AN UNSTEADY FLOW OF A VISCOELASTIC FLUID WITH THE FRACTIONAL MAXWELL MODEL BETWEEN TWO PARALLEL PLATES

PAN Wenxiao TAN Wenchang
(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract The fractional calculus is used in the constitutive equation of Maxwell viscoelastic fluid. An unsteady flow of viscoelastic fluid between two parallel plates is studied. For a fractional derivative model of the generalized Maxwell viscoelastic fluid, the special equation of motion with fractional-order time derivatives is obtained. Additionally, the exact solution of the flow is obtained by using the theory of Laplace transform for fractional calculus.

Key words viscoelastic fluid, unsteady flow, parallel plate, fractional Maxwell model

功能梯度材料裂纹能量释放率

张双寅
(中国科学院力学研究所，北京 100080)

摘要 提出一个评价功能梯度材料裂纹扩展能量释放率的简单方法，用双悬臂梁柔度法推导了典型梯度材料内裂纹沿梯度方向扩展的能量释放率解析表达式，用算例分析了裂纹扩展方向不同能量释放率的差别.

关键词 功能梯度材料，能量释放率，双悬臂梁

功能梯度材料在高科技领域有重要用途，其断裂性能受到许多科学家的关注. 前人根据量级分析指出，当材料模量梯度较小时，裂纹尖端的应力奇性指数与均质材料相同，均为 $-1/2$[1~3]. 并且其应力场表达式的角函数亦与均质材料相同. 二者的差别仅在于应力强度因子不同. 由于材料弹性模量存在梯度，是坐标的函数，至今尚无应力强度因子的解析表达式. 本文提出一个计算功能梯度材料裂纹扩展能量释放率的简单方法，用双悬臂梁柔度法推导了典型梯度材料内裂纹沿梯度方向扩展的能量释放率解析表达式，通过算例分析讨论了裂纹扩展方向不同能量释放率的差别.

1 计算公式

由线弹性断裂力学理论，计算 I 型裂纹扩展能量释放率 $G_{\rm I}$ 的双悬臂梁柔度法公式为

$$G_{\rm I} = \frac{P^2 \partial c}{B \partial l} \tag{1}$$

其中，P 为悬臂梁端部载荷，B 是梁的宽度，l 是裂纹长度，c 为加载点柔度，$c = \dfrac{\delta}{P}$，δ 是加载点挠度 [4].

1.1 均质材料

对于均质材料，根据简单悬臂梁理论，由公式 (1) 得到

$$G_{\rm I}^{\rm o} = \frac{P^2 l^2}{E_o J} \tag{2}$$

E_o 是模量，$J = \dfrac{1}{12} B h^3$，h 为厚度.

本文于 2002–05–29 收到.

1.2 梯度材料

梯度材料双悬臂梁如图 1 所示. 裂纹扩展方向与梯度方向相同.

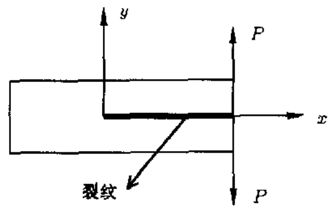

图 1 双悬臂梁示意图

对于线性梯度情况

$$E(x) = E_{\rm o} + \frac{E_{\rm g} - E_{\rm o}}{l} x = E_{\rm o} + \beta x \tag{3}$$

当 β 为正时，$E(x)$ 为增函数，裂纹尖端模量为 E_o.

由简单梁弯曲理论

$$\frac{{\rm d}^2 y}{{\rm d}x^2} = \frac{P(l-x)}{E(x)} \tag{4}$$

积分并利用边界条件，得到

$$y(x) = \frac{Pl^3}{E_o J \beta^2}\left\{\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\left(1+\frac{\beta x}{l}\right)\left[\ln\left(1+\frac{\beta x}{l}\right)-1\right] - \frac{x}{l} - \frac{\beta}{2}\frac{x^2}{l^2} + \left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right\} + \frac{Pl^2}{E_o J \beta^2} x \tag{5}$$

根据 $\delta = y(l)$ 和 $c = \dfrac{\delta}{P}$，代入 (1) 得到

$$\frac{G_{\rm I}^{\rm g}}{G_{\rm I}^{\rm o}} = \frac{3}{\beta^2}\left\{\frac{(1+\beta)^2}{\beta}\left[\ln\left(1+\beta\right)-1\right] + 1 - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\beta}\right\} \tag{6}$$

对于指数函数梯度情况

$$E(x) = E_o e^{\nu x} \tag{7}$$

当 ν 为正时，$E(x)$ 为增函数，裂纹尖端模量为 E_o.

利用方程 (4) 并遵循如上步骤得到

$$y(x) = \frac{pl}{E_o J}\left[\frac{1}{\nu^2}e^{-\nu x}\right] - \frac{P}{E_o J}\left[\frac{1}{\nu^3}e^{-\nu x}(2+\nu x)\right] + \frac{Plx}{E_o J\nu}\left(1-\frac{1}{\nu l}\right) + \frac{Pl}{E_o J\nu^3}\left(\frac{2}{l}-\nu\right) \tag{8}$$

省略其他步骤，直接给出结果

$$\frac{G_{\rm I}^{\rm g}}{G_{\rm I}^{\rm o}} = 2\left\{\frac{e^{-\nu l}}{\nu^2 l^2} - \frac{1}{\nu^2 l^2} + \frac{1}{\nu l}\right\} \tag{9}$$

由图 1 和式 (7) 可知，裂纹尖端 $x=0$ 处模量为 E_o. 当悬臂梁加载点的模量为 E_o 时所得结果与 (8) 不同. 这时有

$$E(x) = E_o e^{\nu(l-x)} \tag{10}$$

$$y(x) = \frac{Pl}{E_o J e^{\nu l}}\left\{\frac{e^{\nu x}}{\nu^2} - \frac{x}{\nu} - \frac{1}{\nu^2}\right\} - \frac{P}{E_o J e^{\nu l}}\left\{\frac{x e^{\nu x}}{\nu^2} - \frac{2e^{\nu x}}{\nu^3} + \frac{x}{\nu^2} + \frac{2}{\nu^3}\right\} \tag{11}$$

于是，得到

$$\frac{G_{\rm I}^{\rm g}}{G_{\rm I}^{\rm o}} = \frac{1}{e^{\nu l}} \tag{12}$$

2 计算结果

公式 (6),(9) 和 (12) 的计算结果见表 1.

表 1 不同公式计算的 $G_{\rm I}^{\rm g}/G_{\rm I}^{\rm o}$

β	−0.1	−0.05	−0.01	0.01	0.05	0.1
公式 (6)	1.0260	1.0128	1.0023	0.9967	0.9877	0.9675
νl	−0.1	−0.05	−0.001	0.001	0.05	0.1
公式 (9)	1.0342	1.0169	1.0033	0.9967	0.9835	0.9675
公式 (12)	0.9048	0.9512	0.9900	1.0101	1.0513	1.1052

由表 1 可知，材料梯度对裂纹开裂能量释放率影响很大，当裂纹向模量变小的方向扩展时，能量释放率值小；相反，当裂纹向模量变大的方向扩展时，能量释放率值大. 用此方法可以很方便测量材料的断裂能量释放率，并可计算其临界应力强度因子.

参考文献

1 Jin ZH, Batra RC. Some basic fracture mechanics concepts in FGMs. *J Mech Phys Solids*, 1996, 44(8): 1221∼1235

2 Jin ZH, Noda N. Crack tip singular fields in nonhomogeneous materials. *J Appl Mech*, 1994, 61: 738∼740

3 Gu P, Asaro KJ. Crack in FGMs. *Int J Solids and Structures*, 1990, 34: 1∼17

4 张双寅. 复合材料断裂力学. 力学进展, 1980, 10(2∼3): 99∼112

FRACTURE ENERGY RELEASE RATE IN FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS

ZHANG Shuangyin

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract A simple method of calculating the energy release rate of crack in functionally graded materials is proposed. The double cantilever beam theory is used to derive the formulae of $G_{\rm I}^{\rm g}$. As an example for the use of this method three typical graded materials are evaluated. The results show that the modulus gradient has a great influence on the fracture energy. When the crack extends in the direction where the modulus is getting smaller, the energy release rate is smaller than that in the opposite direction.

Key words functionally graded materials, crack, energy release rate

空间几何构造分析的有限单元法 [1)]

叶康生　袁　驷

(清华大学土木工程系，北京 100084)　O241　A

摘要 提出空间杆系几何构造分析的有限单元法，构造了两种单元 (链杆单元和准梁单元) 的几何约束矩阵，集成为整体矩阵并引入支承条件后，通过对其阶数与秩的比较分析确定体系的几何可变性及静定性. 本法原理简单，便于计算机实施，结果完备：对于几何不变体系，可指出多余约束的数目；对于几何可变体系，可给出体系的自由度数及相应的运动模态，并确定自由度的常变瞬变性质.

关键词 有限元法，空间杆系，几何构造，单元分析，几何约束矩阵

2001-08-06 收到第 1 稿，2001-10-26 收到修改稿.

1) 清华大学基础研究基金 (JC2000001) 和清华大学土木系基础基金项目资助.