第 35 卷 第 3 期 力 学 进 展 Vol. 35 No. 3
2005 年 8 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Aug. 25, 2005

# 无网格法及其最新进展*

顾元通[1] 丁 桦[2,†]
[1] 新加坡国立大学机械系 10 Kent Ridge Crescent, Singapore 119260
[2] 中国科学院力学研究所工程科学研究部, 北京 100080

**摘 要** 无网格法具有许多独特的优点, 因此有人认为无网格法将成为继有限元法之后新一代的数值方法. 到目前为止, 已提出了不下十几种无网格法, 这些无网格法各有不同的优缺点. 本文评述几种主要无网格法 (着重应用于固体力学中的基于弱式的无网格法), 将它们适当地分类, 论述典型的无网格形状函数的构造方法, 介绍无网格法的发展现状, 评价已提出无网格法的优缺点, 并比较典型无网格法的相同和不同点, 以及讨论无网格法发展所面临的问题等. 最后就无网格法的发展趋势进行了展望.

**关键词** 无网格法, 形状函数, 弱形式, 固体力学

## 1 引 言

为了模拟现代工程系统中的复杂的物理现象, 电子计算机已经成为必不可少的分析和模拟工具. 以计算机为基础的数值方法在现代工程分析和模拟中已经起着举足轻重的作用. 自 20 世纪 50 年代提出了有限元法以来, 有限元法已经成为工程分析和计算中的不可缺少的最重要的工具之一. 目前人们已经成功地开发了大量的有限元商业软件包, 并在工程分析中得到了广泛的应用. 有限元最显著的特点之一是使用预先定义好的网格将一个无限自由度的连续体离散成有限自由度的单元集合, 从而使获得一个复杂问题的近似解成为可能. 有限元法有很多优点, 这些优点在很多出版物中已经有了很多详细的论述, 本文就不再详述了. 然而, 正是由于使用了网格使得有限元法在求解一些工程问题时变得相对困难. 归纳起来, 有限元方法的弱点主要体现在 (这里指的是纯 Largrange 型的有限元方法, 不包括 ALE 方法, 它们有不同的优缺点):

(1) 首先, 在应用有限元分析一个问题时, 很多人力都用在网格的划分上. 真正用于分析计算的 CPU 时间一般较短. 在人力越来越昂贵, 而 CPU 费用越来越便宜的今天, 这一问题显得越来越突出. 其次, 有限元采用了分片连续的形状函数, 并且形状函数的阶次较低, 使得有限元所求得的应力精度相对较低, 因此在有限元应用中需要复杂和费时的后处理过程. 再次, 尽管已经发展了很多有限元自适应分析的方法, 但有限元真正实现自适应分析仍存在很多技术上的困难, 尤其对三维问题.

(2) 有限元在处理一些复杂的问题时会遇到困难. 这些问题主要包括: 极度大变形问题; 动态裂纹扩展问题; 高速冲击及几何畸变问题; 材料裂变问题; 金属材料成型问题; 多相变问题等等. 用有限元分析这些问题时, 由于巨大的网格畸变或单元分裂等造成有限元求解的困难甚至导致求解的失败. 为了解决这些问题, 往往在有限元计算中不断地进行有限网格重新划分, 然而, 这样不但大大地增加了计算时间, 而且对于有些问题单单重新划分网格并不能完全解决问题.

仔细分析后发现, 有限元的这些缺点源自于它使用了事先定义的网格. 要想彻底解决有限元所面临的这些问题, 就应避免应用固定的网格. 因此, 近年来无网格法的思想被提了出来, 并得到了迅速地发展. 目前, 有关无网格法的研究已成为计算力学领域中最热点的研究方向之一.

实际上早在 20 多年前研究人员就已经开始了无网格法的研究. 最早的无网格法之一是光滑质点水动力学法 (smooth particle hydrodynamics, SPH), 是由 Lucy[1] 和 Moraghan 等 [2] 于 1977 年率先提出的, 并被大量地应用于天体物理学的研究中. 不过, 直到 20

收稿日期: 2004-02-12, 修回日期: 2005-03-25
* 国家 973 项目 (2002CB412706) 和中国科学院知识创新重点方向性项目 (KJCX2-SW-L1)
†E-mail: hding@imech.ac.cn



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

世纪 90 年代初，无网格法并没有突破性的发展也没有得到足够的重视. 1994 年美国的 Belytschko 教授在修正了所谓的模糊单元法 (diffuse element method, DEM)[3] 的基础上提出了自由单元 Galerkin(element free Galerkin, EFG) 法 [4] 以后，无网格法才得到了突飞猛进的发展.

那么，什么叫无网格法呢？无网格法 (或称为自由网格法) 是在对于一个问题域建立离散的系统方程时不用事先定义好的网格的一种数值方法. 无网格法的最低要求是: 至少在进行场量近似时不需要事先定义好的网格. 而一个理想的无网格法在求解一个问题的全过程中都不需要事先定义好的网格 (包括场量近似和数值积分). 按这一要求, 目前已提出的很多无网格法并不是真正理想的无网格法. 例如， EFG 法在进行场量近似时不需要网格, 而为了得到弱式所需的数值积分, 需要一种所谓的 "背景网格", 尽管这一背景网格和场点无关，但仍需事先定义.

由于在无网格法中不再使用相互联结的单元来离散问题域, 上面所提到的在有限元分析中由于使用单元而引起的问题自然得到解决. 和有限元相比，无网格法的优点包括: 不需要网格; 容易构造高阶形状函数; 容易进行自适应分析; 能够解决一些传统数值方法很难解决的问题. 例如，如无网格法已经成功地应用于大变形问题 [5,6], 金属成型问题 [7], 动态裂纹扩展问题 [8~10], 高速冲击问题 [11,12], 穿透问题 [13], 岩土工程 [13,14] 等. 当然无网格法也存在计算量大，效率低等很多缺点. 有关无网格法优缺点的详细讨论详见第 4 部分.

目前，有关无网格法的文章迅速增加，每年也举行很多和无网格法相关的国际会议及讲座，已提出的无网格法已不下十几种之多. 除了有关无网格法的文章外，几本有关无网格法的专著也相继出版 [13,15~18].

对于目前的无网格法有不同的分类方法, 如根据使用的无网格形状函数的不同来分类; 根据使用的计算模型来分类 [19]; 根据域内离散与否来分类 (类似与 FEM 和 BEM 的分类) 等等. 根据无网格法所使用的计算模型不同，无网格法可分为 3 大类 [17]: (1) 基于配点的无网格法; (2) 基于弱式 (主要是各种 Galerkin 弱式) 的无网格法. (3) 基于积分弱式和配点结合的无网格法 [20,21].

本文目的在于评述几种主要的无网格法; 论述典型的无网格形状函数的构造方法; 介绍无网格法的发展现状; 评价已提出无网格法的优缺点，并对几种典型无网格法进行比较; 讨论无网格法发展所面临的问题等. 最后指出无网格法的发展趋势.

在回顾各种无网格法发展之前, 我们先讨论一下在无网格法中最基本，又是最核心的问题: 无网格法形状函数的构造.

## 2 无网格形状函数构造法

任何一种求解偏微分方程的数值方法，都需要通过某种近似方法将无限维的问题转化为有限维的问题，使得问题的解，可以用有限个参数来表征: 如有限级数的系数，解在有限个给定点 (节点) 上的值或加权平均值等. 而后通过偏微分方程和边界及初始条件 (强形式) 或变分方程和相关条件 (弱形式) 来确定这些参数. 通常问题的解 $u(\boldsymbol{x})$ 都可以通过这些有限个参数 $\alpha_i$ 近似地表示为

$$u(\boldsymbol{x}) \approx u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_i \alpha_i N_i(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

$N_i(\boldsymbol{x})$ 一般称之为插值函数或形状函数. 对于有限元方法，形状函数满足 Kronecker delta 函数性质，也就是

$$N_i(\boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij} \tag{2}$$

这一关系的存在使得有限元方法对一些问题的处理 (如对本质边界条件的处理) 变得简单，这也是有限元方法的优点之一. 早期的无网格方法的形状函数往往是不满足这一关系的. 为克服早期无网格方法的弱点，进行了大量的研究工作.

在无网格法的发展和研究中, 如何成功地构造无网格形状函数是我们所面临的核心问题. 一个理想的无网格形状函数构造法应满足如下条件 [18]:

(1) 应适用于任意分布的场点 —— 不规则点的适应性. 这样才能适用于工程中的复杂问题的分析;

(2) 应基于局部近似 (应用局部点进行近似)—— 局部性; 这样才能产生一个带状的矩阵, 提高求解效率，适于计算大型的问题.

(3) 所构造的形状函数应满足一定的再生性和协调性的要求 —— 再生性和协调性; 这是保证无网格法收敛的重要条件.

(4) 应有较高的计算效率 —— 高效性;

(5) 最好具有 Kronecker delta 函数性质. 这一性质可使无网格法容易精确地满足本质边界条件.

近年来, 研究人员先后提出了几种无网格形状函数构造法. 这些方法一般仅可满足上面所述的部分要求, 到目前为止还没有一种满足上面所有要求的理想的构造方法. 已有的无网格形状函数的构造法可分成 3 大类:

### 2.1 有限积分表示法

在此方法中，一个场函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的近似值可应用积分形式来表示

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{x_1}^{x_2} f(\boldsymbol{\xi})\, \widehat{W}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{3}$$



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中 $\widehat{W}$ 为 Kernel 函数 (或权函数, 也称为光滑函数).

光滑质点水动力学 (SPH) 法 [1,2] 和再生核质点法 (reproducing Kernel particle method, RKPM)[22] 属于这一方法.

SPH 形状函数构造法是于 1977 年提出的. 在 SPH 中, 一个场函数 $u(\boldsymbol{x})$ 在一点的近似值可以表示为

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega_x} u(\boldsymbol{\xi})\widehat{W}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}, h)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{4}$$

式中 $\Omega_x$ 是光滑域, $h$ 为光滑域长度. 在这一形式中, 核 (Kernel) 函数起着非常大的作用. Monaghan[23] 仔细研究了 Kernel 函数应该满足的条件, 更详细的讨论可见有关无网格法的专著 [13,18]. 常用的核函数包括: 指数函数和各种样条函数等. 有关常用的核函数的讨论可见文章 [23, 24].

SPH 构造法的主要缺点是 SPH 形状函数不满足 Kronecker delta 函数性质, 另外离散的 SPH 形状函数很难保证一致性的要求. 因此美国的 Liu[22] 引入了所谓的窗口函数修正了传统的 SPH 形式, 使其满足所需要阶次的一致性, 这就是所谓的再生核质点法 (RKPM). 在 RKPM 中, 场函数 $u(\boldsymbol{x})$ 在一点的近似值表示为

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega_x} u(\boldsymbol{\xi})C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\widehat{W}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}, h)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{5}$$

式中 $C(x,\xi)$ 是修正函数, 它可通过满足所需要的一致性条件来构造. 有关 $C(x,\xi)$ 的详细构造方法可参见文献 [13, 22]. RKPM 还先后发展出了一些变种形式, 如: 基于小波分析的伸缩尺度平移及多分辨率等特点的多尺度再生核质点法 (MSRKPM)[25~27] 和小波质点法 [28], 另外还有基于移动最小二乘法的再生核法 (MLSRKM)[29] 等.

然而和 SPH 形状函数类似, RKPM 形状函数具有较低的近似精度和不满足 Kronecker delta 函数性质等缺点, 这使得以 SPH 和 RKPM 为基础的无网格法精度较低和施加边界条件需特殊处理.

### 2.2 有限函数序列法

在此方法中, 一个场函数可用如下形式表示

$$f(\boldsymbol{x}) = a_0 + a_1p_1(\boldsymbol{x}) + a_2p_2(\boldsymbol{x}) + \cdots \tag{6}$$

式中 $a_i$ 为插值系数, $p_i(\boldsymbol{x})$ 为基函数. 移动最小二乘法 (moving least squares, MLS)[30,31], 点插值法 (point interpolation method, PIM)[18,32,33], 单位分解法 (partition of Unity, PU)[34] 和 $hp$- 云法 [35] 等均属于这一方法.

(1) 移动最小二乘法 (MLS)

Lancaster 和 Salkauskas 在进行曲面拟合 [30,31] 时推广了标准的最小二乘形式提出了移动最小二乘法 (MLS). 在移动最小二乘法中一个场函数 $u(\boldsymbol{x})$ 在一点的近似值可以表示为

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} p_j(\boldsymbol{x})a_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

这里 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 是完备的多项式基函数向量, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ 是插值系数向量, $m$ 是基函数的项数 (例如在二维问题中若取线性基函数, 则 $m=3$), $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ 通过使得加权最小二乘的误差最小来求得.

$$J = \sum_{i=1}^{n} \widehat{W}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)[\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) - u_i]^2 \tag{8}$$

式中 $n$ 是用于插值的场点数, 且 $n > m$. $\widehat{W}$ 是权函数. 这里应该强调的是, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ 也是插值点的函数, 它随插值点的移动而变化, 这一点和标准的最小二乘形式有所不同, 这就是所谓 "移动" 的由来, 也是使 MLS 形状函数能满足相容性要求 (compatibility) 的主要原因 [18].

移动最小二乘法的最大优点是应用较低阶的基函数 (如线性基函数) 通过选取适当权函数来获得具有较高连续性和相容性的形状函数. 其主要缺点是 MLS 形状函数不满足 Kronecker delta 函数性质, 这增加了处理边界条件的困难.

(2) 点插值法 (PIM)

点插值法是最古老的插值方法之一, 实际上有限元应用的就是点插值, 只不过其插值是在特定的单元内进行的. 无网格点插值 [18,32,36] 可写为如下形式

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} p_j(\boldsymbol{x})a_j = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a} \tag{9}$$

这里 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 是基函数向量, $\boldsymbol{a}$ 是插值系数向量, $n$ 是用于插值的场点数. 基函数项数和插值场点数在 PIM 中是一致的. 这里的 $\boldsymbol{a}$ 是插值常数, 只要用于插值的场点确定后, 它不随插值点的移动而变化, 这一点和移动最小二乘法有所不同.

到目前为止 PIM 中应用了两种基函数, 一是普通的多项式, 另一种是径向基函数 (radial basis function, RBF).

应用多项式基函数, PIM 插值形式简单, 并且对于规则分布的场点的插值具有较高的精度 [32]. 但若所选多项式基函数和所选的插值场点不匹配的话, 多项式点插值的矩阵可能产生病态或奇异. 为了解决这一问题, 先后提出了一系列方法, 如随机移点法 [32], 局部坐标变换法 [18], 和基于矩阵运算的矩阵三角化法 (matrix triangularization algorithm, MTA)[37,38] 等. 尽管这些方法可基本上解决多项式 PIM 的插值奇异性问题, 但它们仍在技术上存在或多或少的不足之处. 因此, 插值的奇异性问题仍限制了多项式 PIM 的应用.



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

径向基函数 (RBF) 是一组仅以距离为自变量的特殊基函数. RBF 已成功地应用于地质分析中. RBF 具有对任意分布场点的插值稳定的优点, 有效地解决了多项式插值中所存在的奇异性问题. 另外, RBF 很容易地从二维推广到三维 (因其自变量仅为距离), 因此, RBF 在构造无网格 PIM 形状函数中越来越受到重视 (radial PIM, RPIM). 常用的 RBF 包括: MQ (multi-quadrics) 函数, Gaussian 函数, 薄板样条 (thin plate spline, TPS) 函数, 紧支的径向基函数 (CSRBF)[41,42] 等. 有关这些函数的特性已有了很多研究结果 [39~41]. 由于 RBF 所具有的优点, RBF 插值将是一种很有发展前景的无网格形状函数构造法.

除了上述的点插值法外, 还提出了其它几种 PIM 形式, 如加权的点插值 [17] 和 Kriging 点插值法 [43] 等. 其中 Dai[43] 等证明了 Kriging 点插值法实际上是基于径向基函数插值的另外一种表达形式, 他们构造的形状函数的形式完全相同.

为了比较 MLS 和 PIM 形状函数的不同, 图 1 给出了一维 MLS 和 PIM(应用多项式和 RBF) 的形状函数及其导数的例子. 从图 1 中可以发现, MLS 形状函数不具有 Kronecker delta 函数性质, 与此相反, PIM 形状函数具有 Kronecker delta 函数性质. 和 PIM 相比, MLS 形状函数及其导数更加光滑. 此外, MLS 和 PIM 相比近似精度一般较低且需要较多的场点进行近似, 这一点已应用曲面拟合进行了详细的比较和分析 [18].

不过, PIM 形状函数由于没有使用权函数, 很难自动保证全域的相容性 [18]. 为了克服这一缺点, 因此提出了加约束的弱形式 [18]. 这里应再次强调, MLS 形状函数可通过选取适当的权函数来保证其全域的相容性.

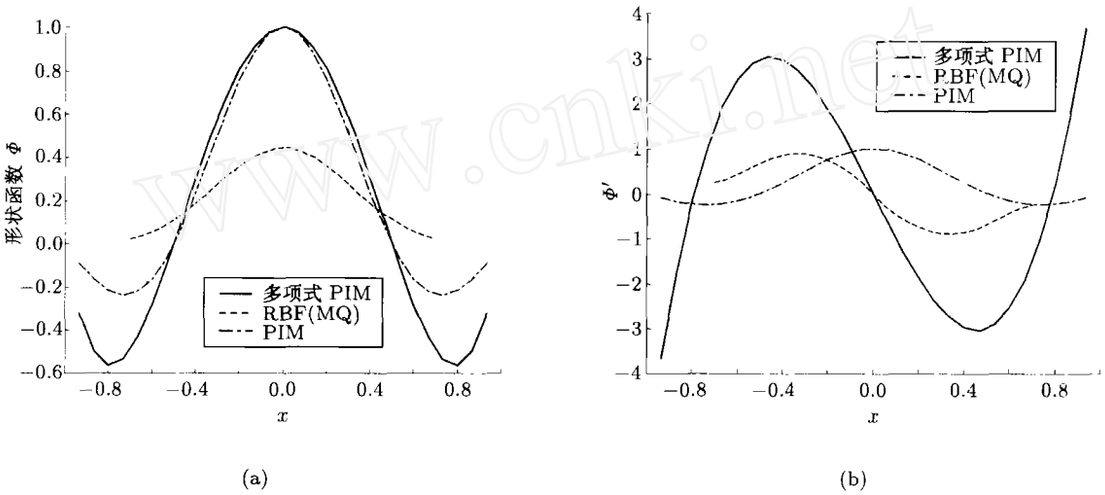


图 1 无网格形状函数及其导数

除了 MLS 和 PIM 外, 其它属于有限函数序列无网格形状函数的构造法还包括: 单位分解法 (PU)[34], *hp*- 云法 (*hp*-Clouds)[35,44] 等. 这类方法给出一种构造满足单位分解形状函数的方式, 从而也揭示了一些无网格形状函数间的内在联系. 如, MLS 可组成单位分解函数应用于 PU 法和 *hp*- 云法中.

### 2.3 有限微分表示法

在此类方法中, 一个场函数应用如下泰勒级数展开的形式表示为

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2!}f''(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2 + \cdots \tag{10}$$

有限插分法中应用的就是此种方法. 有限点法 (finite point method, FPM)[45] 就是属于这一方法的无网格形状函数构造法.

综上所述, 尽管到目前为止已经提出了多种无网格形状函数构造法, 它们各有其优缺点, 可以说到目前为止还没有找到一个十全十美的方法. 在实际计算中常用的方法包括: SPH, RKPM, MLS, RPIM 等. 可以说, 寻找一个有效, 稳定和精确的理想的无网格形状函数构造法仍是无网格法发展中的重点之一, 并且在这一领域还需要我们作大量的研究工作.

## 3 目前已提出的无网格法

### 3.1 基于配点 (collocation) 的无网格法

所谓配点方法就是直接离散微分 (或偏微分) 方程的一类数值方法. 它的历史要比基于积分弱式的无网格法要长的多. 这些方法包括: 无网格 vortex 法 [46,47], 基于任意网格的差分法 [48], 有限点法 (FPM)[45], *hp*- 云法 (*hp*-Clouds)[35,44] 和各种形式的



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

无网格配点法 (Collocation 法)[49~52].

基于配点的无网格法具有形式简单，易于应用和编程的优点. 另外由于在此类方法中一般没有积分，使得这类方法不但计算效率高也可彻底摆脱对网格的依赖. 然而这类方法在稳定性和精度上都比不过基于积分弱式的无网格法.

另外，在这类方法中较难处理边界条件 (特别是导数边界条件). 为了解决这一问题，先后提出了一些改进的配点法，如基于 Hermite 插值的配点法 [50]，基于最小二乘的配点法 [52] 等. 有关基于配点的无网格法的讨论可详见相应的出版物，如文 [53].

在通常的分类中，光滑质点流体动力学法 (SPH) 也被归为基于强式 (配点) 的无网格法 [19]. 实际上， SPH 在某种意义上也是一种基于弱式的方法 [18]，只不过其弱化过程是在场量及其导数的近似时进行的，这一点和通常的基于弱式的方法不同. 通常的基于弱式的方法是在得到离散的系统方程时进行弱化的. 在本文中，我们仍将 SPH 归于基于强式的无网格法中.

作为较早提出的一种无网格法，光滑质点流体动力学法 (SPH) 的主要思想是认为任何一个连续系统可离散为一系列的任意分布的质点，所有有关这一系统的量 (物理的或数值的) 都认为集中于这些质点上. 起初 SPH 被大量用于天体物理 [1] 和流力学有关的研究领域. 例如对二元星和恒星爆炸的模拟 [54,55]，对弹性流的模拟 [56]，对重力流的模拟 [57]，和对热传导的模拟 [58] 等. 近年来，SPH 被大量地应用于用一些传统的数值方法很难解决的问题的模拟中，如高速冲击问题 [11,12]，高速爆炸问题 [59,60~63]，和穿透问题 [13] 等.

SPH 的缺点包括张力不稳定问题 [13,19,64]，不能保证插值的一致性，零能模式和难于处理本质边界条件 [19] 等. 研究人员已经提出了一系列改进措施 [64~67]. Liu 和其同事，引进了窗口函数对 SPH 进行了改进并提出了 RKPM 法 [22]，Aluru[68] 在此基础上提出了基于配点的再生核质点法 (RKPM) 并用于微机械电子系统 (MEMS) 的分析和模拟中. 目前，已有一些商业软件包括了 SPH 解题器，如 AUTODYN 和 LS-DYNA.

### 3.2 基于积分弱式 (weak form) 的无网格法

和基于配点的无网格法相比，基于弱式的无网格法发展得要晚得多. 1992 年 Nayroles 等在他的文章中第一次将移动最小二乘 (MLS) 近似和伽辽金弱式结合起来提出了所谓模糊单元法 (diffuse element method, DEM)[3]. 在 DEM 方法中，节点的布置和有限元中的一样，然而其形状函数的建立是基于 MLS. 不过在其推导中，在对形状函数导数项的处理中有一些不合理的地方，从而限制了 DEM 的进一步发展. 1994 年美国的 Belytschko 教授在修正了 DEM 的基础上发表了一篇重要的文章 [4]. 在此文章中提出了自由单元伽辽金 (element free Galerkin, EFG) 法. 从 EFG 法提出后，基于弱式的无网格法的研究才真正蓬勃开展起来，这体现在先后提出多种无网格法，出现了大量的有关无网格法的论文和报告，例如：回顾和总结性文章 [19,69~71]，几期杂志特刊 [72,73]，先后出版了几本有关无网格法的专著 [12,18] 等，并且举行多次有关无网格法的国际会议和研讨会. 下面讨论几种典型的基于弱式的无网格法.

#### 3.2.1 基于全域伽辽金弱式的无网格法

类似于有限元法，此类无网格法中获得离散方程一般应用 Galerkin 方法. 通过对原控制方程的弱形式实施 Galerkin 过程，然后应用无网格形状函数进行离散. 这里着重介绍 EFG 法，无网格点插值法 (mesh-free point interpolation method, MPIM) 和 RKPM 法.

(1) EFG 法

以二维弹性静力学为例，EFG 法应用如下标准的 Galerkin 弱形式：

$$\int_{\Omega}(\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{b}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_t}\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\cdot\bar{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{11}$$

这里 $\boldsymbol{L}$ 是微分算子. 应用 MLS 在局部插值域 $\Omega_s$ (如图 2 所示) 内构造无网格形状函数从而建立离散方程. 由于弱形式的积分是基于整个问题域 $\Omega$ 的，因此需要一个全域的 "背景网格" 进行数值积分 (如图 2). 这一积分网格在理论上是独立于场点的.

EFG 法首先被应用于求解弹性力学问题，结果发现 EFG 法比有限元法具有更好的精度和收敛性 [4,74]. 另外， EFG 法对于点的分布不敏感，对于任意分布的乱点仍可获得较好的计算精度 [75]. 因此， EFG 法被大量的应用在计算力学 (尤其固体力学) 中. 在已发表的研究结果中， EFG 法已经成功地应用于二维 [4,74] 和三维 [76,77] 线性或非线性固体力学问题 [78,79]；裂纹扩展问题 [8~10,80~81]；梁，板 [82,83]，壳结构 [84,85]；和电磁场问题 [86,87] 等非常广泛的领域.

EFG 法主要缺点包括：应用本质边界条件困难和计算效率低. 应用本质边界条件困难的原因是因为 MLS 形状函数没有 Kronecker delta 函数性质. 目前，已提出了一些在 EFG 中应用本质边界条件数值技术，这些数值方法归纳起来包括：拉格朗日乘子法 [4]，罚函数法 [88]，奇异值分解法 [18,89,90] 和约束 MLS 法 [18] 等. 其中最有效也是最常用的是罚函数法. EFG 较低的计算效率是因为使用了复杂的 MLS 近似和背景积分. 为了提高 EFG 的计算效率，先后



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

提出了一些改进措施，如：点积分 [91,92], EFG 加速计算法 [69] 等. 不过，这些数值技术还是没能从根本上解决 EFG 法所存在的问题.

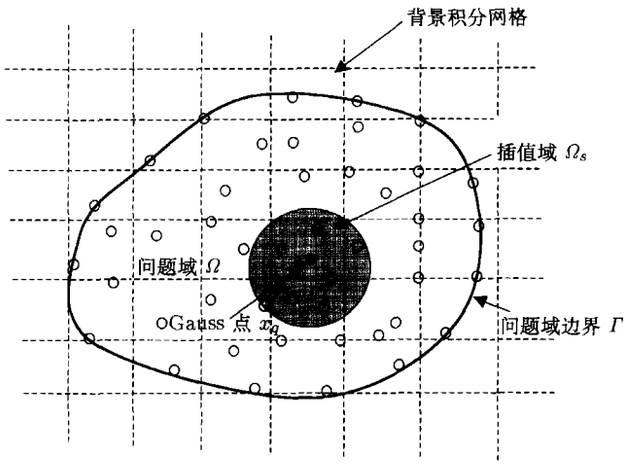


图 2 背景积分网格和 Gauss 点的插值域
(基于全域弱式的无网格法)

(2) 无网格点插值法 (MPIM)

无网格点插值法 (meshfree point interpolation method, MPIM) 其应用过程非常类似于 EFG 法，所不同的是，应用了点插值法 (PIM) 构造无网格形状函数. 和 MLS 形状函数相比，PIM 形状函数满足 Kronecker delta 函数性质，因此在 MPIM 中应用本质边界条件非常容易 [37]. 由于插值稳定性的原因，基于多项式 PIM 的 MPIM 的应用比较有限，而基于局部支撑径向基函数 (RBF) 的 RBF 无网格点插值 (MRPIM) 得到更广泛的应用 [93].

MRPIM 主要缺点包括：需要确定 RBF 的形状参数和计算效率较低. 另外，PIM 形状函数难于满足全域的相容性条件. 实际上不考虑相容性 (不加约束) 的 MRPIM 仍具有很好的收敛性和精度 [18,37], 因此在实际计算中多不考虑全域的相容性. 无网格点插值法已经成功地应用于二维弹性力学问题 [94,32], 弹塑性 (材料非线性) 问题 [95,96], 智能材料 (压电材料)[97,98] 和土木工程问题中的地基问题 [99,100] 等领域.

尽管目前为止的 MRPIM 的应用还没有 EFG 广泛，但 MRPIM 具有精度高，处理边界条件简单，可应用成熟的 FEM 技术和易于扩展到三维问题等优点. 因此，MRPIM 有一个很好的应用和发展前景.

(3) RKPM 法

前面已提到了基于配点的 RKPM 法，基于弱式的 RKPM 法 [22] 得到了更广泛的应用. 此外还陆续提出了一些其它形式的 RKPM 法：多尺度再生核质点法 (MSRKPM)、小波质点法 (WPM) 和移动最小二乘再生核法 (MLSRKM) 等. 各种 RKPM 法已成功应用于结构动力学问题 [22], 大变形分析 [6,7], CFD[27] 和 MEMS 等的计算和模拟中. 这方面的综述文章已经很多 [101,19], 这里就不再仔细讨论了.

3.2.2 基于局部伽辽金弱式的无网格法

基于全域伽辽金弱式的无网格法 (如 EFG 法) 需要用全域背景网格进行数值积分 [17,102], 这使得此类方法不能完全摆脱对“网格”的依赖. Atluri 等应用局部伽辽金弱式于 1998 年提出了无网格局部伽辽金法 (meshless Petrov-Galerkin method, MLPG)[103,104]. MLPG 的核心是对控制方程在一个局部子域 $\Omega_q$(图 3 所示) 采用局部加权残值法 (类似于子域法)

$$\int_{\Omega_q} \widehat{w}_i(\sigma_{ij,j} + b_i)\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{12}$$

这里 $\widehat{w}_i$ 是所选择的权函数. 方程 (12) 应用分步积分后可进一步得到 Petrov-Galerkin 弱式，然后应用 MLS 在局部插值域 $\Omega_s$ 上构造试探函数，从而使一个需要在全域求解的问题简化为在各个子域上对局部伽辽金方程的求解问题，从而避免了全域的数值积分. 如图 3 所示，MLPG 只需要在局部子域 $\Omega_q$ 进行局部数值积分，局部域可以选择简单的形状并可在计算中自动生成 (如图中的圆形域或矩形域). 因此和 EFG 法相比，MLPG 法大大地减小了对背景积分网格的依赖. 可以说，在无网格方面，MLPG 法比 EFG 法朝我们理想的目标迈进了一大步.

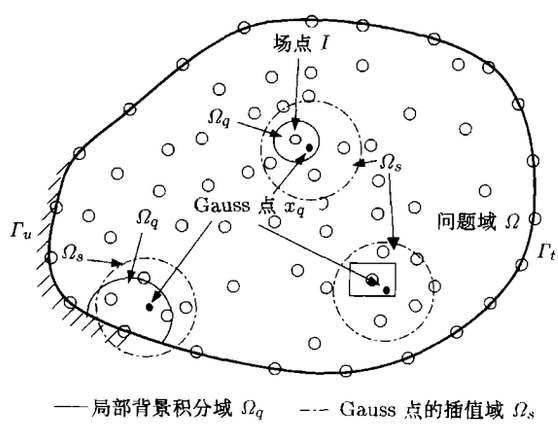


图 3 局部背景积分域和 Gauss 点的插值域
(基于局部弱式的无网格法)

Atluri 和他的研究组对 MLPG 法作了进一步的研究，Atluri 等在其综述性的文章 [89] 中对 MLPG 法进行系统的评价，并提出了适于 MLPG 法的误差分析法 [105]. 2002 年和 2004 年 Atluri 等出版了两本有关 MLPG 法的专著 [15,16]. 然而，MLPG 的应用还远没有 EFG 那么广. 到目前为止，MLPG 法



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的应用主要集中在：求解二维势流问题 [104,106]，二维弹性问题 [107,108]，一维 4 阶薄或厚梁问题 [109,110]，薄板问题 [111]，线性裂纹问题 [112,113]，流体力学问题 [114,115] 等.

MLPG 法的缺点包括：MLPG 的“刚度阵”带状但不对称. 这是因为权函数和试探函数取自不同的空间和不对称的边界积分引起的 [54]. 不对称的刚度阵无疑将增加求解的难度和计算量. MLPG 的另一个缺点是，MLPG 需要进行局部边界积分. 尽管在 MLPG 中大部分的边界积分可通过选用适当的权函数消除掉 [37]，但在问题域的边界上或附近，边界积分是不可避免的，这将增加求解的难度和计算量，尤其对于一些具有复杂边界 (几何形状) 的问题，局部边界积分变得更难处理.

另外两种局部无网格法是局部点插值法 (local point interpolation method, LPIM) 和局部径向点插值法 (local radial point interpolation method, LRPIM)[33,36,116,117]. LPIM 和 LRPIM 是基于 MLPG 的思想并将点插值法和局部伽辽金弱式结合起来而提出的. 和 MLLPG 相比，LPIM 和 LRPIM 更易满足本质边界条件且有较好的精度和收敛性. 这两种无网格局部点插值法，尤其是 LRPIM 已被成功地应用于不同的问题求解中 [118,119]，如，二维、三维弹性力学问题 [33,36,116,120]，薄及厚梁结构 [118]，不可压缩流体问题 [119] 等.

前面我们已经提到了，PIM 形状函数不能自动满足全域相容性的要求，在基于全域弱式的无网格 MRPIM 中，这一问题将影响其的收敛性和精度. 而应用局部伽辽金弱式的无网格法不需要满足全域相容性的要求 [18,37]. 因此，应用 RPIM 的局部无网格法更能体现 RPIM 的优点，因此也更有前途. 当然了，这还需要大量的后续研究工作.

#### 3.2.3 基于边界积分方程的无网格法

边界元法 (BEM) 是计算力学中另一重要的数值方法，它只需离散问题的边界，从而减少了网格划分工作. 然而，对于一个复杂的三维问题，对其复杂的表面进行网格离散仍是一项艰巨和复杂的任务. 因此，无网格的概念自然也被引入到 BEM 中. Mukherjee 等首先将 MLS 和传统的边界积分方程 (BIE)[121] 相结合提出了第一个边界型无网格法：边界点法 (boundary node method, BNM)[122]. BNM 已经被成功地应用于二维三维势问题 [123,124] 和弹性力学问题 [124~126] 中.

由于在 BNM 中应用了 MLS 形状函数，边界条件很难满足. 这一问题在边界型无网格法中显得更加突出，因为在这类方法中往往需要处理更多的边界条件. Mukherjee 等提出了一种添加一组额外方程的方法来满足边界条件 [121]，然而这一处理将增加系统方程的数目，使 BNM 计算效率变得很低. Gu 等应用 PIM 替代 MLS 与边界积分方程结合提出了边界型无网格点插值法 (boundary point interpolation method, BPIM 和 boundary radial point interpolation method, BRPIM)[37,126~128]. 在此方法中，由于应用了满足 Kronecker delta 函数性质的 PIM 形状函数，边界条件很容易处理，不需要任何额外方程，也不需要增加系统方程的个数，因此大大提高了 BPIM 和 BRPIM 的计算效率.

基于广义变分原理的杂交边界积分方程是上个世纪 80 年代末 90 年代初发展起来 [129~131]. 它的主要优点是将产生一个对称的系数阵. 杂交边界积分方程也被用来发展边界型无网格法 [131,132]. 另外，基于局部边界积分方程的局部边界积分方程法 (local boundary integral equation method, LBIEM) 也被提了出来，并被应用于非线性问题 [133~136] 的求解中.

#### 3.2.4 其它无网格法

以上回顾了几种典型的无网格法，近 10 多年来提出了一系列无网格法，除了以上已提到的无网格法外，还有下列一些无网格法. 美国学者 Oden 和他的学生提出了 *hp*- 云法 [35,44]. 该方法应用最小二乘原理建立单位分解函数，应用 Galerkin 弱式建立离散的模型，从而推导了一种适于自适应分析的无网格法. Liszka[137] 基于 *hp*- 云法的思想，应用配点法提出了另外一种无网格 *hp*- 云法.

日本 Yagawa 教授基于点积分的概念，提出了自由网格法 (free mesh method, FMM)[138]. FMM 的求解是完全基于场点，对于每个场点自动形成一个局部的三角形网格，然后进行节点积分. Yagawa 及其同事成功地将 FMM 用于三维固体及流体问题，并将并行计算引入到计算中 [139].

美国学者 Babuska 和他的学生提出了单位分解法 (partition of unity, PU)[140]，其核心思想是应用单位分解函数建立无网格形状函数，然后应用弱式建立离散方程.

除此之外，无网格法还包括：点到点法 (node-by-node method)[141]，有限覆盖法 (finite cover method, FCM)[142]，有限球法 (finite spheres method, FSM)[169] 等.

### 3.3 基于积分弱式 - 配点结合的无网格法：无网格弱强式法 (MWS)

前面分别介绍了基于强式 (配点) 和弱式的无网格法. 研究发现，基于配点的无网格法有以下优点：(1) 形式简单；(2) 计算效率高；(3) 不需要积分网格，因此它们可称为真正的无网格法. 然而，这类方法的缺点也十分明显：这类方法精度较低，稳定性差，特别对于具有 Neumann (导数) 边界条件的偏微分方程的求解就更加困难，而这种边界条件在固体力



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

学问题中大量存在 (如应力边界条件就是 Neumann 条件). 造成这一问题的主要原因是基于配点的无网格法处理应力边界条件时不能很好地控制误差, 并容易造成求解的不稳定性. 因此, 到目前为止, 基于配点的无网格法仍主要用于流体问题的求解中, 而在固体力学中的应用并不十分成功.

与此相反, 基于弱式的无网格法具有稳定性高和精度好的优点. 这类方法已经成功地应用于固体力学问题的分析中. 然而基于弱式的无网格法的缺点也十分明显, 它一般需要背景网格 (全域或局部的) 进行数值积分, 严格意义上讲它们并不是真正的无网格法. 另外, 基于弱式的无网格法的计算量比较大, 这主要由积分和插值所引起.

因此, 自然就会提出如下问题: 既然这两类方法各有优缺点, 能否将它们结合起来? 基于配点和局部弱式的无网格法有如下本质联系:

(1) 这两类方法的应用流程基本相同, 都是基于场点来组装系统方程的 [54];

(2) 如果在基于局部弱式的无网格法中应用具有 Dirac delta 函数性质的权函数, 其将退化为基于配点的无网格法;

(3) 在基于配点的无网格法中, 其计算误差和计算的不稳定性主要由导数边界条件引起, 与此相反, 导数边界条件在基于局部弱式的无网格法中很容易处理;

(4) 由于在导数边界上的场点相对较少, 在基于局部弱式的无网格法中的大量计算时间花费在对内部场点和本质边界上的场点的数值积分上.

(5) 基于以上特性, 最近提出了一种基于弱式 - 配点结合的无网格法 (简称为无网格弱强式法, meshless weak-strong form, MWS)[20,21].

如图 4 所示, 一个问题域由任意分布的场点来离散. 在 MWS 中, 如果一个场点位于问题域内或本质边界上, 应用配点法建立系统方程; 如果一场点位于 (或非常接近) 导数边界上, 应用局部弱式建立系统方程. 然后应用前面已经介绍的无网格形状函数的构造法 (MLS 或 RPIM) 构造形状函数, 从而得到离散的系统方程.

这里, 应该强调的是, 只对位于 (或非常接近) 导数边界边界上的场点进行局部积分, 从而完全避免了问题域内或本质边界上场点的数值积分, 因此可节省大量的计算时间.

MWS 已经应用于求解二维弹性力学问题 [21] 和不可压缩流体问题 [144], 都取得了令人满意的成果. 并且发现 MWS 和相应的基于局部弱式的无网格法相比具有较高的计算效率, 并且具有较高的精度和稳定性.

总之, MWS 法中应用了配点和局部积分弱式相结合的思想, 使得 MWS 法同时兼有形式简单和计算效率高的无网格配点法的优点, 及精度高和稳定性好的无网格弱式法的优点. 不过, 由于 MWS 才提出不久, 还有许多技术问题有待进一步解决, 例如如何进一步提高其稳定性, 如何提高其 $h$ 收敛性 (尤其应用 RBF 时), 应用 MWS 解决复杂的问题等. 这需要更多的研究工作.

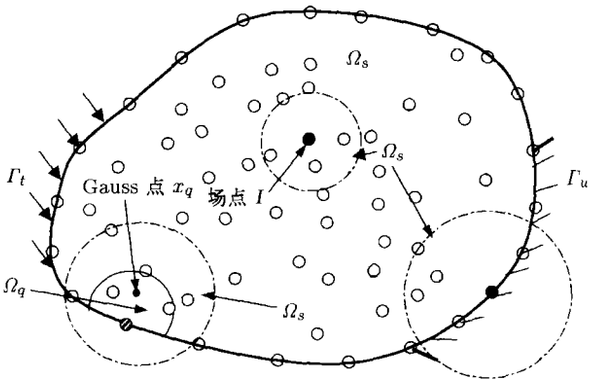


图 4 MWS 中的局部背景积分域 $\Omega_q$ 和局部插值域 $\Omega_s$

### 3.4 无网格法和其它方法的耦合法

和传统的 FEM 或 BEM 相比, 无网格法存在计算量大效率低的缺点. 实际上对于很多问题应用无网格法和其他成熟的方法耦合求解将大大地提高计算效率. 如在一个大的连续体上的小裂纹扩展问题, 若只将无网格法应用于包含裂纹的一个小区域来发挥无网格法的优势, 而其它大部分区域应用 FEM 或 BEM 是非常有效的. 因此无网格法和其他方法的耦合法也相应地发展了起来.

首先发展的耦合法是 EFG 法和 FEM 或 BEM 的耦合. 由于在 EFG 中应用了 MLS 形状函数, 使耦合交界面上的位移连续条件不能自动满足. 因此为了克服这一困难, 提出了两种解决方案:

(1) 应用耦合区修正的形状函数

在与耦合面相邻的 EFG 区内布置一层耦合区, 耦合区划分成有限元单元 (耦合单元). 在这一耦合区内应用如下修正的形状函数 [145~147]

$$\tilde{\Phi}_i(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} (1-R(\boldsymbol{x}))\Phi_i(\boldsymbol{x}) + \\ \qquad R(\boldsymbol{x})N_i(x), & \boldsymbol{x} \in \text{耦合区} \\ \Phi_i(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \text{纯无网格区} \end{cases} \tag{13}$$

这里 $\tilde{\Phi}$ 是修正的形状函数, $\Phi$ 是 MLS 形状函数, $N$ 是 FEM 形状函数, $R$ 是所谓的跳跃函数. 通过应用这一修正的形状函数, 使得 EFG 的形状函数在耦合面上满足 Kronecker delta 函数性质, 从而满足耦合交界面上的位移连续条件.



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

这种应用修正形状函数的方法简单实用, 但是这种耦合法也有缺点, 在从纯 EFG 区到耦合区的过渡时, 修正形状函数的导数不连续, 另外需要耦合单元也不同程度地增加了网格划分工作.

(2) 应用拉格朗日乘子法

应用拉格朗日乘子法得到耦合交界面上位移连续条件的泛函项 [134]

$$\Pi_I = \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\gamma} \cdot (\tilde{\boldsymbol{u}}_I^{(1)} - \tilde{\boldsymbol{u}}_I^{(2)}) \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\gamma} \tilde{\boldsymbol{u}}_I^{(1)} \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\gamma} \tilde{\boldsymbol{u}}_I^{(2)} \mathrm{d}\Gamma = \Pi_I^{(1)} - \Pi_I^{(2)} \tag{14}$$

然后将方程 (14) 中的泛函项加到相应的 FEM 或杂交 BEM 的泛函中得到耦合方程, 耦合交界面上的位移连续条件从而得以满足. 这种方法的优点是, 不用划分耦合单元, 并保持了 MLS 形状函数的较高的连续性.

应用上述的两种方法, 先后提出了 EFG 和 FEM 耦合法 [145,148], EFG 和 BEM 及杂交 BEM 耦合法 [146], EFG 和无网格杂交边界点插值法的耦合 [132,149] 等. 另外, 其它无网格法也被用来和 FEM 或 BEM 进行耦合, 如 MLPG 和 FEM 或 BEM 的耦合法 [150] 等.

### 3.5 无网格法的实际应用

在经历了一段时间的发展后, 目前无网格法研究的重点之一是应用无网格法解决实际的工程与科学问题. 无网格法目前主要应用于如下几个领域:

(1) 传统的计算力学领域. 很长的一段时间, 大量有关无网格法的研究工作主要集中在这方面 (前面几节已经详细介绍). 这方面应用的目的主要是通过和其它方法的比较来探讨无网格法的性质. 然而这类应用并不能真正体现无网格法特有的优势.

(2) 一些传统方法不易解决的特殊问题. 这类应用主要包括: 大变形问题 [5,6]; 裂纹扩展问题 [151~157]; 接触问题 [158,159]; 高速冲击问题 [11,12]; 高速爆炸问题 [59~63]; 材料裂变问题 [160]; 金属材料成型问题 [161~163], 穿透问题 [13] 等. 对于这些问题的应用真正体现了无网格法较之传统方法所具有的优势.

(3) 应用于一些新兴的工程和科学领域. 近年来, 随着科学技术的发展, 出现了一些诸如生命科学, 微尺度, 纳米技术等热点研究领域. 在这些问题中, 经常涉及到强非线性, 超大变形, 多尺度结合, 多场耦合等. 这无疑对数值模拟方法提出了更大的挑战, 以有限元和有限差分为代表的传统的数值方法很难胜任. 而无网格法在这些领域越来越显示出其优势, 因此最近几年来无网格法越来越多地应用于这些领域, 例如, 应用于纳米级多尺度 (multi-scales) 问题 [164~167], 细胞渗透 [1], 血液流动 [169], 生物微电子系统 (Bio-MEMS)[170~172] 等. 当然无网格法在这些领域的应用中还有很多不成熟和有待提高的地方, 但可以预见, 无网格法在这些领域的应用中将大有作为.

## 4 无网格法的评价及未来发展方向

经过短短 10 多年的时间, 无网格法象雨后春笋一般蓬勃发展起来. 目前已经成为计算力学领域的热点话题之一. 仔细算来, 已经提出的无网格法不下十几种. 上面已介绍一些典型的方法, 总结起来, 到目前为止比较成熟的无网格法包括: SPH, RKPM, EFG, RPIM, LRPIM, MLPG 等. 为了比较起见, 表 1 中列出了几种典型的无网格法. 由表 1 可见, 无网格法的区别主要来自两个方面: 选用不同形状函数构造法和选用不同计算模型. 这些无网格方法各有优缺点. 这一点在上面已经有所讨论. 总结起来无网格法的共同优点包括:

(1) 不需要网格 (至少函数近似不需要网格), 大大减少了有限元法中单元划分工作的负担.

(2) 容易构造高阶形状函数, 这不但有利于提高精度, 也减少了后处理的工作量.

(3) 能够解决一些传统数值方法很难解决的问题, 如超大变形问题, 裂纹扩展问题, 高速冲击问题等.

(4) 容易进行自适应分析.

(5) 在诸如生命科学, 纳米技术等新兴研究领域显示了其特有的优点.

然而, 由于无网格法是刚刚发展起来的一类新的数值方法, 在其发展中仍存在着这样或那样的问题. 尽管已经提出了一系列无网格法, 应该说还没有一个象有限元那样占统治地位的无网格方法, 概括起来, 目前无网格法的缺点和不足包括:

(1) 缺少坚实的理论基础和严格的数学证明. 有限元之所以得以巨大发展, 是由于其有坚实的理论基础. 尽管有限元的一些理论仍适用于无网格法, 但需要更多适合无网格法的理论基础和严格的数学证明, 如其收敛性, 一致性, 误差分析等.

(2) 无网格法一般计算量大, 效率低. 大的计算量是因为复杂的无网格插值和较大的带宽引起的.

(3) 无网格法在给我们带来不用网格的自由的同时, 也引入了一些未确定的参数, 如插值域的大小, 背景积分域的大小等. 目前为止还没有确定这些参数的理论方法, 一般是对这些参数应用数值试探的方法给出一个合理的范围, 而这一范围往往又和问题有关.

(4) 对于无网格解决复杂的工程与科学问题的研究不够.



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(5) 没有成熟的无网格法商用软件包. 这大大限制了无网格法的实际应用和推广.

尽管无网格法发展很快, 但在其成为真正实用的有效的数值分析工具前, 仍有很长的一段路要走. 未来的研究方向概括起来包括:

(1) 开展有关无网格法理论方面的研究, 尤其需要数学界学者的参与. 力争给出无网格法的理论基础, 并针对其收敛性等给出严格的数学证明. 同时, 对于无网格法中的一些参数也应进行理论研究, 力争给出比较严格的参数确定方法.

(2) 继续寻找理想的无网格形状函数的构造方法. 无网格法成败的关键之一就是需要一个有效的无网格形状函数的构造方法. 目前比较常用的几种方法, 如 SPH, MLS, RKPM, PIM 等各有不足之处, 应继续开发一种理想的无网格形状函数的构造方法.

(3) 继续发展理想的无网格法. 象上面所讨论的, 目前已发展的无网格法各有其优缺点, 仍需发展更加有效的无网格法.

(4) 提高无网格法的计算效率. 计算效率低是无网格法的一个普遍缺点, 应进行有关提高其计算效率的研究, 如应用并行计算等已有的大规模计算的技术等.

(5) 开展应用无网格法进行实际工程问题分析的研究. 目前有关无网格法的研究以纯学术研究为主, 无网格法所解决的问题大多数为较简单的问题. 因此, 无网格法的发展迫切需要推向实际应用. 近年来一个值得关注的趋势是, 无网格法被越来越多地应用于一些新兴领域, 如纳米分析, 生命科学等领域. 由于在这些领域中, 传统的数值方法将部分或完全失效, 因此无网格法在这些领域将会有很大的发展潜力.

(6) 开发无网格法商用软件包. 有限元的成功应用得益于目前市场上推出的的大量的有限元商业软件包, 如 ABAQUS, ANASYS 等. 而目前还没有无网格法的商用软件包. G.R. Liu 等首次开发了一个二维弹性力学的软件包 MFree2D[18,75,173,], 然而这一软件包以教学为目的, 距离实用还有一大段距离. 因此开发无网格法商用软件包已成了无网格法发展中的当务之急.

表 1. 几种典型的无网格法的比较

| 方法 | 形状函数构造法 | 计算模型 | 积分 | 应用领域 |
|---|---|---|---|---|
| SPH | SPH | 配点 | 无积分 | 天体物理, 流体, 高速冲击等 |
| RKPM | 修正 SPH | 配点或弱式 | 无积分 | 固体, 流体, 大变形等 |
| EFG | MLS | 全域 Galerkin 弱式 | 全域背景积分网格 | 固体等 |
| MRPIM | 径向基函数为基的点插值 | 全域 Galerkin 弱式 | 全域背景积分网格 | 固体等 |
| MLPG | MLS | 局部 Galerkin 弱式 | 局部背景积分域 | 固体, 流体等 |
| BNM | MLS | 边界积分方程 | 全域边界背景积分网格 | 固体等 |
| BRPIM | 径向基函数为基的点插值 | 边界积分方程 | 全域边界背景积分网格 | 固体等 |
| MWS | MLS 或 PIM | 配点和弱式结合 | 基本无积分 | 固体, 流体等 |

## 5 结 语

作为一种新兴的数值方法, 无网格法越来越受到理论界和工程界的重视. 有人甚至认为无网格法将成为继有限元法以后新一代数值方法. 得出这一结论的原因是因无网格法所具有的独特的优点. 但我们认为, 无网格法完全取代以有限元为代表的现有方法是不大可能的, 至少在近期还不现实. 目前比较可行的作法是无网格法可作为传统方法的有益补充, 不过无网格法前景却非常乐观.

尽管, 无网格法已经成功的应用于解决部分传统数值方法难以解决的复杂问题, 然而, 由于无网格法历史较短, 理论新, 在其发展道路上仍有许多亟待解决的技术和理论问题. 这些问题不单单表现在不太成熟的理论上, 就数值实现方面, 无网格法仍有诸多问题需要解决.

## 参 考 文 献


1 Lucy L. A numerical approach to testing the fission hypothesis. *Astron J*, 1995, 82: 1013~1024

2 Gingold R A, Moraghan J J. Smooth particle hydrodynamics: theory and applications to non spherical stars. *Man Not Roy Astron Soc*, 1977, 181: 375~389

3 Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 1992, 10: 307~318

4 Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods. *Int J Numer Methods Engrg*, 1994, 37: 229~256

5 Chen J S, Pan C, Wu C T. Large deformation analysis of rubber based on a reproducing kernel particle method. *Comp Mech*, 1997, 19, 153~168

6 Chen J S, Pan C, Wu C T, Liu W K. Reproducing kernal perticle methods for large deformation analysis of nonlinear structures. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1996, 139, 195~227

7 Chen J S, Roque C, Pan C, Button S T. Analysis of metal forming process based on meshless method. *J of Material*




© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

*Processing Tech*, 1998, 80-81: 642~646

8 Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods. *Model Simul Sci Compt Engrg*, 1994, 2: 519~534

9 Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Crack propagation by element free Galerkin methods. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, 51: 295~315

10 Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element free Galerkin methods for static and dynamic fracture. *Int J of Solids and Structures*, 1995, 32: 2547~2570

11 Libersky L D, Petscheck A G. Smoothed particle hydrodynamics with strength of materials. In: Trease H, Fritts J, Crowley W, et al, eds. Proceedings of The Next Free Lagrange Conference. NY: Springer-Verlag, 1991. 395: 248~257

12 Libersky L D, Randles P W, Carney T C. SPH calculations of fragmentation. In: Proceedings of 3rd US congress on Computational Mechanics. Owen, Dallas, TX, USA. 1995, June. 12-14

13 Liu G R, Liu M B. Smoothed Particle Hydrodynamics —— a Meshfree Particle Method. Singapore: World Scientific, 2003

14 张建辉，邓安福. 无单元法在筏板基础计算中的应用. 岩土工程学报， 1999, 21(6): 691~695

15 Atluri S N. The Meshless Method (MLPG) for Domain & BIE Discretiztions. Encino USA: Tech Sciemce Press, 2004

16 Atluri S N, Shen S P. The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method. USA: Tech Science Pree, 2002

17 Liu G R, Yan L. A study on numerical integrations in element free methods. In: Wang, Lee, Ang, eds. Proceeding of APCOM '99-Fourth Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics, Singapore, 1999-12-13-15. Singapore: Elsevier, 1999. 979~984

18 Liu G R. Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method. USA: CR C Press, 2002

19 Li S F, Liu W K. Meshfree and particle methods and their applications. *Applied Mechanics Review*, 2002, 55: 1~34

20 Gu Y T, Liu G R. A meshfree weak-strong (MWS) form method for time dependent problems. *Computational Mechanics*, 2005, 35, 134~145

21 Liu G R, Gu Y T. A meshfree method: meshfree weak-strong (MWS) form method, for 2-D solids. *Computational Mechanics*, 2003, 33(1): 2~14

22 Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods. *Int J Numer Methods Engrg*, 1995, 20: 1081~1106

23 Monaghan J J. Why Particle Methods Work. *Siam J Sci Sat Comput*, 1982, 3(4): 423~433

24 Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P. Meshless method: an overview and recent development. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1996, 139: 3~47, (74: 111~126)

25 Liu W K, Jun S. Multiple scale reproducing kernel particle method for large deformation problems. *Int J for Num Methods in Engre*, 1998, 141: 1339~1679

26 Liu W K, Chen Y, Chang C T, Belytschko T. Advances in multiple scale kernel particle methods. *Computational Mechanics*, 1996, 18: 73~111

27 Liu W K, Jun S, Sihling D T, Chen Y, Hao W. Multiresolution reproducing kernel particle method for computational fluid dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1997, 24(12): 1391~1415

28 Liu W K, Chen Y J. Wavelet and multiple scale reproducing kernel methods. *Int J Numer Method Fluids*, 1995, 21(10): 901~931

29 Liu W K, Li S F, Belytschko T. Moving least-square reproducing kernel methods (I) methodology and convergence. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1997, 143: 113~154

30 Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods. *Math Comput*, 1981. 37: 141~158

31 Lancaster P, Salkauskas K. Curve and Surface Fitting, an introduction. London: Academic Press, 1986

32 Liu G R, Gu Y T. A point interpolation method for two-dimensional solids. *Int J Muner Meth Engng*, 2001, 50: 937~951

33 Liu G R, Yan L, Wang JG, Gu Y T. Point interpolation method based on local residual formulation using radial basis functions. *Structural Eng and Mechanics*, 2002, 14(6): 713~732

34 Babuska I, Melenk J M. The partition of unity method. *Int J Numer Meth Eng*, 1997, 40(4): 727~758

35 Duarte C A, Oden JT. An *hp* adaptive method using clouds. Comput. *Methods Appl Mech Engrg*, 1996, 139: 237~262

36 Liu G R, Gu Y T. A local radial point interpolation method (LR-PIM) for free vibration analyses of 2-D solids. *J of Sound and Vibration*, 2001, 246(1): 29~46

37 Gu Y T. Development of meshfree techniques for computational mechanics: [Ph D thesis]. National University of Singapore, 2002

38 Liu G R, Gu Y T. A matrix triangularization algorithm for point interpolation method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(19): 2269~2295

39 Powell M J D. The Theory of Radial Basis Function Approximation in 1990. In: Light F W, ed. Advanced in Numerical Analysis, 1992. 303~322

40 Schaback R, Wendland H. Characterzation and construction of radial basis functions. In: Dyn N, Leviatan D, Levin D, Pinkus, eds. Multivariate Approximation and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2000

41 Wendland H. Error estimates for interpolation by compactly supported radial basis functions of minimal degree. *J Approximation Theory*, 1998, 93: 258~396

42 Wu Z. Compactly supported positive definite radial functions. *Adv Comput Math*, 1995, 4: 283~292

43 Dai K Y, Liu G R, Lim K M, Gu Y T. Comparison between the radial point interpolation and the Kriging interpolation used in meshfree methods. *Computational Mechanics*, 2003, (1-2): 60~70

44 Armando D C, Oden J T. Hp clouds-a, eshless method to solve boundary value problems. TIC AM Report 95-05, University of Texas at Austin. 1995

45 Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O Z, Taylor R L. A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow. *Int J Numer Methods Engrg*, 1996, 39: 3839~3867

46 Bernard P S. A deterministic vortex sheet method for boundary layer flow. *J of Computational Physics*, 1995, 117: 132~145

47 Chorin A J. Numerical study of slightly viscous flow. *J of Fluid Mechanics*, 1973, 57: 785~796

48 Liszka T, Orkisz J. The Finite Difference Method for Arbitrary Irregular Meshes, a Variational Approach to Applied Mechanics Problems. Paris: GAMNI 2, 1980. 227~235

49 Xu X G, Liu G R. A local-function approximation method for simulating two-dimensional incompressible flow. In: Wang C M, Lee K H, Ang K K, eds. Proceedings 4th Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics, 1999-12-15-17, Singapore. 1021~1026



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

50 Liu Xin, Liu G R, Tai Kang, Lam K Y. Radial basis point interpolation collocation method for 2-d solid problem, advances in meshfree and x-fem methods. In: Liu G R, ed. Proceedings of the 1st Asian Workshop on Meshfree Methods. Singapore: World Scientific, Dec. 2002. 35~40

51 Zhang X, Song K Z, Lu M W, Liu X. Meshless methods based on collocation with radial basis functions. *Computational Mechanics,* 2000, 26(4): 333~343

52 Zhang X, Liu X H, Song K Z, Lu MW. Least-square collocation meshless method. *Int J Numer Methods Engrg*, 2001, 51(9): 1089~1100

53 Liu G R, Gu Y T. An Introduction to Mfree Methods and Their Programming. Berlin: Springer Press, 2004

54 Benz W. Applications of smoothed particle hydrodynamics (S PH) to astrophysical problems. *Comput Phys Comm*, 1988, 48: 97~105

55 Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics. *Annu Rev Astron Astrophys*, 1992, 30: 543~574

56 Swegle J W, et al. On the feasibility of using smoothed particle hydrodynamics for underwater explosion. Report at Sandia National laboratories, August, 1992

57 Moraghan J J. Simulating gravity currents with SPH lock gates, Applied Mathematics Reports and Preprints, Monash University. 1995

58 Cleary P W. Modeling confined multi-material heat and mass flows using SPH. *Applied Mathematical Modeling*, 1998, 22: 981~993

59 Liu G R, Liu M B, Lam K Y. Smoothed particle hydrodynamics for numerical simulation of high explosive explosions. In: The First International Symposium on Advanced Fluid Information (AFI-2001), Institute of fluid Science, Tohoku University, Sendai, Japan, 2001

60 Liu M B, Liu G R, Zong Z, Lam K Y. Smoothed particle hydrodynamics for numerical simulation of underwater explosions. *Computational Mechanics,* 2003, 30(2): 106~118

61 Liu M B, Liu G R, Zong Z, Lam K Y. Computer simulation of the high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology. *Computers & Fluids*, 2003, 32(3): 305~322

62 Liu M B, Liu G R, Zong Z, Lam K Y. Numerical simulation of underwater explosion by SPH. In: Atluri S N, Brust F W, eds. Advances in Computational Engineering & Science.Forsyth, GA, USA: 2000. SA. Tech. Science Press, 1475~1480

63 Liu M B, Liu G R, Zong Z, Lam K Y. Numerical simulation of underwater shock using s ph methodology. In: Computational Mechanics and Simulation of Underwater Explosion Effects- US/Singapore workshop, November, Washington D.C. 2000

64 Swegle J W, Hicks D L, Attaway S W. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. *Journal of Computational Physics*, 1995, 116: 123~134

65 Monaghan J J, Lattanzio J C. A refined particle method for astrophysical problems. *Astronomy and Srtophsics*, 1985, 149: 135~143

66 Morris J P. Stablity properties of SPH. *Publ Astron Soc Aust,* 1996, 13

67 Randles P W, Libersky L D. Smoothed particle hydrodynamics some recent improvements and applications. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, 138: 375~408

68 Aluru N R. A point collocation method based on reproducing kernal approximations. *Int J Num Methods in Engrg*, 2000, 47: 1083~1121

69 Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Liu W K. Smoothing and accelerated computations in the element free Galerkin method. *J of Comp and Appl Math*, 1996, 74: 111~126

70 曹国金, 姜弘道. 无单元法研究和应用现状及动态. 力学进展, 2002, 42(4): 526~534

71 张雄, 宋康祖, 陆明万. 无网格法的研究进展及其应用. 见: 袁明武, 孙树立编. 工程与科学中的计算力学, 中国计算力学大会, 广州市, 2001-12-06-08. 北京: 北京大学出版社, 2001. 112~121

72 Rendles P W, Libersky L D. Smoothed particle hydrodynamics —— some recent improvements and applications *Computer Methods in applied Mechanics and Engineering*, 1996, 138: 375~408

73 Li S, Hao W, Liu W K. Numerical simulations of large deformation of thin shell structures using meshfree methods *Computational Mechanics*, 2000, 25: 102~116

74 Lu Y Y, Belytschko T, Gu L. A new implementation of the element free galerkin method. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1994, 113: 397~414

75 Liu G R, Tu Z H. An adaptive procedure based on background cells for meshless methods. *Comput Methods in Appl Mech and Engrg,* 2002, 191(17-18): 1923~1943

76 Belytschko T, Krysl P, Krongauz Y. A three-dimensional explicit element-free Galerkin method. *Int J Numer Meth Fl*, 1997, 24(12): 1253~1270

77 Chen W H, Guo X M. Element free galerkin method for three-dimensional structural analysis. *Computer Modeling in Engineering & Science*, 2001, 4(2): 497~508

78 Jun S A. Meshless method for nonlinear solid mechanics. *Riken Review*, 1996, 14: 33~34

79 庞作会, 葛修润, 王水林. 无网格伽辽金法在边坡开挖问题中的应用. 岩土力学, 1999, 20(1): 61~64

80 Krysl P, Belytschko T. Element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 44(6), 767~800

81 Lu Y Y, Belytschko T, Tabbara M. Element-free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 1995, 126: 131~153

82 Krysl P, Belytschko T. Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 1995, 17(1-2): 26~35

83 Liu G R, Chen X L. A mesh-free method for static and free vibration analyses of thin plates of complicated shape. *Journal of Sound and Vibration,* 2001, 241(5): 839~855

84 Krysl P, Belytschko T. Analysis of thin shells by the element-free Galerkin method. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, 33(20-22): 3057~3080

85 Liu L, Liu G R, Tan V B C. Element free method for static and free vibration analysis of spatial thin shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, 191: 5923~5942

86 Cingoski V, Miyamoto N, Yamashita H. Element-free Galerkin method for electromagnetic field computations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1998, 34(5): Part 1, 3236~3239

87 Liu S Z, Yang Q X, Chen H Y. Improvement of the element-free Galerkin method for electromagnetic field calculation. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 2004, 14(2): 1866~1869

88 Zhu T, Atluri S N. A modified collocation & a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method. *Comput Mech*, 1998, 21(3). 211~222



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

89 Atluri S N, Kim H G, Cho J Y. A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG), and local boundary integral equation (LBIE) methods. *Computational Mechanics*, 1999, 24: 348~372

90 Strang G. Linear algebra and its application. New York: Academic Press, 1976

91 Beissel S, Belytschko T. Nodal integration of the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 49~74

92 Belytschko T, Guo Y, Liu W K, Xiao S P. A unified stability of meshless particle methods. *Int J Numer Methods Engng*, 2000, 48: 1359~1400

93 Wang J G, Liu G R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. *International J Numer Meth Eng*, 2002, 54(11): 1623~1648

94 Liu L, Liu G R, Tan VBC, Gu Y T. A conforming point interpolation method for analyzing spatial thick shell structures. advances in meshfree and X-FEM methods. In: Liu G R, ed. Proceeding of the 1st Asian Workshop in Meshfree Methods, Singapore, Dec, 2002. 96~106

95 Wang J G, Liu G R. Radial point interpolation method for no-yielding surface models. In: Bathe K J, ed. Proceedings of the Computational Fluid and Solid Mechanics, United Kingdom: Elsevier Science Ltd, 2001. 538~540 (Paper presented at First M. I. T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 12-15 June 2001, M.I.T., United States)

96 Wang J G, Liu G R. Radial point interpolation method for elastoplastic problems. In: Yang Y B, Leu L J, Hsieh S H, eds. Proc of the 1st Int Conf On Structural Stability and Dynamics, Singapore. Scientific Press, Dec 7-9, 2000, Taipei, Taiwan. 2000. 703~708

97 Liu G R, Dai K Y, Lim KM, Gu Y T. A point interpolation mesh free method for static and frequency analysis of two-dimensional piezoelectric structures. *Computational Mechanics*, 2002, 29(6): 510~519

98 Liu G R, Dai K Y, Lim K M, Gu Y T. A radial point interpolation method for simulation of two-dimensional piezoelectric structures. *Smart Materials and Structures*, 2002, 12(2): 171~180

99 Wang J G, Liu G R. Radial point interpolation method for no-yielding surface models. In: Proc Of the first M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 12-14 June 2001. 538~540

100 Wang J G, Liu G R, Wu Y G. A point interpolation method for simulating dissipation process of consolidation. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 2001, 190: 5907~5922

101 周进雄, 李梅娥, 张红艳, 张陵. 再生核质点法研究进展. 力学进展, 2002, 42(4): 535~544

102 Dolbow J, Belytschko T. Numerical integration of the galerkin weak form in meshfree methods. *Computational Mechanics*, 1999, 23: 219~230

103 Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 1998, 22, 117~127

104 Atluri S N, Zhu T. New concepts in meshless methods. *Computational Mechanics*, 2000, 22: 117~127

105 Kim H G, Atluri S N. Arbitrary placement of secondary nodes, and error control, in the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2000, 1(3): 11~32

106 Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach to nonlinear problems in computer modeling and simulation. *Computer Modeling and Simulation in Engineering*, 1998, 3(3): 187~196

107 Atluri S N, Zhu T. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elsto-statics. *Computational Mechanics*, 2000, 25: 169~179

108 Gu Y T, Liu G R. A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for free and forced vibration analyses for solids. *Computational Mechanics*, 2001, 27 (3): 188~198

109 Atluri S N, Cho J Y, Kim H G. Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, with generalized moving least squares interpolation. *Computational Mechanics*, 1999, 24: 334~347

110 Cho J Y, Kim H G, Atluri S N. Analysis of shear flexible beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method based on locking-free formulation. *Engineering Computations*, 2001, 18(1/2): 215~240

111 Gu Y T, Liu G R. A meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) formulation for static and free vibration analyses of thin plates. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2001, 2(4): 463~476

112 Ching H K, Batra R C. Determination of crack tip fields in linear elastostatics by the meshless local petrov-galerkin (MLPG) method. *CMES*, 2001, 2(2): 273~290

113 Sladek J, Slad V, Zhang C Z., Dynamic response of a crack in a functionally graded material under an anti-plane shear impact load. *Key Engineering Materials*, 2003, 251(2): 123~129

114 Lin H, Atluri S N. Analysis of incomepressible Navier-Stokes flows by the meshless MLPG method. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2001, 2(2): 117~142

115 Lin H, Atluri S N. Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for conection-difusion problems. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2000, 1(2): 45~60

116 Liu G R, Gu Y T. A local point interpolation method for stress analysis of two-dimensional solids. *Structural Engineering and Mechanics*, 2001, 11(2): 221~236

117 Liu G R, Gu Y T. Comparisons of two meshfree local point interpolationmethods for structural analyses. *Computational Mechanics*, 2002, 29: 107~121

118 Gu Y T, Liu G R. A local point interpolation method for static and dynamic analysis of thin beams. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2001, 190: 5515~5528

119 Wu Y L, Liu G R. Application of local radial point interpolation method (LRPIM) to impressible flow simulation. *Computational Mechanics*, 2003, 30(5-6): 355~365

120 Brebbia C A, Telles J C, Wrobel L C. Boundary Element Techniques. Berlin: Springer Verlag, 1984

121 Mukherjee Y X, Mukherjee S. Boundary node method for potential problems. *Int J Num Methods in Engrg*, 1997. 40: 797~815

122 Chati M K, Mukherjee S. The boundary node method for three-dimensional problems in potential theory. *Int J Numer Methods Engrg*, 2000, 47: 1523~1547

123 Chati M K, Mukherjee S, Paulino G H. The meshless hypersingular boundary node method for three-dimensional potential theory and linear elasticity problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2001, 25(8): 639~653

124 Chati M K, Mukherjee S, Mukherjee Y X. The boundary node method for three-dimensional linear elasticity. *Int J Numer Methods Engrg*, 1999, 46: 1163~1184

125 Kothnur V S, Mukherjee S, Mukherjee Y X. Two-dimensional linear elasticity by the boundary node method. *Int J of Solids and Structures*, 1999, 36: 1129~1147

126 Gu Y T, Liu G R. A boundary point interpolation method (BPIM) using radial function basis, structural eng and me-



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

chanics structural engineering and mechanics, *An International Journal,* 2003, 15(5): 535~550

127 Gu Y T, Liu G R. A boundary point interpolation method for stress analysis of solids. *Computational Mechanics*, 2002, 28(1): 47~54

128 Liu G R, Gu Y T. Boundary meshfree methods based on the boundary point interpolation methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements,* 2004, 28(5): 475~487

129 DeFigueiredo T G B. A New Boundary Element Formulation in Engineering. Berlin: Springer-Verlag, 1991

130 Jin Z L, Gu Y T, Zheng Y L. Hybrid Boundary Elements for potential and elastic problem. In: Yao Z H, Fukuoka-Shi, eds. Proceedings of the 7th Japan-China Symposium on Boundary Element Methods, Japan, May 13-16, 1996. B.V.: Elsevier Science, 1996. 143~152

131 Zhang J M, Yao Z H, Li H. A hybrid boundary node method. *International J for Numerical Methods in Engineering,* 2002, 53: 751~763

132 Gu Y T, Liu G R. Hybrid boundary point interpolation methods and their coupling with the element free Galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements,* 2003, 27(9): 905~917

133 Atluri S N, Sladek J, Sladek V, Zhu T. Local boundary integral equation (LBIE) and it's meshless implementation for linear elasticity. *Computational Mechanics*, 2000, 25(2): 180~198

134 Zhu T, Zhang J D, Atluri S N. Meshless local boundary integral equation (LBIE) method for solving nonlinear problems. *Computational Mechanics*, 1998, 22(2): 174~186

135 Zhu T, Zhang J D, Atluri S N. A meshless numerical method based on the local boundary integral equation (LBIE) to solve linear and non-linear boundary value problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, 23(5-6): 375~389

136 Zhu T, Zhang J D, Atluri S N. Local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. *Computational Mechanics*, 1998, 21(3): 223~235

137 Liszka T J, Duarte C A M, Tworzydlo W W. Hp-meshless clouds method. *Comput Methods Appl Mech Engrg,* 1996, 139(3): 263~288

138 Yagawa G, Yamada T. Free mesh method: a new meshless finite element method. *Computational Mechanics,* 1996, 18(5): 383~386

139 Yagawa G, Furukawa T. Recent developments of free mesh method. *Int J Numer Meth Engrg*, 2000, 47: 1419~1443

140 Melenk J M, Babuska I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 289~314

141 Nagashima T. Node-by node meshless approach and its application to structural analyses. *Int J Numer Methods Engng*, 1999, 46: 341~385

142 Suzuki K, Ohtsubo H. Analysis of 3D solid with complicated geometry using finite cover method. In: Liu G R, ed. Proceeding of the 1st Asian Workshop in Meshfree Methods, Singapore, 2002. 259~261, 7~14

143 De S, Bathe K J. The method of finite spheres. *Computational Mechanics*, 2000, 25, 329~345

144 Liu G R, Wu L, Ding H. Meshfree weak-strong method for fluid mechanics. *International J for Numerical methods in Fluids*, 2004, (10): 1025~1047

145 Belytschko T, Organ D. Coupled finite element-element-free Galerkin method. *Computational Mechanics,* 1995, 17: 186~195

146 Gu Y T, Liu G R. A coupled element free Galerkin/boundary element method for stress analysis of two-dimensional solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190/34: 4405~4419

147 Krongauz Y, Belytschko T. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite element. *Comput Methods in Appl Mech and Engrg*, 1996. 131: 133~145

148 Hegen D. Element-free Galerkin methods in combination with finite element approaches. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, 135: 143~166

149 Liu G R, Gu Y T. Coupling of element free Galerkin and hybrid boundary element methods using modified variational formulation. *Computational Mechanics*, 2000, 26(2): 166~173

150 Liu G R, Gu Y T. Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method in combination with finite element and boundary element approaches. *Computational Mechanics,* 2000. 26: 536~546

151 Batra R C, Ching H K. Analysis of elastodynamic deformations near a crack/notch tip by the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2002, 3(6): 717~730

152 Chen Y, Eskandarian A Oskard. Meshless analysis of plasticity with application to crack growth problems. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2004, 1(1-3): 83~94

153 Duflot M, Nguyen-Dang H. Fatigue crack growth analysis by an enriched meshless method. *J of Computational and Applied Mathematics,* 2004, 168(1-2): 155~164

154 Liu W K, Hao S, Belytschko T. Multiple scale meshfree methods for damage fracture and localization. *Computational Materials Science*, 1999, 16(1-4): 197~205

155 Lou L L, Zeng P. Meshless method for 2D mixed-mode crack propagation based on Voronoi cell. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, 16(3): 231~239

156 Rao B N, Rahman S. An enriched meshless method for nonlinear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 2004, 59(2): 197~223

157 Rao B N, Rahman S. Probabilistic fracture mechanics by Galerkin meshless methods - part I: rates of stress intensity factors. *Computational Mechanics,* 2002, 28 (5): 351~364

158 Belytschko T, Fleming M. Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method. *Computer & Structures*, 1999, 71(2): 173~195

159 Kim N H, Choi K K, Chen J S, et al. Meshless shape design sensitivity analysis and optimization for contact problem with friction. *Computational Mechanics*, 2000, 25(2-3): 157~168

160 Rabczuk T, Eibl J. Simulation of high velocity concrete fragmentation using SPH/MLSPH. *International Journal for numerical methods in engineering*, 2003, 56(10): 1421~1444

161 Guo Y M, Nakanishi K. A rigid-plastic meshless method for forming simulations. *Key Engineering Materials*, 2003, 233(2): 341~346

162 Bonet J, Kulasegaram S. Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 2000, 47(6): 1189~1214

163 Chen J S, Pan C, Roque C M O L, et al. A Lagrangian reproducing kernel particle method for metal forming analysis. *Computational Mechanics*, 1998, 22(3): 289~307

164 Zhang L, Liu W K, Li S F, Qian D, Hao S. Survey of Multiscale Meshfree Particle Methods. In: Griebel, Schweitzer, eds. Meshfree Methods for Partial Differential Equations,



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 2002. 26: 441~458

165 Wagner G J, Liu W K. Hierarchical enrichment for bridging scales and meshfree boundary conditions. *Int J Num Meth Eng*, 2000, 50: 507~524

166 Liu W K, Li S, Hao W. Simulations of Fluids and Solids by Multi-Scale Meshfree Methods. In: Bento, Oliviera, Pereira, eds. EPMESC VII Computational Methods in Engineering and Science, International Conference on Enhancement and Promotion of Computational Methods in Engineering and Science, Macao, 1999. Singapore: Scientific Press, 1999. 1, 43~52

167 Shen S P, Atluri S N. Multiscale Simulation Based on The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method. *CMES - Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2004, 5(3): 235~256

168 Aktas O, Aluru N R. A Combined DSMC/Meshless Technique for Multiscale Analysis of Microfluidic Filters. In: Wild, Aluru, eds. Proceedings of the 2001 International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems, 2001-03-19-21, Hilton Head Island, USA. Cambridge, MA, USA: NS TI Press, 2001. 177~180.

169 Tanaka N, Takano T. Microscopic-scale simulation of blood flow using SPH method. *International Journal of Computational Methods*, 2005, 2

170 Aluru N R. A reproducing kernel particle method for meshless analysis of microelectromechanical systems. *Computational Mechanics,* 1999, 23(4): 324~338

171 De S K, Aluru N R. A chemo-electro-mechanical mathematical model for simulation of pH sensitive hydrogels. *Mechanics of Materials*, 2004, 36(5-6): 395~410

172 De S K, Aluru N R, Johnson B, Crone W C, Beebe D J, Moore J S. Equilibrium swelling and kinetics of pH-responsive hydrogels: Models, experiments and simulations. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2002, 11(5): 544~555

173 Liu G R, Tu Z H, Mfree2d: An Adaptive Stress Analysis Package Based On Mesh-Free Technology. In: Bathe K J, ed. Proceedings of the Computational Fluid and Solid Mechanics. London: UK: Elsevier Science Ltd, London, 2001. 327~329 (Paper presented at First M. I. T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 12-15 June, 2001, MIT, USA)

174 龙述尧. 弹性力学问题的局部 Petrov-Galerkin 方法. 力学学报, 2001, 33(4): 508~517

# RECENT DEVELOPMENTS OF MESHLESS METHOD*

GU Yuantong[1] DING Hua[2,†]

[1] Department of Mechanical Engineering, National University of Singapore, 10 Kent Ridge Crescent, Singapore 119260

[2] Divisionof Engineering Sciences, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China

**Abstract** The meshless or meshfree method has progressed rapidely in recent years. It becomes one of the most important topics in computational mechanics. With its many special advantages, it is considered as a new generation of numerical methods after finite element method. Up to now, at least several dozens of special methods with different advantages have been proposed. The purpose of this paper is to discuss several important meshless methods, especially in solid mechanics. The classifications, the constructions of shape functions, the perspective, the advantages and the disadvantages of different methods are discussed, together with some common features. Finally the perspectives and the challenges in developing the meshlesh methods are given.

**Keywords** meshless, shape function, weak form, solid mechanics

* The project supported by the Special Funds for Major State Basic Research Project (2002CB412706) and Project of Chinese Academy of Science (KJCX2-SW-L1)

†E-mail: hding@imech.ac.cn



© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net