第 34 卷 增刊 力 学 学 报 Vol.34, Supplement
2002 年 10 月 ACTA MECHANICA SINICA October, 2002

失重条件下对称充液陀螺渐近行为研究[1)]

朱如曾* 张正平† 蔡 立*
*(中国科学院力学研究所,非线性力学国家重点实验室,北京 100080)
†(北京强度与环境研究所,北京 100076)

摘要 对于充满黏性均匀液体的旋转对称(指惯量椭球旋转对称)陀螺在失重条件下绕质心转动给出了在大扰动后的渐近行为. 所得定理 1 和定理 2 比著名的茹科夫斯基定理强得多.

关键词 失重,对称,充液陀螺,渐近行为

引 言

充液陀螺的运动稳定性研究既有理论意义,又有实际意义,因而有关的研究工作很多[1~7]. 近年来在非线性现象的研究方面十分活跃[6]. 然而这种系统在初始大扰动之后的行为研究,则由于其复杂和困难而进展很小. 例如失重条件下充满均匀黏性液体的旋转对称陀螺的渐近行为,除著名的茹科夫斯基定理外,至今未见进一步的一般定理. 本文将给出比茹氏定理更强的定理 1 和 2. 本文的研究除去理论意义外,对目前最活跃的微重力科学、宇航控制也有实用价值.

1 问题的表述和预备定理

为了定义距离的需要,本文所有量都采用最简单的无量纲量,即直接扣除单位. 设主转动惯量为 A, A, C 的充满了黏性液体(密度为 ρ_1,动力黏性系数为 μ)的陀螺,在失重条件下绕重心 O 转动. 并设外壳与液体的总质量为 M.

现引进二个直角右旋标架:1) 固定标架 $\{0, \boldsymbol{i}_1^0, \boldsymbol{i}_2^0, \boldsymbol{i}_3^0\}$,空间点的坐标记为 (x^0, y^0, z^0);2) 陀螺固联标架 $\{0, \boldsymbol{i}'_1, \boldsymbol{i}'_2, \boldsymbol{i}'_3\}$,$\boldsymbol{i}'_1, \boldsymbol{i}'_2, \boldsymbol{i}'_3$ 分别为沿壳液总体的三个主方向,系统关于 $\boldsymbol{i}'_3$ 的转动惯量为 C,空间点的坐标为 (x', y', z'). 基矢之间满足关系 $\boldsymbol{i}'_j = \sum_{k=1}^{3} \gamma'_{jk} \boldsymbol{i}_k^0 (j = 1,2,3)$. 标架 2 相对于标架 1 的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 为 $\boldsymbol{\omega} = \sum_{k=1}^{3} \omega_k \boldsymbol{i}_k^0$. 液体关于标架 1 和 2 的速度分布分别为 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}_\gamma$,并记 $\rho_{\boldsymbol{v}} = \iiint \boldsymbol{v}^2 \mathrm{d}\tau$ 和 $\rho_{\boldsymbol{v}_\gamma} = \iiint \boldsymbol{v}_\gamma^2 \mathrm{d}\tau$,其中积分遍及全部液体.

在标架 1 中观察,系统的运动方程如下:

(a) 内部液体的运动方程

$$\rho_1 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \nabla \cdot (-p\boldsymbol{I} + \mu \boldsymbol{T}) \tag{1}$$

其中 ρ_1 为液体的密度,p 为液体的压力,$\boldsymbol{I}$ 为单位张量,μ 为液体的动力黏性系数,$\boldsymbol{T}$ 为变形速

2002-05-31 收到第 1 稿,2002-06-30 收到修改稿.
1)国家自然科学基金项目资助(19272064).

度张量,其分量为 $T_{ij}=\frac{\partial_{v_i}}{\partial_{x_j}}+\frac{\partial_{v_j}}{\partial_{x_i}}, j, i=1,2,3$.

(b) 连续性方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{2}$$

(c) 固体外壳的转动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{J}_2)=-\iint_S \boldsymbol{r}\times(p_1\boldsymbol{I}+\mu\boldsymbol{T})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为空间点的位置矢量(关于 O 点),$\boldsymbol{J}_2$ 为固体外壳关于 O 点的转动惯量张量,为 S 固体外壳的内表面 .

(d) 边界条件

$$\boldsymbol{v}|_S=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{4}$$

由(1)~(4)可证明动能 T 的耗散关系[8]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T=-\phi=-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\iiint_\tau \mu T_{ij}^2\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

τ 为液体所占有的区域 . 根据平衡转动轨道的充要条件 $\phi\equiv0$,文献[4]已在附录中对这种系统给出平衡转动轨道的解集 . 由此得:

引理 1 充液陀螺绕重心转动的平衡转动轨道集合由绕任一主轴以常角速度 $\boldsymbol{\omega}_e$ 作整体刚性转动的轨道 $\mathscr{R}_e$ 构成 .

利用文献[4]引理 1,结合本文引理 1 立即得到如下引理 2(即茹可夫斯基定理[1]):

引理 2 对于定点与质心重合的充满黏性液体旋转对称的陀螺,不管它从什么初态 P_0 出发,其极限轨道 $\mathscr{R}_{ep_0}$ 是绕它一个主轴 a 以常角速度 $\boldsymbol{\omega}_{ep_0}$ 作整体刚性转动,a 的取向与初始角动量 $\boldsymbol{L}(p_0)$ 方向一致,并且极限态的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{ep_0}=\begin{cases}\boldsymbol{L}(p_0)/C & \text{当关于 } a \text{ 的转动惯量为 } C\\ \boldsymbol{L}(p_0)/A & \text{当关于 } a \text{ 的转动惯量为 } A\end{cases}$$

这里的"极限"是关于 $|\Delta T|$, $|\Delta\omega_1|$, $|\Delta\omega_2|$, $|\Delta\omega_3|$ 和 $|\Delta\theta|$ 的,此处,$|\Delta\omega_1|$ 是指陀螺实际的 $\boldsymbol{\omega}_1$ 与 $\mathscr{R}_{ep_0}$ 的 $\boldsymbol{\omega}_{ep_0 1}$ 之差的绝对值,余类推,但 $\Delta\theta$ 是指 $\mathscr{R}_{ep_0}$ 中陀螺的旋转轴 $\boldsymbol{i}'_j$ 与未达极限时的 $\boldsymbol{i}'_j$ 轴之间的夹角 .

根据引理 2,初始扰动态 p_0 的角动量 $\boldsymbol{L}(p_0)$ 决定了系统极限轨道 $\mathscr{R}_{p_0}$ 的角速度 $\boldsymbol{\omega}_{ep_0}$ 的取向.因此任一平衡轨道 $\mathscr{R}_e$ 关于 $|\Delta\omega_1|$, $|\Delta\omega_2|$, $|\Delta\omega_3|$, $|\Delta\theta|$ 和 $|\Delta T|$ 不是渐近稳定的,因此对于这一对象有意义的大扰动问题的提法是:当初始扰动态 p_0 给定后,初始角动量 $\boldsymbol{L}(p_0)$ 也定了,那么极限态 $\mathscr{R}_{p_0}$ 的哪一根主轴与 $\boldsymbol{L}(p_0)$ 重合呢? 与 $\boldsymbol{L}(p_0)$ 重合的 $\boldsymbol{i}'_j$,它与 $\boldsymbol{L}(p_0)$ 之间是同向还是异向呢?

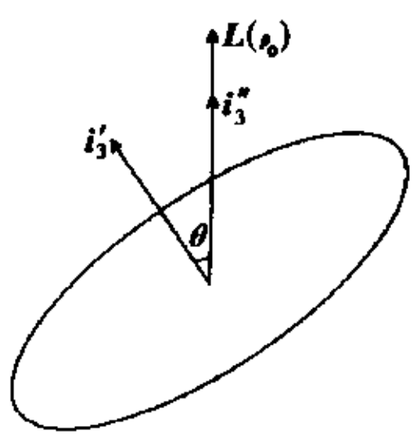

图 1

我们引进由初扰态 p_0 决定的新匀速转动辅助标架 3,即(O, $\boldsymbol{i}''_1$, $\boldsymbol{i}''_2$, $\boldsymbol{i}''_3$)(见图 1),此系相对于固定标架 1 以匀角速度 $\boldsymbol{\Omega}(p_0)=\boldsymbol{L}(p_0)/D$ 旋转,$\boldsymbol{i}''_3 /\!/ \boldsymbol{\Omega}(p_0)$, D 是根据情况任意选取的常数 .

261

2 主要结论

利用引理 1 和 2,以及关系式[1]

$$T = T_R + \boldsymbol{\Omega}(p_0)\cdot \boldsymbol{L}(p_0) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^2(p_0)I$$

可以证明如下的两条定理.

定理 1 对于定点与质心重合的充满黏性液体旋转对称的,且具有性质 $C - A > 0$ 的陀螺,当在标架 1 中观察时,如果初始扰动态 p_0 的 i'_3 与 $\boldsymbol{L}(p_0)$的夹角 $\theta(0) = \theta(p_0) < \pi/2$,并且初始动能 $T(p_0)$满足关系

$$T(P) < \boldsymbol{L}(p_0)/2A \tag{6}$$

则

$$\lim_{t\to\infty}\theta(t) = 0 \tag{7}$$

这里,$\theta(t)$是 i'_3 与 $\boldsymbol{L}(p_0)$之间的夹角(见图 1).

定理 2 对于定点与质心重合的充满黏性液体旋转对称的,且具有性质 $A - C > 0$ 的陀螺,在标架 1 中观察,如果初始扰动态 p_0 有

$$T(P_0) < \boldsymbol{L}^2(p_0)/2C \tag{8}$$

或虽然 $T(P_0) = \boldsymbol{L}^2(p_0)/2C$,但初始时陀螺中并不处处成立 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$,则

$$\lim_{t\to\infty}\theta(t) = \pi/2 \tag{9}$$

其中,θ 为 $\boldsymbol{L}(p_0)$与 i'_3 的夹角(见图 2).

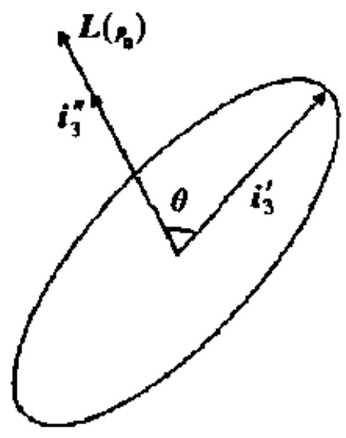

图 2

参 考 文 献

1 Moiseev N N, Rumyantsev V V. Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid. Berlin: Springer, 1968

2 Parks P C. Stability of liquid – filled spinning spheroids via Liapunov's second method. *Trans ASME J Appl Mech* 46 (1979) 259 ~ 262.

3 李骊. 旋转充液腔体的有限扰动稳定问题. 应用数学和力学, 1983(4), 609 ~ 620(Li Li. Stability theory of spinning solid bodies with liquid-filled under finite perturbation. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1983(4): 609 ~ 620(in Chinese))

4 朱如曾. 充液腔体旋转运动的稳定性理论. 中国科学, 1984(7): 624 ~ 633. (Zhu Ruzeng. Stability theory of spinning solid bodies with liquid-filled cavities. *Scientia Sinica*(*Science in China*)(*Series A*,)1984, 14(7): 624 ~ 633(in Chinese))

5 朱如曾. 平面上旋转充液腔体稳定性问题的谱分析及状态空间算子的势理论. 中国科学, 1987(11): 1161 ~ 1168(Zhu Ruzeng. Spectrum analysisand potential theory of operator in the space of states for the problem of stability of a spinning solid body with liquid-filled cavity on a plane. *Scientia Sinica*(*Series A*), 1987, 17(11): 1161 ~ 1168(in Chinese))

6 Zhu R Z. Distribution, stability, bifurcations and catastrophe of steady rotation of a symmetric heavy gyroscope with viscous-liquid-filled cavity. *Int J Nonlinear Mech*, 1992(27): 477 ~ 488

7 Liu Y Z. The stability of a fluid – filled top rotating on a horizontal plane. *Archive Appl Mech*, 1992(62): 487 ~ 494

8 朗道 Л.Д. 连续介质力学. 第一册. 北京: 高等教育出版社, 1958: 68(Landou L D. Mechanics of Continuous Media (I). Beijing: High-edu Pub, 1958: 68)

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SYMMETRIC GYROSCOPE WITH LIQUID-FILLED CAVITY UNDER ZERO-GRAVITATION[1)]

Zhu Ruzeng* Zhang Zhengping† Cai Li*

* (*LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

† (*Beijing Institute of Structure and Environment Engineering, Beijing* 100076, *China*)

Abstract For a rotationally symmetric zero-gravity gyroscope with a cavity completely filled with homogeneous viscous liquid, The asymptotic behaviors of the motion of this gyroscope starting from initial big disturbing state are given. The theorems 1 and 2 are stronger than Zhukovskii's theorem.

Key words zero-gravity, symmetric, liquid-filled gyroscope, asymptotic behavior

Received 31 May 2002, revised 30 July 2002.

1) The project supported by the Nationd Natural Science Foundation of China(19272064).

263