

含裂纹有限结构的局部-整体分析^{*}

冯金辉 柳春图

(中国科学院力学研究所 北京 100080)

摘 要

基于局部-整体分析法用有限元研究了有限结构内含穿透裂纹的 I 型断裂问题, 作为局部分析, 给出了有限结构内穿透直裂纹尖端区域应力场的渐近表达式, 并以此作为位移模式构造了高阶奇异元, 代替通常有限元分析中裂纹尖端的稠密网格。文中以中心穿透裂纹板结构为例细致地讨论了有限结构的有限尺寸效应, 讨论了结构厚度结构长度对应力强度因子的影响。

关键词: 局部-整体分析; 有限结构; 穿透裂纹

1 引 言

工程中有许多缺陷结构可简化为含穿透裂纹的结构来进行力学分析, 通常工程中都是按平面问题来处理的, 而实际上在裂纹尖端附近区域变形状态本质上是三维的。为了能正确地对待含缺陷的实际结构进行安全评定, 必须对结构进行三维变形的分析研究, 尤其要研究应力强度因子沿厚度方向的分布规律。

目前考虑三维效应卓有成效的研究方法是有限元法。文[4, 6, 9]等都采用有限元法研究了无限大板含穿透裂纹问题, 分析了裂纹尖端的应力应变场, 只要在裂纹尖端划分足够细致的网格, 人们总是可以获得较为精确的结果, 但是上述诸位作者的工作主要是面向无限大板的, 谈不上有多少工程实用价值, 而工程中各种结构的尺度应当是有限的, 这种结构往往又相当复杂, 尽管目前计算机技术已相当发达, 用有限元进行结构分析所能划分的网格数量仍受到很大的限制, 在裂纹尖端不可能划分足够细致的网格, 这当然是很粗糙的。因此探索有效的裂纹分析方法具有重要的工程实用价值。

有限元的精度取决于位移模式逼近真实变形的能力, 上述有限元法之所以要划分大量单元, 主要是位移模式离真实变形相去太远, 因此如果能提高位移模式的精度, 就能把稠密的网格降下来。在这方面柳春图研究员提出的局部-整体法取得了很好的效果。作为局部分析, 首先致力于寻找三维裂纹体的裂纹尖端应力应变场, 为整体分析提供良好的力学基础, 此时平面断

* 来稿日期: 1997-03-17; 修回日期: 1998-06-15

裂分析中一整套成熟的计算方法,诸如能量法、边界配置法、摄动法、有限元法等都可以推广到三维裂纹体的断裂分析中去。以此为位移模式构造特殊单元代替通常三维有限元分析中裂纹尖端附近的稠密网格,因而大幅度降低了自由度。同时由于特殊元采用了高阶模式,较精确地描述了裂纹尖端附近的变形状态,可以进一步提高精度。文中将以局部-整体法为基础研究含穿透裂纹的有限平板裂纹问题,结果令人满意。

2 有限结构的局部-整体分析

2.1 局部分析 从基本 L-N 方程出发来寻求问题的解,对 L-N 方程

$$Gu_{i,jj} + (\lambda + G)u_{j,ji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

其中 G 为剪切模量, λ 为拉梅常数。对函数 $F_i(x, y, z)$ 若:

$$\nabla^2 \nabla^2 F_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

则:

$$u_i = F_{i,jj} - \frac{1}{2(1-\nu)} F_{j,ji} \quad (2)$$

是 L-N 方程的解。参考薛昌明关于无限大板解的形式,假设 F_i 具有如下形式:

$$F_x = A_n(z) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-4}{2}} \cos \frac{n}{2} \theta \quad F_y = B_n(z) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-4}{2}} \sin \frac{n}{2} \theta \quad F_z = C_n(z) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-4}{2}} \cos \frac{n}{2} \theta \quad (3)$$

其中: $A_n(z) = a_{n0} + a_{n1}z$ $B_n(z) = b_{n0} + b_{n1}z$ $C_n(z) = c_{n0} + c_{n1}z$

显然(3)式是双调和函数,因此有:

$$\begin{aligned} u_n &= A_n(z) (n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} \{ (3-4\nu) \cos \frac{n}{2} \theta - \frac{n}{4} \cos \frac{n-4}{2} \theta \} \\ &\quad - B_n(z) \frac{n(n+2)}{4} l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} \{ \cos \frac{n-4}{2} \theta \} \\ &\quad - C_n(z) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} \{ \frac{n}{2} \cos \frac{n-2}{2} \theta + 2 \cos \frac{n}{2} \theta \cos \theta \} \\ v_n &= - A_n(z) \frac{n(n+2)}{4} l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} \sin \frac{4-n}{2} \theta \\ &\quad + B_n(z) (n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} \{ (3-4\nu) \sin \frac{n}{2} \theta - \frac{n}{4} \sin \frac{n-4}{2} \theta \} \\ &\quad - C_n(z) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} \{ \frac{n}{2} \sin \frac{n-2}{2} \theta + 2 \cos \frac{n}{2} \theta \cos \theta \} \\ w_n &= - A_n(z) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} \{ \frac{n}{2} \cos \frac{n-2}{2} \theta + 2 \cos \frac{n}{2} \theta \cos \theta \} \\ &\quad - B_n(z) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} \{ \frac{n}{2} \cos \frac{n-2}{2} \theta + 2 \sin \frac{n}{2} \theta \sin \theta \} \\ &\quad + C_n(z) (n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} \{ 4(1-\nu) \cos \frac{n}{2} \theta \} \end{aligned} \quad (4)$$

令 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 代入(4)就可得各阶位移的表达式,进而由虎克定律可得应力的表达式(见附录)以此作为裂纹尖端应力应变场的渐近展开式。(在随后的数值算例中 n 取 5)

2.2 有限元的实施(整体分析)

2.2.1 三维高阶奇异元刚度矩阵的产生 对于裂纹尖端应力应变场的渐近表达式,取各系

数 A_n, B_n, C_n 表达式中的系数作为广义位移。这样广义位移列向量为 $(a_{00}, a_{01}, b_{00}, b_{01}, c_{00}, c_{01}, \dots, a_{n0}, a_{n1}, b_{n0}, b_{n1}, c_{n0}, c_{n1})$, 可以把位移表示成矩阵形式:

$$u = U\alpha \quad (5)$$

其中 U 为 $3 \times (6n + 1)$ 阶矩阵, α 为广义位移列向量。同样可以把应力表示成矩阵的形式:

$$\sigma = P\alpha \quad (6)$$

其中 $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$ 则由虎克定律可得应变列向量:

$$\epsilon = c \cdot \sigma = c \cdot P \cdot \alpha \quad (7)$$

其中 $C = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 2(1+\nu) & & \\ & 0 & & & 2(1+\nu) & \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$

$\epsilon = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}\}$ c 为柔度矩阵

于是以广义位移列向量 α 表示的单元刚度矩阵可以写为:

$$K_\alpha = \int_V P^T c P dv \quad (8)$$

2.2.2 奇异元与常规元的过渡 以上求得了以广义位移列向量表示的单元刚度矩阵, 作为局部分析到此为止。为把奇异元刚度矩阵送到有限元总体刚度矩阵中去以便求解, 必须寻求广义位移和单元结点位移之间的关系。

首先, 令奇异元和常规元在公共节点上的位移相等

$$(uvw) = U\alpha \quad (9)$$

再令 τ_{xy}, τ_{yz} 在裂纹面上的积分为零, 即:

$$\int_{\partial v} \tau_{xy} ds = 0 \quad \int_{\partial v} \tau_{yz} ds = 0 \quad (10)$$

把两式结合起来, 用最小二乘原理求解, 可得:

$$\alpha = T u \quad (T \text{ 为过渡矩阵}) \quad (11)$$

由此可得以公共节点位移表示的奇异元刚度矩阵:

$$K = T^T K_\alpha T \quad (12)$$

这样就可以把 K 送入总体刚度矩阵进行求解, 得到 U 后可通过 $\alpha = T u$ 获得广义位移列向量, 进而得到裂纹尖端应力应变场。

3 数值算例

3.1 角点奇异性

在裂纹与自由表面相交的附近区域, 应力应变场存在着不同于内部的奇异性。可以称之为角点奇异应力应变场。一般来讲奇异性的阶数小于 0.5。按照传统的应力强度因子的定义该区域的应力强度因子将为零。在角点区域应当引进角点应力强度因子的概念。令角点应力强度因子为 K_{comer}

$$K_{corner} = L \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_y \cdot r^\lambda)$$

其中 λ 为角点区域应力应变场奇异性的阶数, 在裂纹附近区域将有:

$$K_0 + K_1 r = \sigma_y \cdot r^\lambda$$

若取三个采样点代入上式就可得到所求结果如图 1 示 (p 为无量纲应力强度因子, ν 为泊松比) 上述结果显示出角点奇异性依赖于材料的泊松比。随着泊松比的增大, 角点奇异性不断减小。角点区域的奇异性小于内部区域。应当指出, 从结构安全的角度出发, 可不考虑角点区域影响。A. Bakef[9] 的研究也表明角点区域计算结果的精确与否对内部区域计算结果的影响很小。

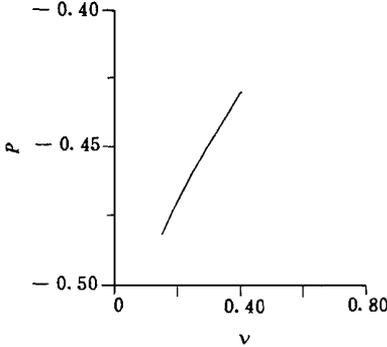


图 1 角点应力强度因子与泊松比的关系

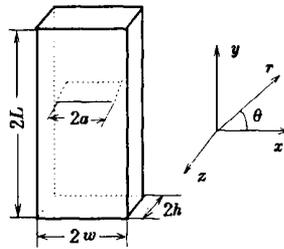


图 2 含裂纹有限结构

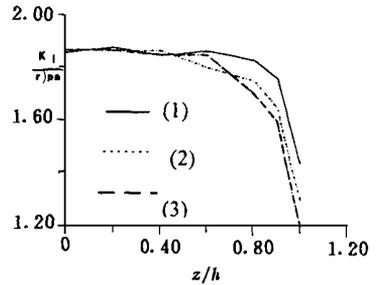


图 3 表层单元的影响

3.2 有限尺寸结构的研究

(以含中心穿透裂纹的有限结构为例, 如图 2)。

3.2.1 表层单元的影响 同无限大板一样, 有限结构同样存在角点奇异区, 奇异性要比结构内部小, 从工程角度出发对这一区域可不必考虑。现考查角点区域对计算内部应力强度因子的影响。为此, 取沿厚度方向单元的大小如下:

- 1 (0.75h, 0.19h, 0.06h);
- 2 (0.67h, 0.22h, 0.11h);
- 3 (0.80h, 0.16h, 0.04h)。

结果如图 3 所示。可见表层单元的不同对计算结果是有很大影响的, 为精确计算表层应力强度因子应当把表层单元划分小一些, 网格要密一些, 但是表层单元计算结果的精确程度不影响内部单元结果的精确度, 而且表面附近的应力强度因子比内部要小, 因此只要内部结果满足精度需要, 对表层单元可适当放松要求。

3.2.2 结构厚度的影响 为考查结构厚度的影响, 取四种不同的结构厚度进行比较, 结构尺寸为

- 1 (h/a = 0.5);
- 2 (h/a = 1.0);
- 3 (h/a = 1.5);
- 4 (h/a = 2.0)。

结果如图 4。可以看出厚度对应力强度因子的影响还是挺显著的, 如果结构的其它尺寸不变随着厚度的增加, 结构中部的无量纲应力强度因子逐渐减小。这也是预料之中的, 因为结构越厚, 结构中部的变形越接近平面变形状态。而且较厚的结构在表面具有较大的应力强度因子。

3.2.3 结构长度的影响 取两种不同长度的结构来进行考查。可见, 如果结构的其它尺寸不变, 结构越长, 无量纲应力强度因子越小, 这也是预料之中的, 因为结构越长, 结构中的变形越接近平面变形状态。

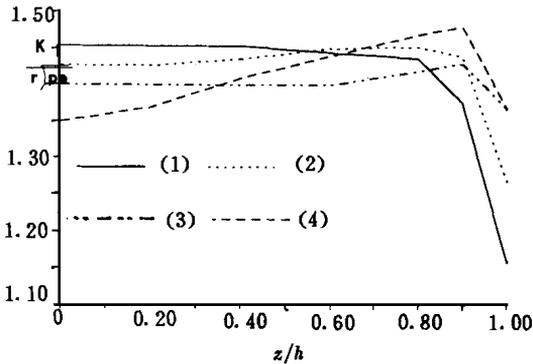


图 4 结构厚度的影响

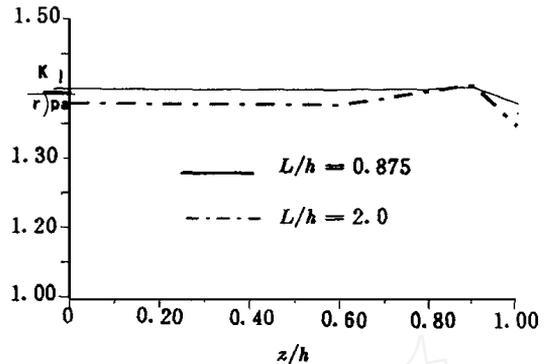


图 5 结构长度的影响

4 结 论

- 1) 将局部 - 整体分析方法用于三维有限体的断裂分析中, 给出了含穿透裂纹结构裂尖应力应变场的一般解, 它们类似于平面问题中的 Williams 展开式的作用, 揭示了裂纹尖端附近的力学性质, 为三维断裂分析提供了良好的基础。平面问题中的一整套成熟的分析方法都可以移植到三维断裂分析中去。在裂纹尖端应力应变场展开式的基础构造了三维高阶奇异元, 用有限元进行整体分析, 由于在裂纹尖端附近采用了更精确的位移模式, 提高了计算的精度 (一般在 5% 以内)。局部 - 整体分析方法是一种简捷有效而又不失准性的方法, 很有推广价值。
- 2) 以含中心穿透裂纹结构为例对有限大结构进行了分析研究, 与无限大板的有限元结果进行了比较, 探讨了有限结构的有限尺寸效应。本文讨论了结构厚度对应力强度因子的影响, 结果表明在结构其它尺寸不变的情况下, 结构越厚无量纲应力强度因子越小。本文讨论了结构长度对应力强度因子的影响, 结果表明在结构其它尺寸不变的情况下, 结构越长无量纲应力强度因子越小。
- 3) 细致地讨论了无限大结构裂纹与自由表面相交处的奇异性问题, 结果表明角点区域的奇异性与材料的泊松比有关, 泊松比越大奇异性越小。
- 4) 结果表明表层及角点处的结果精确与否对内部影响很小, 实际计算时可放松表层及角点处的精度。

参 考 文 献

- 1 李英志, 李敏华, 柳春图, 何明元. 含表面裂纹三维体裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算. 中国科学(A 辑), 1988, 8(8): 828~ 842
- 2 柳春图, 李英志. 含裂纹板壳及三维裂纹体断裂问题研究进展力学进展. 1985, 16(2): 265~ 266
- 3 柳春图, 李英志. 平板弯曲断裂问题研究的进展. 力学进展, 1982, 12(4)
- 4 T. Nakamura D. M. Parks Antisymmetrical 3-D stress field near the crack front of a thin elastic plate Int. J. Solid Structure 25(12): 1411~ 1426
- 5 J. C. Newman I S. Raju Three-dimensional finite-element analysis of finite-thickness fracture specimens NASA, TND-8414, 1977
- 6 T. Nakamura D. M. Parks Three-dimensional stress field near the crack front of a thin elastic plate J. Appl. Mechanics 1988, 55: 805~ 813

- 7 P. Benthem State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half space, *Int. J. Solid Structure* 1977, 13: 479 ~ 492
- 8 P. Benthem The quarter-infinite crack in a half space; A alternative and additional solutions *Int. J. Solid Structure* 1980, 16: 119~ 130
- 9 A. Bakker Three-dimensional constraint effects on stress intensity distribution in plate geometries with through-thickness cracks, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* 1992, 15(11): 1051~ 1069
- 10 薛昌明(G. C. Sih) A review of the three-dimensional stress problem for a cracked plate, *Int. J. Fract. Mech.* 1971, 7 (1): 39~ 61

附录 裂纹尖端应力应变场的渐近展开式

$$\begin{aligned} \sigma_x^I &= A_n(z) n(n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} \left\{ \left[\frac{5-\nu}{2} G + \lambda(1-\nu) \right] \cos \frac{n-2}{2} \theta - \frac{n-2}{4} G \cos \frac{n-6}{2} \theta \right\} \\ &+ B_n n(n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} \left\{ \frac{2-n}{4} G \cos \frac{n-6}{2} \theta + \left[\lambda(1-2\nu) - \frac{G}{2} \right] \cos \frac{n-2}{2} \theta \right\} \\ &+ C_n (n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} \left\{ -\frac{n}{2} G \cos \frac{n-4}{2} \theta + \left[\lambda(1-2\nu) - \frac{G}{2} \right] \cos \frac{n-2}{2} \theta \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^I &= A_n(z) n(n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} \left\{ \frac{n-2}{4} G \cos \frac{n-6}{2} \theta + \left[\lambda(1-2\nu) - \frac{G}{2} \right] \cos \frac{n-2}{2} \theta \right\} \\ &+ B_n n(n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} \left\{ \frac{5-\nu}{2} G + \lambda(1-2\nu) \right\} \cos \frac{n-2}{2} \theta + \frac{n-2}{4} G \cos \frac{n-6}{2} \theta \\ &+ C_n (n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} \left\{ 8G(1-\nu) - 2\lambda(1-2\nu) \right\} \cos \frac{n}{2} \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^I &= A_n(z) n(n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} \lambda(1-2\nu) \cos \frac{n-2}{2} \theta \\ &+ B_n (n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} \lambda(1-2\nu) \cos \frac{n-2}{2} \theta \\ &+ C_n (n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} \left\{ 8G(1-\nu) + 2\lambda(1-2\nu) \right\} \cos \frac{n}{2} \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= A_n(z) n(n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} G \left[\frac{3-4\nu}{2} \sin \frac{2-n}{2} \theta - \frac{n-2}{4} \sin \frac{6-n}{2} \theta \right] \\ &- B_n n(n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} G \left[\frac{n-2}{2} \sin \frac{6-n}{2} \theta + \frac{1}{2} \sin \frac{n-2}{2} \theta \right] \\ &+ C_n \frac{n(n+2)}{2} l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} G \sin \frac{4-n}{2} \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= -A_n(z) \frac{n(n+2)}{2} l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} \sin \frac{4-n}{2} \theta \\ &+ B_n (n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} G \left[2(1-2\nu) \sin \frac{n}{2} \theta - \frac{n}{2} \sin \frac{4-n}{2} \theta \right] \\ &+ 2C_n n(n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} G (1-\nu) \sin \frac{2-n}{2} \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= A_n(z) (n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} G \left[2(1-2\nu) \cos \frac{n}{2} \theta - \frac{n}{2} \sin \frac{4-n}{2} \theta \right] \\ &- B_n \frac{n(n+2)}{2} l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} G \cos \frac{n-4}{2} \theta + 2C_n n(n+2) l^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} G (1-\nu) \cos \frac{n-2}{2} \theta \end{aligned}$$

Analyzing Model I Crack Problems of Finite Structures Based on Local-Global Analytical Method

Feng Jinhui Liu Chuntu

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences Beijing 100080)

Abstract

This paper analyzes the mode I crack problems of finite structures based on the local-global analytical method. The asymptotic expression, a kind of high power singular element is constructed. It takes place of the crack thick mesh of usual finite element. The size effect of finite structure has been analyzed. The structure thickness and length effect on stress intensity factor have been analyzed in detail.

Keywords: local-global analytical method, finite structure, through thickness crack