d(t)=\frac{\mathrm{e}^{ct}}{T}\left[\frac{1}{2}F(c)+\sum_{K=1}^{\infty}\left[\mathrm{Re}\,F\left(c+\frac{K\pi\mathrm{i}}{T}\right)\cos\frac{K\pi t}{T}-\mathrm{Im}\,F\left(c+\frac{K\pi i}{T}\right)\sin\frac{K\pi t}{T}\right]\right] \tag{20}$$

DAC 法的特点：(1) $f(t)$ 有三种计算格式，而且 $f_d(t)=0.5[f_c(t)+f_s(t)]$. (2) 一般情况下，$f_c(t)$ 与 $f_s(t)$ 偏向相反，当参数 c 选择合适时，其结果比较接近，当参数选择不合适时，其结果相差甚远，有利于识别参数选择的合理性. (3) DAC 法可以很好地计算 $f(t)$ 间断点处的值. $f_c(t)=f(t^+)$, $f_s(t)=f(t^-)$ 而 $f_d(t)=0.5[f_c(t^+)+f_s(t^-)]$. 特别是 $t=0$ 时 $f(t)$ 值必须按此原则进行相应的处理. (4) 用于反演算法的象空间中的样本点 $p_i=c+\mathrm{i}w_i$ 位于距原点为 c 的同一直线上，该距离 c 为一计算参数，其选择对计算精度有明显影响，选择不当，结果会产生较大的误差. (5) 为加速收敛和提高精度，可结合快速 Fouriour 变换 FFT[75] 和外插技术 [76] 对方法进行改进.

3.4 基于积分方程正则化数值方法 [56~69]

此类方法是近十年内发展起来的一种新的求逆数值方法，是在研究不适定积分方程求解的基础上发展起来的. 这种方法将求逆看成是求解第一类 Fredholm 积分方程 [56,59,60], 由于第一类 Fredholm 积分方程是不适定的 [61,62], 不能直接求解，必须首先进行正则化处理 [60,63,66,68,69], 使之成为适定的第二类 Fredholm 积分方程再进行求解.

3.4.1 正则化方法 I[64]

正则化

$$\beta f_\beta+L^*Lf_\beta=L^*g\quad(\beta\text{ 为正则化参数})$$

$$\beta f_\beta(t)+\int_0^{\infty}\frac{f_\beta(u)}{u+t}\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}g(p)\mathrm{d}p$$

离散化

$$\beta f_m+h\sum_{K=-N}^{N}\frac{w_kf_k}{Z_m+Z_K}=h\sum_{K=-N}^{N}w_kg(Z_K)\mathrm{e}^{-Z_mZ_K}$$

近似解

$$f_\beta(t)=f_{\beta,N}(t)=\sum_{m=-N}^{N}f_mS(m,h)\circ\phi(t)\quad(\text{积分方程 Sinc 近似解}) \tag{21}$$

其中 Sinc 函数 [77,78]

$$S(m,h)\circ u=\frac{(-1)^m\sin\frac{\pi}{h}u}{\frac{\pi}{h}(u-mh)}=\frac{\sin\frac{\pi}{h}(u-mh)}{\frac{\pi}{h}(u-mh)},\quad\phi(t)=\log t,\quad Z_K=\mathrm{e}^{kh},\quad w_k=\mathrm{e}^{kh}$$

3.4.2 正则化方法 II [64]

卷积化

$$\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = g(p) \Rightarrow \int_0^\infty H(v-u)F(u)\mathrm{d}u = G(v)$$

其中：

$$t = \mathrm{e}^u, \quad p = \mathrm{e}^{-v} \quad G(v) = \mathrm{e}^{-v}g(\mathrm{e}^{-v}), \quad F(u) = f(\mathrm{e}^u), \quad H(u) = \exp[-\mathrm{e}^{-u}]\mathrm{e}^{-u}$$

Fouriour 变换： $\widetilde{H}(x)\widetilde{F}(x) = \widetilde{G}(x)$, 其中

$$\widetilde{H}(x) = \int_{-\infty}^\infty H(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\mathrm{d}u, \quad \widetilde{G}(x) = \int_{-\infty}^\infty G(v)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vx}\mathrm{d}v$$

Tikhonov[79] 正则化

$$\widetilde{F}_\beta(x) = \frac{\overline{\widetilde{H}}(x)\widetilde{G}(x)}{\beta + |\widetilde{H}(x)|^2} \quad (\overline{\widetilde{H}}(x) \text{ 是 } \widetilde{H}(x) \text{ 共轭})$$

$\widetilde{F}_\beta(x)$ 近似值

$$\widetilde{F}_{\beta,h}(x) = \frac{\overline{\widetilde{H}}_h(x)\widetilde{G}_h(x)}{\beta + \pi x/\sin(\pi x)}$$

其中

$$\widetilde{H}_h(x) = h\sum_{m=-N}^{N} \mathrm{e}^{-mh}\exp(-\mathrm{e}^{mh})\mathrm{e}^{\mathrm{i}mhx}, \quad \widetilde{G}_h(x) = h\sum_{m=-N}^{N} \mathrm{e}^{-mh}g(-\mathrm{e}^{mh})\mathrm{e}^{\mathrm{i}mhx}$$

$f(t)$ 近似值

$$f(t) \approx f_\beta(t) \approx f_{\beta,h}^{(N)}(t) = \sum_{m=-N}^{N} C_m S(m,h)\circ\log(t) \tag{22}$$

其中

$$C_m = \frac{1}{2nh}\left\{\frac{(-1)^m}{2}[\widetilde{F}_{\beta,h}(x_{-n}) + \widetilde{F}_{\beta,h}(x_n)] + \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} \widetilde{F}_{\beta,h}(x_j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kj/N}\right\}$$

$$x_j = \frac{\pi j}{Nh}, \quad j = -N, \cdots, N$$

3.4.3 正则化方法 III [69]

卷积化

$$\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = g(p) \Rightarrow \int_0^\infty H(v-u)F(u)\mathrm{d}u = G(v)$$

其中

$$t = \mathrm{e}^u, \quad p = \mathrm{e}^{-v}, \quad G(v) = \mathrm{e}^{-v}g(\mathrm{e}^{-v}), \quad F(u) = f(\mathrm{e}^u), \quad H(u) = \exp[-\mathrm{e}^{-u}]\mathrm{e}^{-u}$$

Fouriour 变换： $\widetilde{H}(x)\widetilde{F}(x) = \widetilde{G}(x)$, 其中

$$\widetilde{H}(x) = \int_{-\infty}^\infty H(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\mathrm{d}u, \quad \widetilde{G}(x) = \int_{-\infty}^\infty G(v)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vx}\mathrm{d}v$$

Tikhonov[79] 正则化

$$\widetilde{F}_\beta(x) = \frac{\overline{\widetilde{H}}(x)\widetilde{G}(x)}{\beta + |\widetilde{H}(x)|^2} \quad (\overline{\widetilde{H}}(x) \text{ 是 } \widetilde{H}(x) \text{ 共轭})$$

Fouriour 展开

$$\widetilde{F}_\beta(x)=\widetilde{F}_{\beta,h}(x)=\sum_{k=-N}^{N}C_k(\beta,h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}khx}\widetilde{G}(x)$$

Fouriour 逆变换

$$F_{\beta,h}(u)=\sum_{k=-N}^{N}C_kG(u-kh)$$

还原

$$f_\beta(t)=f_{\beta,h}^{(N)}(t)=F_{\beta,h}^{N}(\lg t)/\sqrt{t}=\sum_{k=-N}^{N}C_kg(\mathrm{e}^{kh}/t)(\mathrm{e}^{kh/2}/t) \tag{23}$$

基于正则化方法的特点：(1) 有若干计算参数需要事先确定，如正则化参数等. 这些参数的取值，对结果有明显的影响，除经验外，还可以利用优化算法进行参数优化 [57,63]. (2) 方法具有一定的抗干扰能力，当 $F(p)$ 存在误差 (noisy data) 时，数值结果仍有相当的稳定性. (3) 适用求解的函数 $f(t)$ 范围较宽，一般当 $f(t)\in L^2(0,\infty)$ 时均适用此法.

4 结束语

积分变换技术是处理粘弹性问题的重要数学工具. 不论是准静态粘弹性问题，动态粘弹性问题，还是热力耦合粘弹性问题，利用 Laplace 变换，在象空间总可以将粘弹性问题与弹性问题对应起来. 从而利用已有的边值问题求解方法求解粘弹性混合边值问题，再借助积分变换反演数值方法求得时间域的解. 积分变换数值反演方法很多，在求解粘弹性混合边值问题中已有广泛应用. 在准静态粘弹性问题中的应用有 T. Hear (1951)[40], R.A. Shapary (1962)[41], L. Cost (1964)[70], G.V. Narayanan (1982)[74] 等. 在动态粘弹性问题中的应用有 S.R. Swanson (1980)[19], G. Caviglia (1990)[23], H.G. Georgiodis (1993)[25], 杨挺青 (1987, 1990)[80,81] 等. 在热力耦合粘弹性问题中的应用有 L.S. Chien (1981)[30]. 从这些数值反演方法在求解粘弹性混合边值问题的具体应用中可以发现基于 $\delta(x-x_0)$ 函数的数值方法一般误差较大，主要起因于处理粘弹性边值问题时很难利用 $F(p)$ 高阶导数的信息. 基于 $f(t)$ 函数展开的数值方法要提高精度，就必须增加项数，而这又可能引起解的不稳定. DAC 法是一种比较好的方法，项数增加时不会引起解的不稳定，项数很大时还可以借助快速 Fourier 变换 (FFT) 提高计算效率，同时还可以处理 $f(t)$ 具有间断点的情况. 基于积分方程正则化的数值反演方法，是近年来发展起来的新的数值求逆方法，其主要特点是适用反演函数范围宽，反演方法稳定性好. 这种方法都是应用数学家的研究成果，其收敛性、稳定性尽管在数学上都得到证明 [64], 但由于方法依据的数学理论较深，在求解粘弹性混合边值问题时还较少应用，其计算效率、精度、稳定性、适用范围还有待大量粘弹性边值问题的实例来证实. 此外，总体上看，这 4 类方法还存在下列不足之处：(1) 每种方法都有自己适于反演的函数类，如果待反演的函数不属于这个函数类，则反演结果就会产生较大的误差. (2) 许多方法都需要事先确定若干计算参数 (如 DAC 法中的计算参数 c, 正则化方法中的正则化参数 β 等). (3) 许多方法对计算参数的依赖性很大，使数值结果对计算参数的选择过分敏感，从而造成方法使用的困难. (4) 如果事先对 $f(t)$ 函数的性质缺乏认识，则会给选择合适的数值反演方法造成困难.

在实际应用中，为了确保数值反演结果的可靠性，建议在使用数值反演方法时应同时采用几种方法，并将数值结果进行对比，若结果趋于一致，则认为数值反演结果的可靠性得到保证. 若结果偏差较大，则利用数值结果反馈的 $f(t)$ 性质，对比方法适用的函数类进行分析，剔除不

合适的算法及相应的数值结果. 鉴于 Laplace 积分变换数值反演方法在求解粘弹性边值问题中的重要性，为确保数值反演结果的可靠性，和进一步提高数值结果的精度，数值反演算法仍需要进一步深入研究. 进一步的研究重点应在: (1) 扩大算法适用的函数类. (2) 降低计算结果对计算参数的依赖性. (3) 提高算法在干扰 (noisy data) 存在下的稳定性.

参 考 文 献

1 Christensen R M. Theory of Viscoelasticity, An Introduction. Academic Press, 1982 (中译本：克里斯坦森. 粘弹性力学引论. 北京：科学出版社， 1990)

2 Bland D R. The Theory of Linear Viscoelasticity. Oxford: Pergamon Press Oxford, 1960

3 蔡峨. 粘弹性力学基础. 北京：北京航空航天大学出版社， 1989

4 杨挺青. 粘弹性力学. 武汉：华中理工大学出版社， 1990

5 周光泉，刘孝敏. 粘弹性理论. 合肥：中国科学技术大学出版社， 1996

6 沈亚鹏，李录贤，王晓明. 粘弹性准静态、动态问题的数值解法. 力学进展， 1994, 24: 265~272

7 Alfrey T. Nonhomogenous stresses in viscoelastic media. *Q Appl Math,* 1944, 2: 113~116

8 Tsien H S(钱学森). A generalization of Alfrey's theorem for viscoelastic media. *Q Appl Math,* 1950, 8: 104~106

9 Read W T. Stress analysis for compressible viscoelastic materials. *Q Appl Phys,* 1950, 21: 671~674

10 Lee E H. Stress analysis in viscoelastic bodies. *Q Appl Math,* 1955, 13: 183~190

11 Rizzo F J, Shippy D J. An application of the correspondence principle of linear viscoelasticity theory. *SIAM, J Appl Math,* 1971, 21(2): 321~330

12 Carini A, De Donato G. Fundamental solutions for linear viscoelastic continua. *Int J Soli Stru,* 1992 , 29: 2989~3009

13 Kovarik-v. Distributional concept of the elastic viscoelastic correspondence principle. *J Appl Mech, Transactions of the ASME,* 1995, 62: 847~852

14 Tao L N. The associated elastic problems in dynamic viscoelasticity. *Q Appl Math,* 1963, 21: 215~222

15 Fung Y C. Foundation of Solid Mechanics. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc, 1965

16 Dasgupta G, Sackman J L. An alternative representation of the elastic viscoelastic correspondance principle for harmonic osillations. *J Appl Mech,* 1977, 45: 57~60

17 Dasgupta G, Sackman J L. An quadrature representation of the viscoelastic analogy in the frequency domain. *J Appl Mech,* 1978 , 45: 955~956

18 Hashin Z. Vibration analysis of viscoelastic bodies with small loss tangents. *Int J Solids Struct,* 1977, 13: 549~552

19 Swanson S R. Approximate Laplace transform inversion in dynamic viscoelasticity. *J Appl Mech,* 1980, 47: 769~774

20 杨桂通，张善元. 弹性动力学. 北京：中国铁道出版社， 1988

21 阿肯巴赫著. 弹性固体中波的传播. 徐植信，洪锦如译. 上海：同济大学出版社， 1992

22 Herrera J, Gurtin M E. A correspondence principle for viscoelastic wave propagation. *Q Appl Math,* 1964, 22: 360~364

23 Caviglia G. Inhomogenous waves in viscoelastic media. *Wave Motion,* 1990, 12: 143~159

24 Georgiadis H G. Plane impact of a cracked viscoelastic body. *Int J Engng Sci,* 1991 , 29: 171~177

25 Georgiadis H G. Shear and torsional impact of cracked viscoelastic body——a numerical integer equation/transform approach. *Int J Soli Stru,* 1993, 30: 1891~1906

26 Graham G A C. The correspondance principle of linear viscoelasticity theory for mixed boundary regions. *Q Appl Math,* 1968, 26: 167~174

27 Ting T C T. A mixed boundary value problem in viscoelasticity with time-dependent boundary regions. In: Proceeding of the Eleventh Midwestern Mechanics Conference. Iowa University Press, 1969. 591~598

28 张淳源. 热粘弹性断裂力学基本方程. 湘潭大学自然科学学报， 1990, 12: 22~27

29 张淳源. 粘弹性断裂力学. 武汉：华中理工大学出版社， 1994

30 Chien L S, Tzeng J T. Thermal viscoelastic analysis for thick-walled composite cylinders. *Journal of Composite Materials,* 1995, 29: 525~548

31 张淳源. 论线粘弹性裂纹体的流变断裂. 科学探索， 1981, 1: 29~42

32 Graham G A C. The correspondence principle of linear viscoelasticity for problems that involve time-depandent regions. *Int J Engng Sci,* 1973, 11: 123~140

33 Graham G A C, Walton J R. Crack and Contact Problems for Viscoelastic Bodies. New York: Springer-Verlag Wien, 1995

34 胡强，童忠钫. 非线性粘弹性拟静态问题与非线性弹性静力问题对应原理. 应用力学学报， 1991, 8: 63~66

35 宁亚琴. Laplace 变换表的一些补充结果. 湘潭大学自然科学学报， 1989, 11: 5~10

36 宁亚琴. $\delta^n(t)$ 函数及其在 Laplace 变换中的应用. 湘潭大学自然科学学报, 1991, 13: 46~51
37 钟玉泉. 复变函数论. 北京: 高等教育出版社, 1991
38 Miklowitz J. The Theory of Elastic Wave and Wavequides. North-Holland Company, 1978
39 Widder D V. The Laplace Transform. Princeton: Princeton University Press, 1946
40 Hear T. An easy approximate method of determing the relaxation spectrum of a viscoelastic material. *J Polymer Sci,* 1951, 6: 247~249
41 Schapary R A. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. *ASME,* 1962, 2: 1075~1085
42 Zakian V. Numerical inversion of Laplace transform. *Etron Lett,* 1969, 5: 120~121
43 Zakian V. Optimization of numerical inversion of Laplace transform. *Etron Lett,* 1970, 6: 677~679
44 Zakian V, Gannon D R. Least squares optimization of numerical inversion of Laplace transform. *Etron Lett,* 1971, 7: 70~71
45 Stehfest H. Numerical inversion of Lapalce transforms. *Comm Acm,* 1970, 13: 47~49
46 Papoulis A. A new method of inversion of the Laplace transform. *Q Appl Math,* 1956,14: 405~414
47 Lanczos C. Applied Analysis. Lonton: Pitman, 1957
48 Bellman R, Kalaba R E, Lockett J A. Numerical Inversion of The Laplace Transform. New York: Elsevier, 1966
49 Weeks W T. Numerical inversion of Laplace transform using Laguerre functions. *J Asso Comp Mach,* 1966, 13: 419~429
50 Miller M K, Guy W T. Numerical inversion of Laplace transform by use of Jacobi polynomials. *SIAM J Numer Anal,* 1966, 3: 624~635
51 Piessens R, Branders M. Numerical inversion of Laplace transform using generalized Laguerre polynomials. *Proc Iee,* 1971, 118: 1517~1522
52 Lyness J N, Giunta G. A modification of the Week's method for numerical inversion of the Laplace transform. *Math Comp,* 1986, 47: 313~322
53 Dubner H, Abate J. Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fouriour cosine transform. *J Asso Comp Mach,* 1968, 15: 115~123
54 Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner & Abate's method. *Comp J,* 1974, 17: 371~376
55 Crump K S. Numerical inversion of Laplace transforms using a Fouriour series approximation. *J Asso Comp Mach,* 1976, 23: 89~96
56 Delves L M. A fast method for the solution of fredholm integral equations. *J Inst Math Appl,* 1977, 20: 173~182
57 Babolian E, Delves L M. An augmented Galerkin method for first fredholm equations. *J Inst Math Appl,* 1979, 24: 157~174
58 Demottoni P, Talenti G. Stabilization and error bounds for the inverse Laplace transform. *Numer Funct Anal Optim,* 1981, 3: 265~283
59 Davies A R. On the maximum likelihood regularization of fredholm convolution equation of first kind. In: Treatment of Integral Equations by Numerical Methods. New York: Academic Press, 1982, 95~105
60 Martz J T. On a regularization method for fredholm equation of the first kind using Sobolev spaces. In: Treatment of Integral Equations by Numerical Methods. New York: Academic Press, 1982, 59~66
61 Varah J M. Pitfalls in the numerical solution of linear ill-posed problems. *SIAM J Stat Comp,* 1983, 4: 164~176
62 Trummer M. A method of solving ill-posed linear operator equations. *SIAM J Numer Anal,* 1984, 21: 729~737
63 Essah W A, Delves L M. On the numerical inversion of Laplace transform. *Inverse Problems,* 1988, 4: 705~724
64 Ang D D, Lund J, Stenger F. Complex variable and regularization methods of invertion of Laplace transform. *Math Comp,* 1989, 53: 589~608
65 Plato R, Vainikko G. On the reguarization of projection methods for solving ill-posed problems. *Numer Math,* 1990, 57: 63~79
66 Brianzi P, Frontion M. On the regularized in version of Laplace transform. *Inverse Problem,* 1991, 7: 355~365
67 Cunha C, Viloche F. The laguerre function in the inversion of the Laplace transform. *Inverse Problems,* 1993, 9: 57~68
68 AL-Shuaibi A. A regularized method for the approximate inversion of Laplace transform. *Approx Theor Appl,* 1997, 13: 58~66
69 AL-Shuaibi A. On the Laplace transforms by the use of a regularized displacement operator. *Inverse Problems,* 1997, 13: 1153~1160
70 Cost L. Approximate Laplace transform inversions in viscoelastic stress analysis. *AIAA Journal,* 1964, 2: 2157~2166
71 Piessens R. A bibliography on numerical inversion of the Laplace transform and applications. *J Comp Appl Math,* 1976, 1: 115~128
72 Piessens R, Dang N D P. A bibliography on numerical inversion of the Laplace transform and applications: a supplement. *J Comp Appl Math,* 1976, 2: 225~228

73 Davies B, Martin B. Numerical inversion of the Laplace transform: a surver and comparision of methods. *J Comp Phys,* 1979, 33: 1~32
74 Narayanan G V. Numerical operational methods for time-dependent linear problems. *Int J Numer Methods Eng,* 1982, 18: 1829~1854
75 孙仲康. 快速 Fouriour 变换及其应用. 北京：人民邮电出版社， 1981
76 Macdonald R. Accelerated convergence, divergence, iteration, extrapolation,and curvefitting. *J Appl Phys,* 1964, 35: 3034~3041
77 Stenger F. Numerical methods based on the whittaker cardinal, or Sinc function. *SIAM Rev,* 1981, 23: 165~224
78 Lund J, Bowers K. Sinc Function. Philadelphia, 1992
79 Tikhonov A N, Arsenin V Y. Solution of Ill-posed Problems. Washington: Winston, 1977
80 杨挺青，王胜凯，黄玉盈. 粘弹性轴对称平面问题的动态响应. 固体力学学报， 1987, 1: 78~86
81 杨挺青，杨政. 粘弹性基支粘弹板轴对称问题的动力响应. 力学学报， 1990, 22: 217~222

CORRESPONDENCE PRINCIPLES AND NUMERICAL METHODS OF INVERSE INTEGRAL TRANSFORMATION IN VISCOELASTIC MECHANICS

Wei Peijun Zhang Shuangyin Wu Yongli

Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080

Abstract Integral transformation method is an important mathematical tool, when dealing with viscoelastic mixed boundary problems. By using integral transformation method, viscoelastic mixed boundary problems can be made to correspond with elastic mixed boundary problems, which is the well-known correspondence principle. Then, the methods used for elastic mixed boundary problems, and the inverse integral transformation method may be employed to solve viscoelastic mixed boundary problems in time domain. This paper gives a comprehensive review on various correspondence principles and inverse integral transformation methods used in practice, and according to the applications of various methods in viscoelastic mixed boundary problems, discusses related problems and prospective for developing new methods.

Keywords viscoelasticity, correspondence principle, integral transformation, inverse Laplace transformation