第 19 卷第 2 期　　大 学 物 理　　Vol. 19 No. 2
2000年　2月　　COLLEGE PHYSICS　　Feb. 2000

相对性原理及其对自然界定律的协变性要求

——机械能守恒定律协变性疑难的解答①

朱如曾②

(中国科学院力学研究所,非线性连续介质开放研究实验室,北京　100080)

摘要:阐明狭义相对性原理的准确含义,指出它并不要求自然界每条定律都单独协变,但要求每条定律至少属于一个协变集合.给出最小协变集的求法.表明机械能守恒定律满足狭义相对性原理及其对自然界定律的协变性要求.还指出一切社会科学定律也都满足狭义相对性原理.

关键词:狭义相对性原理;方向相对性原理;平移相对性原理;平动相对性原理;伽利略变换;洛伦兹变换;联立协变;最小协变集;机械能守恒定律

中图分类号:O 313　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-0712(2000)02-0015-05

1991 年,文[1]证明机械能守恒定律不具有伽利略变换下的协变性,并以此为例证指出,“我们确可以找到由牛顿定律导出而又不满足相对性原理的定理和推论”,从而困惑地呼吁,“经典力学中,相对性原理是不容违背的,对问题的存在不能等闲视之,应寻求问题的解决”.由此开始了包括文[1]本身在内的一系列讨论[2~4].然而这一疑难至今未获解决.其实不协变的定律很多,例如:

例 1　对均匀各向同性介质,如果介质是静止的,则声波方程是

$$\frac{\partial^2 u(\mathrm{r},t)}{\partial t^2}=a^2\nabla^2 u(\mathrm{r},t) \qquad (1)$$

这里 u 为波动量,a 为声速.容易验证此定律不具有伽利略变换下的形式不变性.

本文将阐明狭义相对性原理(本文简称为“相对性原理”)的准确含义及其对自然界定律在惯性参考系变换(即洛伦兹变换或其在一定条件下的近似——伽利略变换)下的协变性所提出的要求,并解决这一疑难.

1　相对性原理的准确含义

相对性原理(表述 I)　如果 S 是惯性系,则相对于 S 作匀速运动而无转动的其它参考系 S′也是惯性系;自然界定律对于所有惯性系都是相同的.

相对性原理的后一半是指,如果惯性系 S 中有一条定律,则任意另一惯性系 S′中必存在一条对应的定律,并且两者的内容和形式(在同类坐标下,例如都采用直角坐标,但空间坐标轴不一定互相平行,两个四维时空原点不一定重合;本文针对直角坐标)都相同,即只要把前者表达式中的物理量理解为相对于惯性系 S′而言即成后者,而不需另行证明.简言之,对惯性系 S 中的任何定律都可以冠以“对所有的惯性系”的短语来扩大其适用范围.所谓“自然界定

---

① 收稿日期:1999-05-07

② 作者简介:朱如曾(1941-),男,江苏靖江人,中国科学院力学研究所研究员,博士生导师.

律”,其集合包括全部普遍的和特殊的定律.

例2 如果质量为2 kg的质点在沿某方向2 N恒力作用下由原点开始运动,那么在3 s末,速度必为沿该方向的3 m/s,位移一定是该方向上的4.5 m.

对像例2这样极特殊的规律,相对性原理也必须被满足,即例2这一命题可改写为:

“对任一惯性系,如果质量为2 kg的质点在沿某方向2 N恒力作用下由原点开始运动,那么在3 s末,速度必为沿该方向的3 m/s,位移一定是该方向上的4.5 m.”

在相对性原理中,对S′与S之间的关系,如果要求相对速度为零并且四维时空原点重合,则相对性原理成为“方向相对性原理”;如果要求空间坐标轴互相平行并且相对速度为零,则成为“平移相对性原则”;如果要求空间坐标轴互相平行并且四维时空原点重合,则成为“平动相对性原理”[5].许多著作在介绍相对性原理时往往默认了方向相对性原理和平移相对性原理,而把注意力集中在“平动相对性原理”上[6];本文则明确地规定S′与S之间不仅可以有相对速度,空间坐标轴也可以不互相平行,四维时空原点可以不重合,所以本文的相对性原理实际上综合了“方向相对性原理”、“平移相对性原理”和“平动相对性原理”.

有了相对性原理,当我们在一个惯性系中总结出任何规律之后,便可放心大胆,不加任何证明地,原封不动地将其搬到另一个惯性系中去用.实际上,任何物理、化学和生物学的论文、教科书和习题集,无处不在应用相对性原理,否则每章每节,每道习题都必须指明其内容是对哪一个具体的惯性系而言的.所以相对性原理确是一条普遍而简单的,和人们已习以为常的原理.

此外,社会科学的定律在所有惯性系中也是相同的,否则,既然地面上任一地区因地球的公转和自转等运动而每时每刻变更着所从属或所代表的惯性系,那末,社会科学的定律就会不断地变化着,而这与实际并不相符.这里根源在于,社会科学的定律是对于按基本自然定律运动着的物质世界,从社会科学的特定角度所观察到的一部分规律,所以它们必然由基本自然定律所客观地(虽非一定在操作上)决定[7].另一方面,牛顿力学内在随机性的发现,把层次高于决定论力学现象的随机统计现象中的一大类还原为决定论力学方程的不可积解!一叶知秋,这启示我们,低层次规律蕴含着高层次规律,故基本自然定律具有“内在生命性”,“内在意识性”和“内在社会发展变化性”[8],即基本自然定律对生命、意识、社会发展变化等科学定律确应具有客观决定性.因此社会科学定律必然像自然界定律一样地对所有惯性系都是相同的.所以相对性原理中的“自然界定律”可以改为“自然界定律和社会科学定律”.本文虽然暂不作这一更改,不过下文的“自然界定律”均可广义地理解为“自然界定律和社会科学定律”.

2 机械能守恒定律满足相对性原理

作为自然界定律之一,机械能守恒定律必定满足相对性原理,这本是相对性原理自身所保证而不需另行证明的.但由于已提出了机械能守恒定律似乎不满足相对性原理这一疑难,解决这一问题的最好办法自然是暂时放弃对相对性原理的信念,而从物理学的其他合法途径来检验机械能守恒定律究竟是否满足相对性原理.

用伽利略变换容易证明各惯性系中都有形式相同的牛顿运动定律,从而可以导出:

机械能守恒定律 对任一惯性系S,如果各质点的速度为$v_i(i=1,\cdots,n)$的n质点系统,除受到总势能为V的保守内力和保守外力作用外,还受到其他力$\mathrm{F}_i(i=1,\cdots,n)$的作用,并且在时刻$t_1$有

$$\left[\sum_i \mathrm{F}_i\cdot v_i+\frac{\partial V}{\partial t}\right]_{t=t_1}=0 \qquad (2)$$

则系统的机械能

$$E=\sum_i\frac{1}{2}m_i v_i^2+V(\mathrm{r}_1,\cdots,\mathrm{r}_n,t) \qquad (3)$$

在时刻$t=t_1$守恒,即

$$\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1}=0 \tag{4}$$

用简洁的形式,机械能守恒定律可表示为:对任一惯性系 S,

$$(2)\rightarrow(4) \tag{5}$$

即“对任一惯性系 S,条件(2)蕴含性质(4)”就是机械能守恒定律的内容.这里,在定理的表述中明确写出了的 S 的任意性直接表明了式(5)满足相对性原理.

类似可证,静止介质中的声波定律等任何其它定律也都满足相对性原理.

3　相对性原理对自然界定律协变性质的要求

式(5)满足相对性原理,这与文[1,2]证明了的,它在伽利略变换下的非协变性有无矛盾呢?为了弄清这一问题,让我们来看一看相对性原理对自然界定律在参考系变换下的协变性质究竟提出了什么样的要求,而且这本身也具有独立的意义.

3.1　联立协变、协变集和最小协变集概念

我们说麦克斯韦方程组是洛伦兹协变的,但单拿其中一个方程,例如高斯定理来变换,结果的形式就较复杂,不能通过等价变形化为原来的形式.把高斯定理和修正的安培定律联立在一起进行洛伦兹变换,然后再在新参考系中对变换结果进行等价变形,即可化为具有原来形式的两个新方程(证明若干联立定律的洛伦兹协变性时通常应用四维张量等式的形式不变性定理,它概括了参考系变换和对变换结果的等价变形).这一事实启发我们引进联立协变、协变集和最小协变集的有用概念.

如果自然界若干定律联立在一起,进行参考系变换,然后再在新参考系中对变换结果进行等价变形,可化为具有原来形式的全部新定律,则这些定律称为是联立协变的,这些定律作为元素所构成的集合称为协变集.这里要注意,“在新参考系中进行等价变形”时不允许利用相对性原理.否则连单独的高斯定理 $\nabla\cdot E=\rho/\varepsilon_0$ 也可直接据此得出 S′中必存在 $\nabla'\cdot E'=\rho'/\varepsilon_0$ 的结论,这显然不符合协变性的本意.

只含有一个元素的协变集称为单元素协变集.几个协变集的并集显然仍是协变集.某些协变集在删除一些元素后仍是非空协变集,即它们含有非空协变子集.元素不能再减少的协变集称为最小协变集.电动力学中表示成某阶四维张量等式的规律集都是协变集,而且教科书上给出的都是最小协变集(两个不同张量方程两边分别直乘得到的高阶张量方程对应于非最小的协变集),每一标量定律构成单元素协变集.如麦克斯韦方程组中的高斯定理与修正的安培定律,法拉第定律与磁感应通量守恒定律分别构成两个四元素最小协变集;电荷守恒定律构成单元素最小协变集.

3.2　相对性原理对自然界定律的协变性要求

因为对任何一个物理系统中所发生的任何事件,总可以在不同惯性系中去观察,其结果由参考系变换关系所联系,所以一个惯性系 S 中的全部自然定律应通过参考系变换关系完全地决定其它惯性系中的全部自然定律;另一方面,相对性原理保证在各惯性系中,自然界全部定律形式相同.所以惯性系 S 中的全部自然定律联立地进行参考系变换(S→S′),然后在惯性系 S′中进行等价变形,一定能化为具有与 S 中形式相同的全部自然定律.这就是说,相对性原理保证自然界全部定律所构成的大集合是协变的.反之亦然.所以相对性原理可用协变概念等价地表述为:

相对性原理(表述 II)　如果 S 是惯性系,则相对于 S 作匀速运动而无转动的其它参考系 S′也是惯性系;自然界全部定律所构成的大集合在惯性系之间的变换下是协变的.

容易验证,自然界全体定律组成的协变大集合包含着许多协变子集合(只要举出一、两个协变子集合就算完成了验证).我们显然还有如下相对性原理的另一种等价表述:

相对性原理(表述 III)　如果 S 是惯性系,则相对于 S 作匀速运动而无转动的其它参考系

S′也是惯性系;自然界每一定律至少属于一个协变集.

此外,虽然存在着单独协变的定律,但许多事实,如麦克斯韦方程组中各定律均不单独协变,表明如下定理是成立的:

不都单独协变定理　自然界的定律不都单独协变.

因为协变概念下的相对性原理(表述 II和 III)并不要求每一定律都单独协变,所以我们不能把不单独协变的定律说成它们不满足或不服从相对性原理;仅当一个定律既不单独协变,又不属于一个协变集时,它才算“不服从相对性原理”.而这种足以引起相对性原理大变革的反例至少在已知的知识领域内是不存在的.

为了对上述原理和定理的含义有一个具体的了解,现在我们假定几个定律,譬如说惯性系 S 中的 A 和 B,只联立协变而不单独协变.这是相对性原理的表述 II所允许的.于是,虽然相对性原理的表述 I保证另一惯性系 S′中成立形式同于 A 和 B 的定律 A' 和 B',但由于 A 和 B 不单独协变,故 S 中的 A 和 B 在 S′中看来不分别是 A' 和 B',而分别是另两条形式异于 A 和 B 的定律 C' 和 D'(它们分别是 A 和 B 的洛伦兹变换或伽利略变换结果).不过,A 和 B 联立协变则保证 C' 和 D' 联立起来等价于 A' 和 B' 的联立.现在我们在 S 和 S′中来观察同一对象.当该对象在 S 中满足 A 和 B 的假设条件(无假设条件称为“空假设条件”,它总被认为是满足的),从而 A 和 B 的终结得以实现时,在 S′中看,它必定满足 A' 和 B' 的假设条件,从而 A' 和 B' 的终结得以实现.如果这一对象在 S 中只满足 A 的假设条件而不满足 B 的假设条件,那末,由于 S 中的 A 在 S′中看来不是 A' 而是 C',因此在 S′中看,该对象不满足 A' 的假设条件而满足了 C' 的假设条件,从而实现不了 A' 的终结而实现了 C' 的终结.本节的原理和定律表明,相对性原理允许这种情况广泛地存在.

4　机械能守恒定律符合相对性原理对自然界定律的协变性要求

机械能守恒定律虽然在伽利略变换下不单独协变,但它从属于大协变集合,这不仅完全符合相对性原理(表述 III)对自然界定律的协变性要求,而且还是上述“不都单独协变定理”的一个例证.

实际上,在大协变集合中,不同普遍程度的,不单独协变的定律举不胜举,本文例 1,例 2 和麦克斯韦方程组中各方程都是典型例子,这里再举一例:

例 3　牛顿第二定律的 x 分量方程为

$$F_x = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{6}$$

当 S′系的 z' 轴平行于 S 系的 z 轴,而 x' 轴与 x 轴成角度 θ 时,式(6)转变为不同的形式:

$$F_x'\cos\theta - F_y'\sin\theta = m\cos\theta\frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t'^2} - m\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t'^2} \tag{6′}$$

5　最小协变集的求法

对于给定的一条定律 $A(a)$(这里 a 表示定律的表述中所用到的时空坐标和全部物理量),为了寻求它所从属的最小协变集,除去对洛伦兹变换常用构造四维张量等式的方法外,下面给出更为一般的方法:

如果 $A(a)$ 是某阶三维张量定律的分量,那末,最小协变集必含整个张量定律,故寻求后者(仍以 $A(a)$ 表示)所属于的最小协变集.将惯性系 S 中的 $A(a)$ 向具有任意的相对速度 $\mathbf{u}$ ($|\mathbf{u}| < c$, c 为真空中的光速),和任意的原点初始相对位置 $\mathbf{l}$ 的另一个惯性系 S′($\mathbf{u}$, $\mathbf{l}$)变换(若定律 $A(a)$ 不含初始坐标,$\mathbf{l}$ 可取为 0),得 $B'(a', \mathbf{u}, \mathbf{l})$.若在参考系 S′($\mathbf{u}$, $\mathbf{l}$)中,由 $B'(a', \mathbf{u}, \mathbf{l})$ 能导出 $A'(a')$,则 $A(a)$ 构成最小协变集 $\{A(a)\}$,过程终止;否则按如下方法考察以($\mathbf{u}$, $\mathbf{l}$)为元素参变数的定律集 $\{B(a, \mathbf{u}, \mathbf{l})\}$ 是否为含有元素 $A(a)$ 的最小协变集.

显然 $B(a, 0, 0) = A(a)$,故 $A(a) \in \{B(a, \mathbf{u}, \mathbf{l})\}$.将 S 系中的 $\{B(a, \mathbf{u}, \mathbf{l})\}$ 向任一惯性系 S′($\mathbf{u}1$, $\mathbf{l}1$) ($|\mathbf{u}1| < c$) 变换得 $\{C'(a', \mathbf{u}, \mathbf{l}; \mathbf{u}1, \mathbf{l}1)\}$.若在参考系 S′($\mathbf{u}1$, $\mathbf{l}1$)中,由 $\{C'(a', \mathbf{u}, \mathbf{l}; \mathbf{u}1, \mathbf{l}1)\}$ 能导出 $\{B'(a', \mathbf{u}, \mathbf{l})\}$,则 $\{B$

(a, u, l)}是含有元素 A(a)的协变集(若它非最小协变集,则可进行等价变形,删除不独立的定律,找到含有元素 A(a)的最小协变集),过程终止. 否则考察以(u, l; u1, l1)为元素参变数的集合{C(a, u, l; u1, l1)}是否符合要求. 类似上述处理,直至达到目的为止.

下面给出用上述方法得到的几个最小协变集:

1) 上已提及,麦克斯韦方程组中的高斯定理与修正的安培定律,法拉第定律与磁感应通量守恒定律分别构成两个四元素最小协变集;电荷守恒定律构成单元素协变集.

2) "静者恒静"属于以速度矢量为参变数的'静者恒静,动者恒动'最小协变集.

3) 机械能守恒定律式(5)属于以 b 为参数的功能定理最小协变集:

$$\left\{\left[\sum_i \mathrm{F}_i \cdot v_i + \frac{\partial V}{\partial t}\right]_{t=t_1} = b \rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_1} = b\right\} \tag{7}$$

4) 例 1 属于以介质平动速度 V_1 为参数的声波运动规律最小协变集:

$$\{\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2(\mathrm{V}_1 \nabla)\frac{\partial u}{\partial t} + (V_1 \nabla)^2 u = a^2 \nabla^2 u\} \tag{8}$$

5) 例 2 属于在 2 N 恒外力作用下的质量为 2 kg 的质点,它在时刻 $t = 3$ s 的坐标和速度 $[\mathrm{r}(3\ \mathrm{s}), \dot{\mathrm{r}}(3\ \mathrm{s})]$以初条件$(\mathrm{r}_0, \dot{\mathrm{r}}_0)$和力的方向 e 为参数的取值规律最小协变集:

$$\left\{\begin{bmatrix} \mathrm{r}|_{t=0} = \mathrm{r}_0 \\ \dot{\mathrm{r}}|_{t=0} = \dot{\mathrm{r}}_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathrm{r}(3\ \mathrm{s}) = \mathrm{r}_0 + 3\dot{\mathrm{r}}_0\ \mathrm{s} + 4.5\mathrm{e\ m} \\ \dot{\mathrm{r}}(3\ \mathrm{s}) = \dot{\mathrm{r}}_0 + 3\mathrm{e\ m/s} \end{bmatrix}\right\} \tag{9}$$

6) 例 3 属于矢量形式的牛顿第二定律最小协变集.

6　协变性疑难的终结

根据上述分析,机械能守恒定律及类似的存疑定律,均与自然界所有其它定律一样地满足相对性原理及其对自然界定律的协变性要求,故以机械能守恒定律为代表的协变性疑难不复存在. 以往困惑的根源在于误以为相对性原理要求自然界每一定律都单独协变,而这一误解又与包括爱因斯坦、朗道等人的著作在内的已往所有著作[5,9],在相对性原理与协变性关系上的表述欠确切有关:

他们都只说相对性原理要求自然界定律在参考系变换下是形式不变的,而未指出联立协变和单独协变都符合要求,甚至根本未引进联立协变的概念. 所有文献在证明定律的洛伦兹协变性时都无例外地应用了四维张量等式的形式不变性定理,然而它们都只把这一"配张量"的方法单纯地解释为证明各有关定律具有洛伦兹协变性的一种技巧,而从未提及它所反映的实质是各分量等式只具有联立协变性,而无单独协变性(零阶张量除外).

本文曾与北京大学赵凯华教授进行过有益的讨论,谨致谢忱.

参考文献:

[1]　管靖. 力学相对性原理与机械能[J]. 大学物理,1991,10(11):21.
[2]　本刊编辑部. 机械能守恒定律和相对性原理[J]. 大学物理,1999,18(1):18.
[3]　《大学物理》编辑部. 关于力学相对性原理与机械能守恒的来稿综述[J]. 大学物理,1994,13(1):20.
[4]　赵佩章等. 机械能守恒定律满足力学相对性原理[J]. 河北师范学报(自然科学版),1997(2):40.
[5]　爱因斯坦 A. 相对论的意义[M]. 北京:科学出版社,1961. 16.
[6]　福克 B A. 空间、时间和引力理论[M]. 北京:科学出版社,1965. 19.
[7]　朱如曾. 科学的统一性与力学的范围、地位和方向[J],力学进展,1997,27(2):145.
[8]　朱如曾. 牛顿力学内在随机性的启示[J]. 力学进展,1999,29(3);421.
[9]　朗道 Л Д. 场论[M]. 北京:高等教育出版社,1960. 1.

(下转 26 页)

[J]. 大学物理,1999,18(1):20.
[2] 管靖. 力学相对性原理和机械能[J]. 大学物理,1991,10(11):21.
[3] 高炳坤等. 地球所受的一种易被忽视的惯性力[J]. 大学物理,1991,10(11):46.
[4] 高炳坤. 力学中一个令人费解的问题[J]. 大学物理,1995,14(5):20.
[5] 李光惠,高炳坤. 对"力学中一个令人费解的问题"的补充[J]. 大学物理,1996,15(10):44.
[6] 白静江. 两体问题中的功能原理及机械能守恒定律[J]. 大学物理,1997,16(3):11.
[7] 《大学物理》编辑部. 关于力学相对性原理与机械能守恒的来稿综述[J]. 大学物理,1994,13(1):20.
[8] 郑永令. 流体流动状态与伯努利方程[J]. 大学物理,1994,13(8):14.
[9] 赵佩章,陈华,胡世巧,赵文桐. 机械能守恒定律满足力学相对性原理[J]. 河北师范学院学报(自然科学版),1997(2):40.
[10] 漆安慎,杜婵英. 力学[M]. 北京:高等教育出版社,1997. 173.
[11] 梁昆淼. 机械能守恒定律与机械能守恒[J]. 物理通报,1987(11).

Law of conservation of mechanical energy obeys the relativity principle of mechanics

LU Zeng-xian, MENG Xiu-lan
(Department of Physics, Hebei Normal University, Shijiazhuang, 050091, China)

Abstract: It is demonstrated that the law of conservation of mechanical energy must obey the relativity principle of mechanics.

Key words: conservation of mechanical energy; relativity principle of mechanics; Galilean transformation

---

(上接 19 页)

Principle of relativity and its requirement for co - variance of laws of nature

ZHU Ru-zeng

(Laboratory for Non - linear Mechanics of Continuous Media, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijng, 100080, China)

Abstract: The exact meaning of the principle of special relativity are explained. It is pointed out that according to the principle of special relativity, every law of nature is not co - variant by itself, but belongs to a set of co - variance at least. The method of finding minimum sets of co - variance is given. The conservation law of mechanical energy is proved to be satisfactory for the principle of relativity and its requirement for the co - variance of the laws of nature. All the laws of social science satisfy the principle of special relativity too.

Key words: principle of special relativity; principle of relativity with respect to direction; principle of relativity of displacement; principle of relativity of translation; Galilean transformation; Lorentz transformation; simultaneous co - variance; minimum set of co - variance; conservation law of mechanical energy