

广义自治 Mori-Tanaka 模型及涂层 夹杂体复合材料的有效模量^{*}

戴兰宏^{**} 黄筑平 王仁

(北京大学力学与工程科学系, 北京, 100871)

摘要 经典广义自治模型的最大不足是需要确定相材料的位移及应变场, 这一过程十分繁杂, 而且最后得到的有效剪切模量无法显式表达, 难以应用。该文摈弃这一经典做法, 而从广义自治模型的应变等价条件出发, 在夹杂应变均匀的近似假定下, 将 Hill 界面条件应用于整个二相体内, 从而得到一种可以预报涂层夹杂体复合材料有效模量的广义自治 Mori-Tanaka 模型。与已有的实验及理论结果的比较表明, 该模型准确可靠, 而且有效体积和剪切模量均能显式表达。同时证实, 以上的 Hill 界面条件应用于二相体内相当于 Mori-Tanaka 平均场近似。

关键词 涂层夹杂, 有效模量, 广义自治, 复合材料

1 引言

为了发展高性能的强韧化结构材料及功能梯度材料, 在夹杂表面涂以既别于夹杂相又异于基体相的第三相——界面相, 是近年倍受人们关注的一种重要尝试, 而从细观力学理论出发, 准确预报此类微观非均匀多相复合材料的有效性能, 进而进行性能裁剪或优化设计, 则是一项非常有意义的研究工作。尽管在过去的几十年中, 传统的夹杂基体二相及混杂多相复合材料有效性能的预测取得了巨大成功, 而且发展了若干种细观力学模型, 如自治模型^[1,2]、微分自治模型^[3]、Mori-Tanaka 理论^[4,5]、广义自治模型(三相球模型)^[6~9]及有效自治模型^[10,11]等, 然而, 由于这些模型大多未计及界面相效应, 原则上无法直接用于涂层夹杂问题。众所周知, 复合材料宏观性能的优劣很大程度上取决于界面相的行为。因此, 为了准确预报涂层夹杂体复合材料的有效性能, 必须计及界面效应。

1969 年 Matonis^[12]首次报道了涂层刚性粒子细观应力场的分析工作。此后, 卢锡年^[13]和吴永礼^[14]等人利用三维有限元技术详细研究了界面层对粒子填充复合材料细观应力场的影响。Walpole^[15]较早从细观力学角度研究薄涂层的引入对复合材料有效性能的影响。由于他假设夹杂中的应力应变场不受涂层的影响, 因而实际上并没有真正计及界面相效应。Cherkaoui 等^[16]利用自治模型研究了涂层夹杂体复合材料的有效模量, 但仅在材料不可压和极薄涂层假设前提下, 方能给出有效模量的一般表达式。最近, Herve 和 Zaoui^[17]将广义自治模型推广至 n 层涂层夹杂问题, 他通过解析求解诸相材料的位移及应变场, 进而求出复合材料的有效模量。但遗憾的是, 仅有效体积模量能显式表达, 而有效剪切模量的确定仍同传统

* 国家自然科学基金(批准号: 19632030, 19572008)资助课题。

** 现在通讯地址为: 中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室, 北京, 100080。

1997-10-21 收稿。

的二相材料的 Christensen 的广义自洽模型一样,需要解二次型方程。而且随层数的增加,方程中需要确定的常数迅速增多,不仅计算繁杂,同时也难以实际应用。

本文摈弃经典的广义自洽模型需繁杂地确定相材料位移及应变场的做法,从广义自洽模型的应变等价条件出发,在夹杂应变均匀的近似假定下,将 Hill 界面条件应用于整个二相体内,从而得到一种可以预报涂层夹杂体复合材料有效模量的广义自洽 Mori-Tanaka 模型。与已有的实验及理论结果比较表明,本模型准确可靠,并且有效模量能显式表达,易于应用。

2 广义自洽 Mori-Tanaka 模型

对于夹杂基体二相复合材料 V ,仿广义自洽模型的几何构型(图 1),夹杂、基体及均匀等效介质的弹性模量张量分别为 L^I 、 L^M 及 \bar{L} 。远场边界条件为 $u|_{\infty} = Ex$,则其中任一点应变可表示成如下的 Lippman-Schwinger-Dyson 型积分方程^[18]

$$\boldsymbol{\epsilon}(x) = \mathbf{E} - \int_V \Gamma^0(x - x') : \delta L(x') : \boldsymbol{\epsilon}(x') dx' \quad (1)$$

其中 x 为位置矢量, \mathbf{E} 为宏观均匀应变, $L(x)$ 为局部弹性模量张量, $\delta L(x)$ 为局部弹性模量与均匀比较材料弹性模量 L^0 之差,而 $\Gamma^0(x - x')$ 为均匀比较材料的应变 Green 函数张量,具体形式可写为

$$\Gamma_{nclj}^0(x - x') = -[G_{nj}(x - x') + G_{mj}(x - x')] / 2 \quad (2)$$

现取均匀等效介质为比较材料,并定义

$$\Delta L^I = L^I - \bar{L}, \quad \Delta L^M = L^M - \bar{L} \quad (3)$$

由(1)知,复合球(夹杂+基体壳) V_2 平均应变为

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{E} - \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \int_{V_I} \Gamma(x - x') : \Delta L^I : \boldsymbol{\epsilon}(x') dx dx' - \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \int_{V_M} \Gamma(x - x') : \Delta L^M : \boldsymbol{\epsilon}(x') dx dx' \quad (4)$$

因 $\int_{V_2} \Gamma(x - x') dx$ 在 V_2 内是均匀^[19]的,记

$$\mathbf{P}(\bar{L}) = \int_{V_2} \Gamma(x - x') dx, \quad x \in V_2 \quad (5)$$

则(4)式可写为

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{E} - \frac{V_I}{V_2} \mathbf{P}(\bar{L}) : \Delta L^I : \boldsymbol{\epsilon}^I - \frac{V_M}{V_2} \mathbf{P}(\bar{L}) : \Delta L^M : \boldsymbol{\epsilon}^M \quad (6)$$

其中 $\boldsymbol{\epsilon}^I, \boldsymbol{\epsilon}^M$ 分别为夹杂相和基体相的平均应变,定义如下

$$\boldsymbol{\epsilon}^I = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \boldsymbol{\epsilon}(x) dx, \quad \boldsymbol{\epsilon}^M = \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \boldsymbol{\epsilon}(x) dx \quad (7)$$

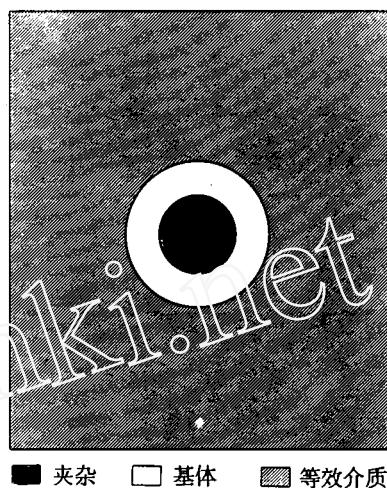


图 1 二相材料的广义自洽(三相球)模型

根据广义自洽模型的应变等价条件^[17],则(6)式可写为

$$f_I \mathbf{P}(\mathbf{L}) : \Delta \mathbf{L}^I : \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + f_M \mathbf{P}(\bar{\mathbf{L}}) : \Delta \mathbf{L}^M : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^M = 0 \quad (8)$$

其中 $f_I = V_I / V_M$ 和 $f_M = V_M / V_2$ 分别为夹杂和基体的体积分数。显然,只要知道 $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^M$ 便可以由上式求出复合材料的有效模量 \mathbf{L} 。

现假定夹杂内应变均匀,利用 Hill^[20,21]界面条件,在夹杂和基体界面两侧,有如下的应变跳跃关系

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^M(x^-) = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + [\mathbf{P}(\mathbf{L}^M) - \mathbf{Q}(\mathbf{L}^M, x^-)] : \Delta \mathbf{L}^M : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^M \quad (9)$$

其中 $\Delta \mathbf{L}^M = \mathbf{L}^I - \mathbf{L}^M$, x^- 位于基体一侧界面上,而 $\mathbf{Q}(\mathbf{L}^M, x^-)$ 定义为

$$\mathbf{Q}(\mathbf{L}^M, x^-) = \int_{V_I} \Gamma^M(x^- - x') dx' \quad (10)$$

其中 $\Gamma^M(x - x')$ 为基体材料中的应变 Green 函数张量。

对基体应变取平均,有

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^M = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{1}{V_M} \int_{V_M} [\mathbf{P}(\mathbf{L}^M) - \mathbf{Q}(\mathbf{L}^M)] : \Delta \mathbf{L}^M : \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dx \quad (11)$$

当 V_1, V_2 为两自相似椭球体时,不难证明有

$$\int_{V_M} \mathbf{Q}(\mathbf{L}^M, x^-) dx^+ = \int_{V_M} \int_{V_I} \Gamma^M(x^- - x') dx^- dx' = 0 \quad (12)$$

于是(11)式最后写为

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^M = \mathbf{H} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (13)$$

$$\text{其中 } \mathbf{H} = \mathbf{I} + \mathbf{P}(\mathbf{L}^M) : \Delta \mathbf{L}^M \quad (14)$$

对各向同性弹性体,其弹性模量张量 \mathbf{L} 可表示为 $\mathbf{L} = (3k, 2\mu)$ 。对球形夹杂, $\mathbf{P}(\mathbf{L})$ 为

$$\mathbf{P}(\mathbf{L}) = \left[\frac{1}{3k^*}, \frac{1}{2\mu^*} \right] \quad (15)$$

$$\text{其中 } k^* = \frac{1}{3}(3k + 4\mu), \quad \mu^* = \frac{5}{6} \frac{\mu(3k + 4\mu)}{k + 2\mu} \quad (16)$$

其中 k, μ 分别为体积和剪切模量。

现引入 McLaughlin 张量运算规则^[3],

于是(14)式具体写为

$$\mathbf{H} = (h_k, h_\mu) \quad (17)$$

$$\text{其中 } h_k = 1 + \frac{3(k_I - k_M)}{3k_M + 4\mu_M}, \quad h_\mu = 1 + \frac{6}{5} \frac{(\mu_I - \mu_M)(k_M + 2\mu_M)}{\mu_M(3k_M + 4\mu_M)} \quad (18)$$

而 $k_I, k_M; \mu_I, \mu_M$ 分别为夹杂和基体的体积模量和剪切模量。利用以上诸式,联解(8)和(13)便可得到二相复合材料有效体积模量和剪切模量的显式表达

$$\frac{k}{k_M} = 1 + \frac{f_I(k_I/k_M - 1)}{f_I + f_M h_k} \quad (19a)$$

$$\frac{\mu}{\mu_M} = 1 + \frac{f_I(\mu_I/\mu_M - 1)}{f_I + f_M h_\mu} \quad (19b)$$

有趣的是,这一结果与 Mori-Tanaka 理论(MT)所预测的结果^[1]不谋而合。其实,式(14)中的 \mathbf{H} 张量的逆 \mathbf{H}^{-1} 实际上就是 Mori-Tanaka 理论中的对偶 Eshelby 张量 \mathbf{G} ^[3]。在远场给定均匀应变条件下,根据 Christensen 广义自洽模型(GSC)位移模式的假定^[6],可以精确计算图 1 所示的基体壳平均应变与夹杂核平均应变。结果表明,二者平均体应变之间的关系恰好由

(14)式描述;二者平均偏应变之间存在复杂的非线性关系,而(14)式给出一种良好的线性近似(图 2).经验证,这一线性近似也恰是 Mori-Tanaka 平均场理论近似,这一比较同时也清楚地给出了 MT 与 GSC 差别之所在.这说明,关于夹杂内均匀应变假定实质上相当于 Mori-Tanaka 平均场近似.

需要强调指出的是,本模型既不同于基于 Eshelby 等效夹杂思想的 Mori-Tanaka 理论也不同于经典的 Christensen 广义自治模型,后者需要通过位移模式的假设,求解相材料的位移和应变场.而且,与经典的 GSC 相比,本方法可以方便地推广至椭球夹杂、各向异性等多种情况.将这种从广义自治模型的应变等价条件出发,根据夹杂内均匀应变假定并利用 Hill 界面条件所导出的模型称为广义自治 Mori-Tanaka 等模型(GSCMT).

3 涂层夹杂体复合材料有效模量

现考虑夹杂、涂层及基体三相复合材料,如图 3 所示.夹杂、涂层、基体及等效介质弹性模量张量分别为 L^I , L^C , L^M 及 \bar{L} ,它们各自占有的体积分别为 V_I , V_C 及 V_M . 定义

$$\text{复合夹杂: } V_2 = V_I + V_C \quad (20a)$$

$$\text{复合球: } V_3 = V_2 + V_M \quad (20b)$$

则夹杂、涂层及基体的体积分数分别为 $f_I = V_I/V_3 = (R_I/R_3)^3$, $f_C = V_C/V_3 = ((R_2)^3 - (R_I)^3)/(R_3)^3$ 及 $f_M = V_M/V_3 = ((R_3)^3 - (R_2)^3)/(R_3)^3$.若将由夹杂和涂层所组成的复合夹杂等效为一均匀夹杂,则在远场给定均匀位移边界条件下,利用上节提出的广义自治 Mori-Tanaka 模型,类似地可以得到如下一组方程

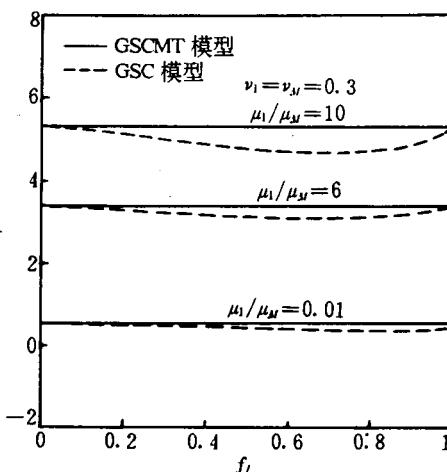


图 2 GSC 模型和 GSCMT 模型平均偏应变比较

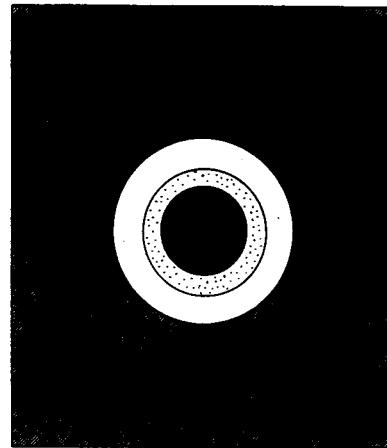


图 3 广义自治 Mori-Tanaka(四相球)模型

$$\frac{V_2}{V_3} \mathbf{P}(\bar{L}) : \Delta \mathbf{L}^{(2)} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2)} - \frac{V_M}{V_3} \mathbf{P}(\bar{L}) : \Delta \mathbf{L}^M : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^M = 0 \quad (21)$$

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2)} + \mathbf{P}(L^C) : \Delta \mathbf{L}^C : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2)} \quad (22)$$

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^M = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2)} + \mathbf{P}(L^M) : \Delta \mathbf{L}^{(2)M} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2)} \quad (23)$$

其中 $\Delta \mathbf{L}^{(2)} = L^{(2)} - \bar{L}$, $\Delta \mathbf{L}^M = L^M - \bar{L}$, $\Delta \mathbf{L}^C = L^I - L^C$, $\Delta \mathbf{L}^{(2)M} = L^{(2)} - L^M$. 而 $L^{(2)}$ 为复合夹杂的

有效弹性模量,其大小则由上节二相材料的广义自治 Mori-Tanaka 模型来确定。 $\bar{\epsilon}^{(2)}$ 为复合夹杂的平均应变,定义为

$$\bar{\epsilon}^{(2)} = \frac{V_I}{V_2} \bar{\epsilon}^I + \frac{V_C}{V_2} \bar{\epsilon}^C = \frac{f_I}{f_I + f_C} \bar{\epsilon}^I + \frac{f_C}{f_I + f_C} \bar{\epsilon}^C \quad (24)$$

现将(22)和(24)分别写为如下形式

$$\bar{\epsilon}^C = \mathbf{H}^C : \bar{\epsilon}^I \quad (25)$$

$$\bar{\epsilon}^{(2)} = \mathbf{H}^{(2)} : \bar{\epsilon}^I \quad (26)$$

其中

$$\mathbf{H}^C = \mathbf{I} + \mathbf{P}(\mathbf{L}^C) : \Delta \mathbf{L}^{IC} \quad (27)$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = \frac{f_I}{f_I + f_C} \mathbf{I} + \frac{f_C}{f_I + f_C} \mathbf{H}^C \quad (28)$$

而(23)则可以写为

$$\bar{\epsilon}^M = \mathbf{D} : \bar{\epsilon}^I \quad (29)$$

其中

$$\mathbf{D} = (\mathbf{I} + \mathbf{P}(\mathbf{L}^M) : \Delta \mathbf{L}^{(2)M}) : \mathbf{H}^{(2)} \quad (30)$$

对于各向同性材料,有 $\mathbf{L} = (3k, 2\mu)$, $\mathbf{P}(\mathbf{L}) = (1/3k^*, 1/2\mu^*)$, 则 \mathbf{H}^C 、 $\mathbf{H}^{(2)}$ 及 \mathbf{D} 可分别表示为

$$\mathbf{H}^C = (h_k^C, h_\mu^C), \quad \mathbf{H}^{(2)} = (h_k^{(2)}, h_\mu^{(2)}), \quad \mathbf{D} = (d_k, d_\mu) \quad (31)$$

而复合夹杂的弹性模量张量 $\mathbf{L}^{(2)} = (3k_{(2)}, 2\mu_{(2)})$, 其中 $k_{(2)}$, $\mu_{(2)}$ 则由(19)式确定.

将(22)~(31)诸式代入(21),同样引入 McLaughlin's 张量运算规则,则得到涂层夹杂体复合材料有效体积模量和剪切模量的显式表达

$$\frac{k}{k_M} = 1 + \frac{(f_I + f_C)(k_{(2)}/k_M - 1)h_k^{(2)}}{(f_I + f_C)h_k^{(2)} + (1 - f_I - f_C)d_k} \quad (32a)$$

$$\frac{\mu}{\mu_M} = 1 + \frac{(f_I + f_C)(\mu_{(2)}/\mu_M - 1)h_\mu^{(2)}}{(f_I + f_C)h_\mu^{(2)} + (1 - f_I - f_C)d_\mu} \quad (32b)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} h_k^C = 1 + \frac{3(k_I - k_C)}{3k_C + 4\mu_C}, \quad h_\mu^C = 1 + \frac{6}{5} \frac{(\mu_I - \mu_C)(k_C + 2\mu_C)}{\mu_C(3k_C + 4\mu_C)} \\ h_k^{(2)} = \frac{1}{f_I + f_C} [f_I(3k_C + 4\mu_C) + f_C(3k_I + 4\mu_C)] \\ h_\mu^{(2)} = 1 + \frac{f_C}{f_I + f_C} \frac{6}{5} \frac{(\mu_I - \mu_C)(k_C + 2\mu_C)}{\mu_C(3k_C + 4\mu_C)} \\ d_k = \frac{f_I(3k_C + 4\mu_C)(3k_I + 4\mu_M) + f_C(3k_I + 4\mu_C)(3k_C + 4\mu_M)}{(f_I + f_C)(3k_C + 4\mu_C)(3k_M + 4\mu_M)} \\ d_\mu = \frac{\mu_M(9k_M + 8\mu_M)(f_I + f_C h_k^C) + 6(k_M + 2\mu_M)(f_I \mu_I + f_C \mu_C h_\mu^C)}{5\mu_M(3k_M + 4\mu_M)} \end{array} \right. \quad (33)$$

容易发现,若将 $f_C = 0$ 或 $k_C = k_M$, $\mu_C = \mu_M$ 代入(32)则得到二相材料有效模量表达式(19).

4 模型检验

为了检验本模型结果的可靠性,现特与已有的理论及实验结果作一比较. 若将 $f_I(R_1/R_3)^3$, $f_C = [(R_2)^3 - (R_1)^3]/(R_3)^3$ 及 $f_M = [(R_3)^3 - (R_2)^3]/(R_3)^3$ 和(33)代入(32a),则得到与 Herve 和 Zaoui^[17]完全一样的有效体积模量表达式

$$k = k_M +$$

$$\frac{(3k_M + 4\mu_M)R_i^*(k_l - k_c)R_i^*(3k_M + 4\mu_c) + (k_l - k_M)R_i^*(3k_l + 4\mu_c)}{(3k_l - k_l)R_i^*[R_{i2}(3k_M + 4\mu_c) + 4R_i^*(\mu_M - \mu_c)] + (3k_l + 4\mu_c)R_i^*[3R_i^*(k_M - k_c) + R_i^*(3k_l + 4\mu_M)]}$$

由于 Herve 和 Zaoui 不能给出有效剪切模量的显式,因此无法从表达式上进行直接比较,但 Herve 和 Zaoui 给出了有效剪切模量随涂层体积分数 f_c 及涂层与基体剪切模量比 μ_c/μ_M 变化曲线。用本模型有效剪切模量显式表达式(32b)作相应的计算与之比较的结果示如图 4 和图 5,结果发现二者十分接近。

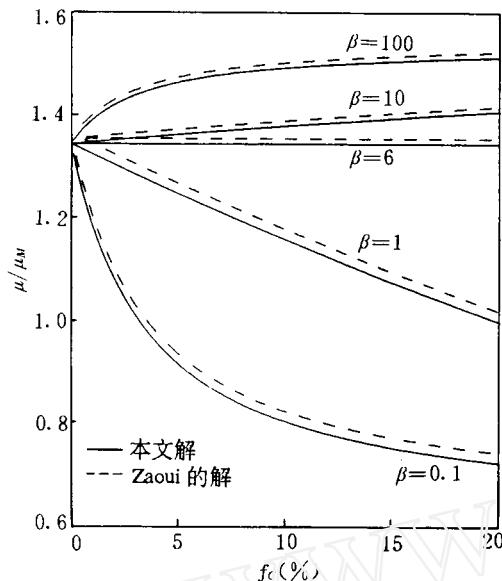


图 4 复合材料归一化有效剪切模量($\bar{\mu}/\mu_M$)随涂层夹杂体积分数变化

$$\begin{aligned} & (\beta = \mu_c/\mu_M, \mu_l/\mu_M = 6 \\ & v_l = v_c = v_M = 0.3, f_l + f_c = 0.2) \end{aligned}$$

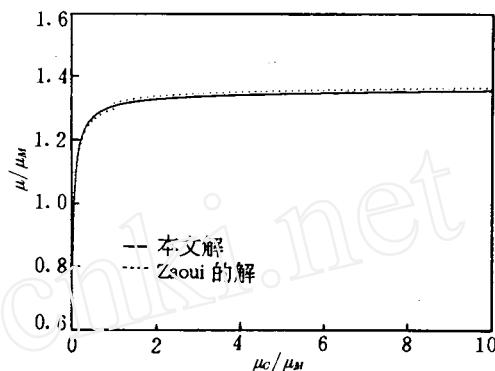


图 5 复合材料归一化有效剪切模量($\bar{\mu}/\mu_M$)随 μ_c/μ_M 变化

$$\begin{aligned} & (\mu_l/\mu_M = 6, v_l = v_c = v_M = 0.3 \\ & f_l = 0.18, f_c = 0.02) \end{aligned}$$

Huang 和 Gibson^[22]曾对空心玻璃球填充聚脂基复合材料的弹性模量进行理论研究和实验研究,该材料可以看成是夹杂为空洞、涂层为玻璃的涂层夹杂体复合材料,Cherkaoui 等^[16]曾用自洽模型估计了该材料的有效弹性模量。本模型的解与他们的结果比较如图 6 所示,组分相的材料参数如表 1 所示。从图中可以发现,本模型预测的结果与实验结果符合较好。以上的检验说明本文提出的广义自洽 Mori-Tanaka 模型准确可靠。

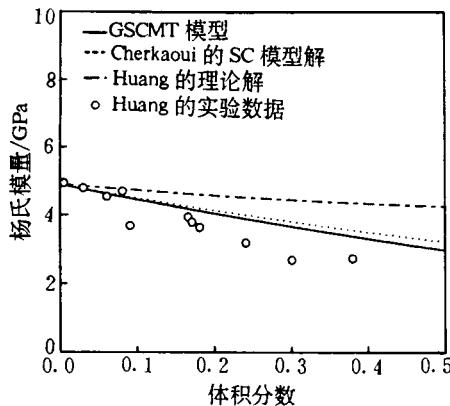


图 6 复合材料有效杨氏模量随空心玻璃球体积分数的变化

表 1 空心玻璃球填充聚脂基复合材料组分材料参数

	玻璃	聚脂	$(R_2 - R_1)/R_1$
μ/GPa	28.5	1.75	0.017
v	0.23	0.40	

5 结语

本文证实,采用夹杂均匀应变假定并利用 Hill 界面条件于两相体内可导出 Mori-Tanaka 平均场近似。再根据广义自治模型的应变等价条件,便可得到能够预报夹杂体复合材料有效模量的广义自治 Mori-Tanaka 模型。与已有的实验和理论结果比较表明,本文模型准确可靠。而且所得到的有效体积模量及剪切模量均可显式表达,便于应用。

感谢清华大学工程力学系郑泉水教授有益的建议和讨论。

参 考 文 献

- Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J Mech Phys Solids*, 1965, 13:213~222
- Budiansky B. On the elastic properties of some heterogeneous materials. *J Mech Phys Solids*, 1965, 13:223~227
- McLaughlin R. A study of the differential scheme for composite materials. *Int J Eng Sci*, 1977, 15:237~244
- Weng J G. Some elastic properties of reinforced solids with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions. *Int J Eng Sci*, 1984, 22:845~856
- Benveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composites materials. *Mech Mater*, 1987, 6:147~157
- Christensen R M, Lo K H. Solutions for effective shear properties of three phase sphere and cylinder models. *J Mech Phys Solids*, 1979, 27:315~330
- Christensen R M. A critical evaluation for a class of micro-mechanics models. *J Mech Phys Solids*, 1990, 38:379~404
- Huang Y, Hu K X, Wei X et al. A generalized self-consistent mechanics method for composite materials with multiphase inclusions. *J Mech Phys Solids*, 1994, 42:491~504
- Huang Y, Hwang K C, Hu K X et al. A unified energy approach to a class of micromechanical model for composite materials. *Acta Mechanica Sinica*, 1995, 11:59~75
- Zheng Q S, Xu D X. Closed-form interacting solutions for effective moduli of multi-phase composite materials. *J Mech Phys Solids*(Submitted)
- Zheng Q S, Du D X. Closed-form interacting solutions for composite materials with multi-phase inclusions, holes and microcracks. In: International Conference on Fracture and Strength of Solids, Hong Kong, 1997
- Matonis V A. A macroscopic analysis of composite containing layered spherical inclusions. *Polym Eng Sci*, 1969, 9(2):90~104
- 张芮,卢锡年. 球形粒子填充复合材料微观应力场有限元分析, 1995, 21:90~93
- Dong Z F, Wu Y L. Micromechanical analysis of particulate reinforced composites and their failure mechanisms. *J Mater Sci*, 1996, 31:4401~4405

- 15 Walpole L J. A coated inclusion in an elastic medium. *Math Proc Camb Phil Soc*, 1978, 83:495~506
- 16 Cherkaoui M, Sabar H, Berveiller M. Micromechanical approach of the coated inclusion problem and applications to composite materials. *J Eng Mater Technol*, 1994, 116:274~278
- 17 Herve E, Zaoui A. N-layered inclusion-based micromechanical modelling. *Int J Eng Sci*, 1993, 31:1~10
- 18 Dederichs P H, Zeller R. Variational treatment of the elastic constants of disorder materials. *Z Phys*, 1973, 259:103~116
- 19 Kroner E, Koch H. Effective properties of disorder materials. *SM Archives*, 1976, 1:183~238.
- 20 Hill R. Continuum mechanics and related problems. In *N J Muskhelishvili 80th Anniversary Volume*, 1972, Academy of Science, SSSR
- 21 Hill R. Interfacial operators in the mechanics of composite media. *J Mech Phys Solids*, 1983, 31:347~357
- 22 Huang J S, Gibson L J. Elastic moduli of a composite of hollow sphere in a matrix. *J Mech Phys Solids*, 1993, 41:55~75

A GENERALIZED SELF-CONSISTENT MORI-TANAKA MODEL FOR PREDICTING THE EFFECTIVE MODULI OF COATED INCLUSION BASED COMPOSITES

Dai Lanhong Huang Zhuping Wang Ren

(*Department of Mechanics & Engineering Sciences, Beijing University, Beijing, 100871*)

Abstract A generalized self-consistent Mori-Tanaka method(GSCMT) is developed by means of integral equation technique and Hill's interfacial operator theory. Based upon this new scheme the effective moduli of a coated inclusion based composite are obtained and can be expressed in a simple explicit form. A comparison with the existing theoretical and experimental results demonstrates that GSCMT is satisfactory. In addition, the difference between Mori-Tanaka method and generalized self-consistent method is discussed.

Key words coated inclusion, effective moduli, generalized self-consistent, composites