A 辑第 18 卷第 6 期　　水 动 力 学 研 究 与 进 展　　Ser. A, Vol. 18, No. 6
2003 年 11 月　　JOURNAL OF HYDRODYNAMICS　　Nov., 2003

文章编号:1000-4874(2003)06-0732-06

摄动有限差分(PFD)方法的数值计算*

朱力立,　胡利民,　高智
(中国科学院力学研究所高温气体动力学开放研究实验室,北京 100080)

摘　要: 本文利用数值摄动的思想发展了对流扩散(CD)方程的摄动有限差分(PFD)[2]格式,局部线化可获得摄动准确解(PENS)格式。把格式中的指数函数按网格雷诺数的幂级数展开,能够给出 PENS 格式的各阶近似,即各阶 PFD 格式。本文构造了一维 CD 方程的 PENS 及二阶 PFD 格式以及二维 CD 方程的二阶 PFD 格式,并利用二阶精度的 PFD 格式计算了一维 CD 方程、方腔流动和前、后台阶绕流流动等算例。计算给出了准确度较高的数值结果。

关　键　词: 摄动有限差分方法;对流扩散方程;摄动准确数值解格式;摄动高精度差分格式
中图分类号: O241.82　　**文献标识码:** A

Numerical simulation of perturbational finite difference (PFD) method

ZHU Li-li,　HU Li-min,　GAO Zhi
(High Temperature Gas Dynamics Laboratory, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: The perturbational finite difference (PFD) method is a kind of high accurate compact difference method, but its idea is different from the normal compact method. This method can get a perturbational exact numeical solution (PENS) scheme for locally linearized convective-diffusion (CD) equation. PENS scheme (or method) is similar to the finite analytical (FA) method and exact difference scheme (EDS), they are all exponential schemes, but PENS scheme is much simpler. By expanding the exponential term in PENS to the power-series of grid Reynolds number, the approximate schemes of different order of PENS scheme, i. e. PFD schemes, can be obtained. They are all upwind schemes and remain the concise structure form of first-order upwind scheme. The PENS and PFD schemes for 1-D CD equation are constructed, and PFD scheme is extended to 2-D CD equation. For 1-D equation and 2-D flowing problems, highly accurate results are obtained by using second order accurate PFD schemes.

Key words: perturbation finite difference method; convection-diffusion equation; perturbational exact numerical solution scheme

---

* **收稿日期:** 2000-09-04(2003-03-31 修改稿)
基金项目: 国家自然科学基金资助(10032050,10272106)
作者简介: 朱力立(1976～),男,江苏无锡人,硕士研究生。

1 引言

随着计算机的高速发展和计算经验的不断积累,计算流体力学取得了很大的进展,提出了众多的高效数值方法。摄动有限差分方法[1]是思路不同于熟知的紧致差分方法[2]的一种高精度紧致差分方法。摄动有限差分方法的基本思想[1]是:微商用直接差分近似(即一阶微商用一阶迎风或二阶中心差分近似;二阶微商用二阶中心差分近似)在维持直接差分结构形式和基点数不变的前提下,利用微分方程本身的固有关系,即利用物理问题本身的性质修正上下游基点($i\mp1$)物理量对中心基点物理量的贡献来提高差分格式的精度。具体做法为:非微商项(包括微商系数和源项)摄动展开为步长的幂级数,摄动展开幂级数中 $\Delta x^m(m\geqslant1,2)$ 的系数为待定,利用微分方程本身提供的关系,通过消除修正微分方程的截断误差诸项即可求出它们,确定摄动展开幂级数诸系数的同时得到摄动差分格式。摄动差分方法用于对流扩散(CD)方程,局部线化后得到摄动准确数值解(PENS)格式,将其中的指数项按网格雷诺数 $Re_{\Delta x}$ 的幂级数展开,可得到 PEND 格式的一阶,二阶,三阶…PFD 近似格式。在计算中可根据问题的特点和计算比较确定使用 PENS 或 PFD 格式。PENS 类似于有限分析格式(FA)[4,5]和精确差分(EDS)格式,它们都是指数型格式,但 PENS 格式存在明显的优点:使用基点数少,结构简单,对一、二和三维,分别仅使用三、五和七个基点。对较大的网格雷诺数,PENS 格式不存在计算的溢出问题,且 PENS 及其各阶近似 PFD 格式均保持了迎风性质,这都是 PENS 格式与其同类格式(FA,EDS)相比,具有的显著优点。本文利用数值摄动构造摄动有限差分格式的方法(称作 PFD 方法)推导一维 CD 方程摄动有限差分(PFD)格式,将其推广并构造了二维问题的二阶 PFD 格式;利用一维 CD 方程和二维流动的算例数值地证实格式的优良性能,说明摄动有限差分方法针对不同问题有着灵活的处理办法。

2 一维对流扩散(CD)方程的摄动有限差分(PFD)格式与摄动准确数值解(PENS)格式

2.1 一维 CD 方程

$$u\varphi_x = v\varphi_{xx} + S \tag{1}$$

的一阶迎风差分格式为

$$\frac{1}{\Delta x^2}[(1-\frac{1-\alpha}{2}\tilde{u}\Delta x)\varphi_{i+1} - (2+\alpha\tilde{u}\Delta x)\varphi_i + (1+\frac{1+\alpha}{2}\tilde{u}\Delta x)\varphi_{i-1}] + \tilde{S} = 0 \tag{2}$$

其中 $\alpha=\mathrm{sign}u$, $\tilde{u}=u/v$, $\tilde{S}=S/v$。今把微商系数 $\tilde{u}$ 和源项 $\tilde{S}$ 加以修正,即把它们摄动展开为 Δx 的幂级数

$$\tilde{u}_p = \tilde{u} + u_1\Delta x + u_2\Delta x^2 + \cdots$$

$$\tilde{S}_p = \tilde{S} + S_1\Delta x + S_2\Delta x^2 + \cdots \tag{3}$$

其中的摄动系数 u_j, $S_j(j=1,2,3)$ 等的推导可利用对流扩散(CD)方程(1)本身所固有的递推关系

$$\frac{\partial^{n+2}\varphi}{\partial x^{n+2}} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}(\tilde{u}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \tilde{S}) \tag{4}$$

由此可得到如下的摄动有限差分及其修正微分方程

$$\frac{1}{\Delta x^2}[(1-\frac{1-\alpha}{2}\tilde{u}_p\Delta x)\varphi_{i+1} - (2+\alpha\tilde{u}_p\Delta x)\varphi_i + (1+\frac{1+\alpha}{2}\tilde{u}_p\Delta x)\varphi_{i-1}] + \tilde{S}_p = 0 \tag{5}$$

$$\tilde{u}_p\varphi_x = \varphi_{xx} + \tilde{S}_P + \tilde{E}_{p1}\Delta x + \tilde{E}_{p2}\Delta x^2 + \cdots \tag{6}$$

其中

$$\tilde{E}_{p,2n-1} = \frac{\alpha\tilde{u}_p}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}\varphi}{\partial x^{2n}}$$

$$\tilde{E}_{p,2n} = -\frac{\tilde{u}_p}{(2n+1)!}\frac{\partial^{2n+1}\varphi}{\partial x^{2n+1}} + \frac{2}{(2n+2)!}\frac{\partial^{2n+2}\varphi}{\partial x^{2n+2}} \tag{7}$$

假定 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{S}$ 在 (x_{i-1}, x_{i+1}) 区间内为常数，即取局部线化近似，求得

$$\tilde{u}_{ip}\Delta x = \sum_{n=1}^{N} \frac{(\tilde{u}_i\Delta x)^{2n-1}}{2n-1\,!} + \alpha\sum_{n=1}^{N} \frac{(\tilde{u}_i\Delta x)^{2n}}{2n\,!} \tag{8a}$$

$$\underset{N\to\infty}{\rightarrow} \sinh(\tilde{u}_i\Delta x) + \alpha[\cosh(\tilde{u}_i\Delta x) - 1]$$

$$\tilde{S}_{ip} = \frac{\tilde{S}_i}{\tilde{u}_i}\tilde{u}_{ip} \tag{8b}$$

把(8)式代入(5)式经简单推导得到如下摄动精确数值解（PENS）格式

$$\frac{1}{2\Delta x^2}\{[(1-\alpha)+(1+\alpha)\mathrm{e}^{-\tilde{u}_i\Delta x}]\varphi_{i+1}\} - [2+(1+\alpha)\mathrm{e}^{-\tilde{u}_i\Delta x}+(1-\alpha)\mathrm{e}^{\tilde{u}_i\Delta x}]\varphi_i + [(1+\alpha)+(1-\alpha)\mathrm{e}^{\tilde{u}_i\Delta x}]\varphi_{i-1}\} + \frac{\tilde{S}_i}{2\tilde{u}_i\Delta x}[2\alpha+(1-\alpha)\mathrm{e}^{\tilde{u}_i\Delta x}-(1+\alpha)\mathrm{e}^{-\tilde{u}_i\Delta x}] = 0 \tag{9}$$

在固定 $x_i(=i\Delta x)$ 且 $\Delta x\to 0$ 的极限下，PENS 格式(9)的解趋向线化 CD 方程(1)的解，因此格式(9)为精确数值解格式。该格式使用三基点，具有系数矩阵无条件对角占优、迎风性、紧致性且保留了一阶迎风格式的简洁结构形式，特别是它包含的指数项均以 $\exp(-|\tilde{u}\Delta x|)$ 的形式出现，因此不存在常见指数型格式中存在的网格雷诺数大时出现数字溢出的问题。值得指出：(1)式的中心差分格式在 $|\tilde{u}\Delta x|>2$ 时不具有 TVD 性质，而由它经摄动得到的 PENS 格式对任意大小的 $|\tilde{u}\Delta x|$ 值均具有 TVD 性质[1]。一维的结果已推广到二维和三维情况，二维和三维 PENS 格式同样具有上述优点，且分别使用五和七个基点。

将 PENS 格式(9)中的指数项展开成网格雷诺数 $R_{\Delta x}$ 的幂级数，可得到 PENS 格式的各阶近似格式，二阶精度的 PFD 格式为

$$\frac{1}{\Delta x^2}\{[1-\frac{1-\alpha}{2}\tilde{u}_i\Delta x(1+\frac{\alpha}{2}\tilde{u}_i\Delta x)]\varphi_{i+1} - [2+\alpha\tilde{u}_i\Delta x(1+\frac{\alpha}{2}\tilde{u}_i\Delta x)]\varphi_i + [1+\frac{1+\alpha}{2}\tilde{u}_i\Delta x(1+\frac{\alpha}{2}\tilde{u}_i\Delta x)]\varphi_{i-1}\} + \tilde{S}_i(1+\frac{\alpha}{2}\tilde{u}_i\Delta x) = 0 \tag{10}$$

对指数展开式保留的项数越多得到的 PFD 格式精度越高，更高阶的格式依此类推。PENS 格式展开的各阶近似，即各阶 PFD 格式，都具有迎风性，一阶即通常的一阶迎风格式，二、三…阶 PFD 格式与常见的二、三…阶精度迎风格式相比，具有基点数少，在边界上无需降阶或作其它特殊处理的突出优点。其它多基点格式及紧致格式（实质上也是一种多基点格式），与导出对流扩散（CD）方程的原始推导相比均增添了新的物理内容和数学处理，在边界上要么格式降阶，要么需要特殊的处理。另外，二阶精度的 PFD 格式还有一个独特的优点；不仅 $\tilde{u}_p$，$\tilde{S}_p$ 的表达式很简单，且即使在 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{S}$ 为函数的条件下，二阶 PFD 格式仍不包含 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{S}$ 的导数项，因此非线性 CD 方程的 $\tilde{u}_p$ 和 $\tilde{S}_p$ 的表达式完全相同，可见二阶精度 PFD 格式包含了非线性效应的影响。本文在计算中采用了二阶精度的 PFD 格式，对一维和二维非线性 CD 方程，均收到了良好的效果。

2.2 二维 CD 方程

利用一维的结果可以直接导出二维问题的摄动有限差分（PFD）格式。下面是二维 CD 方程二阶摄动有限差分（PFD）格式的推导过程。对二维对流扩散方程：

$$u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + S \tag{11}$$

首先把它分裂为

$$u\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}S + S_c \tag{12a}$$

$$v\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{2}S - S_c \tag{12b}$$

其中 u、v、和 S 是 x 和 y 的函数,运算中间量 S_c 为常数,在以 (x_i, y_i) 为中心的离散单元上对 x 轴有 $u(x, y) = u(x, y_i)$; $S(x, y) = S(x, y_i)$;对 y 轴有 $v(x, y) = v(x_i, y)$; $S(x, y) = S(x_i, y)$。从方程 12(a) 和 12(b) 的一阶迎风差分格式出发,首先分别得到各自的 PFD 格式,然后将两者相加以消去 S_c 项得到二维方程(11)的 PFD 格式。由此得到二维方程的二阶摄动有限差分格式为:

$$\frac{u_{ij}}{\tilde{u}_{pij}\Delta x^2}[(1-\frac{1-\alpha_1}{2}u_{pij}\Delta x)\varphi_{i+1,j}-$$

$$(2+\alpha_1 u_{pij}\Delta x)\varphi_{ij}+(1+\frac{1+\alpha_1}{2}u_{pij}\Delta x)\varphi_{i-1,j}]+$$

$$\frac{v_{ij}}{\tilde{v}_{pij}\Delta y^2}[(1-\frac{1-\alpha_2}{2}v_{pij}\Delta y)\varphi_{i,j+1}-$$

$$(2+\alpha_2 v_{pij}\Delta y)\varphi_{ij}+(1+\frac{1+\alpha_2}{2}v_{pij}\Delta x)\varphi_{i,j-1}]+$$

$$\frac{1}{2}(S_{px}\frac{u_{ij}}{\tilde{u}_{pij}}+S_{py}\frac{v_{ij}}{\tilde{v}_{pij}})=0 \tag{13}$$

其中

$$\tilde{u}_{pij}=u_{ij}+\frac{\alpha_1 u_{ij}^2\Delta x}{2} \tag{14a}$$

$$\tilde{v}_{pij}=v_{ij}+\frac{\alpha_2 v_{ij}^2\Delta y}{2} \tag{14b}$$

$$S_{px}=\frac{S_{ij}}{u_{ij}}\tilde{u}_{pij}$$

$$S_{py}=\frac{S_{ij}}{v_{ij}}\tilde{v}_{pij} \tag{14c}$$

3 算例

第一节中已经推导了一维和二维 CD 方程的二阶 PFD 格式,对于一维问题,直接应用 PFD 格式即可求解,对于二维方腔和前、后台阶流动的不可压流动的计算,采用交错网格,动量方程利用二维 PFD 格式进行离散,连续性方程则采用二阶中心差分格式,压力则由求解压力泊松方程得到。

(1) 定常 Burgers 方程

$$zz' = z''/R_e, -1<x<1$$

边界条件:

$$z(-1)=\mathrm{th}(R_e/2),\ z(1)=-\mathrm{th}(R_e/2)$$

这是模拟激波的经典问题之一。其精确解为 $z_{ex}(x)=-\mathrm{th}(xR_e/2)$。图 1 给出了 $\varepsilon=0.1$ $(R_e=10)$, $\Delta x=0.1$ $(R_d=5)$ 时,迎风格式、中心差分格式、本文二阶 PFD 格式与精确解的比较曲线。二阶 PFD 格式的误差是比其他格式的误差要低得多。对激波的分辨率,随 Re 数升高,一阶迎风与中心差分格式分辨率降低,而二阶 PFD 格式仍能准确的捕捉激波,直至 $Re=10^5$,数值解仍然相当准确。

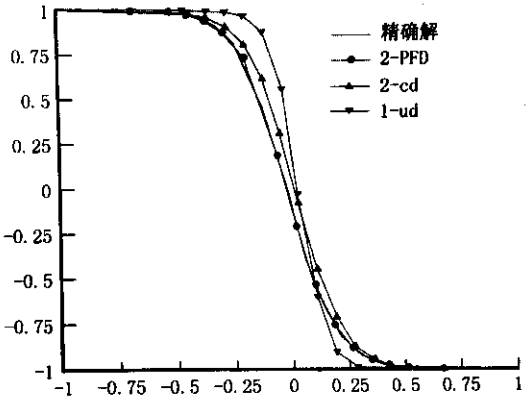

图 1 定常 burgers 方程不同格式的解的比较

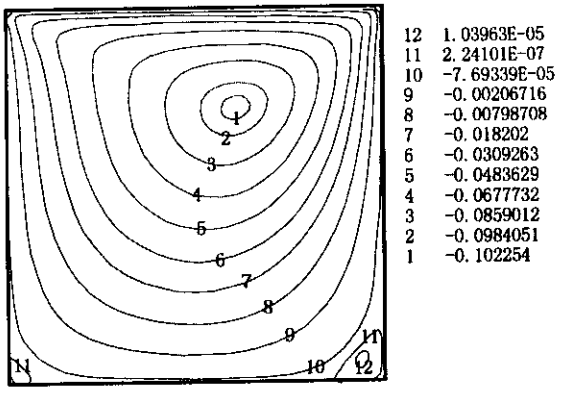

图 2 存在奇点的二维方腔流动 PFD 格式计算结果流线分布图 $Re=100$,网格数 128×128

(2) 有奇点的二维方腔流动

本文用二阶摄动差分(PFD)格式计算了上壁面以 $u=1$ 的速度拖动的方腔流动,此时上壁面角点为速度奇点。对 $Re=100$ 和 1000 的流动均得到了较好的结果。$Re=100$ 时主涡中心位于 $x=0.6172$, $y=0.7344$ 处,涡量大小为 3.155,流函数值为 -0.10325;$Re=1000$ 时主涡中心位于 $x=$

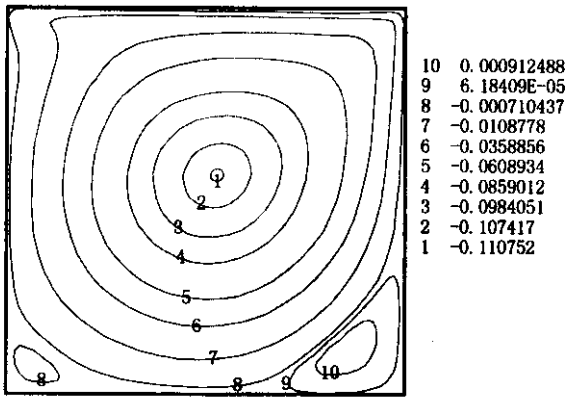

图 3 存在奇点的二维方腔流动 PFD 格式计算结果流线分布图 $Re = 1000$，网格数 128×128

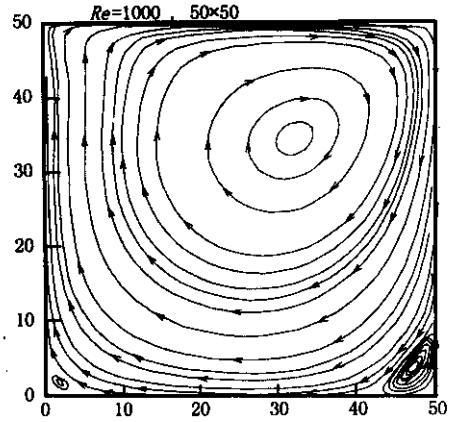

图 4 无奇点的二维方腔流动 PFD 格式计算结果流线分布图 $Re = 1000$，网格数 50×50

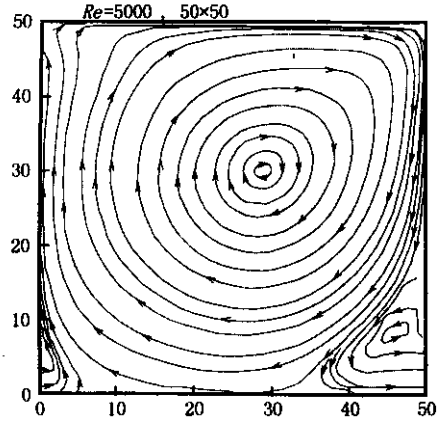

图 5 无奇点的二维方腔流动 PFD 格式计算结果流线分布图 $Re = 5000$，网格数 50×50

0.5313，$y = 5703$ 处，涡量大小为 1.9612，流函数值为 -0.1109。这与 Ghia. et al.、Charls-Henri. et al. 等人[6,7]的结果符合很好，这说明本方法对较高 Re 数问题是有效的。图 2 和图 3 分别是 $Re = 100$ 和 1000 的流线图。

(3) 无奇点的二维方腔流动

此时上壁面的速度分布为 $x(1-x)$，消除了上壁面角点处的速度奇点。对 Re 数为 1000 和 5000，

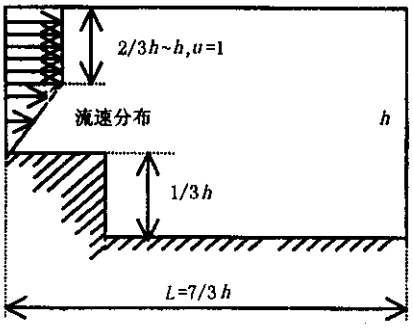

图 6 二维后台阶绕流

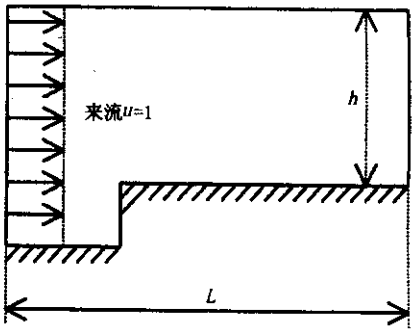

图 7 二维前台阶绕流流动

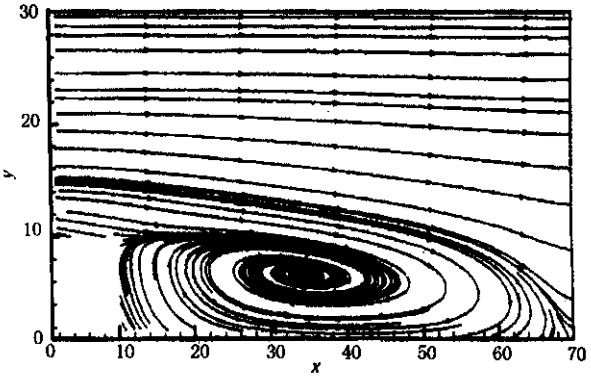

图 8 二维后台阶绕流 PFD 格式计算结果流线分布图 Re 数 100，网格数 30×70

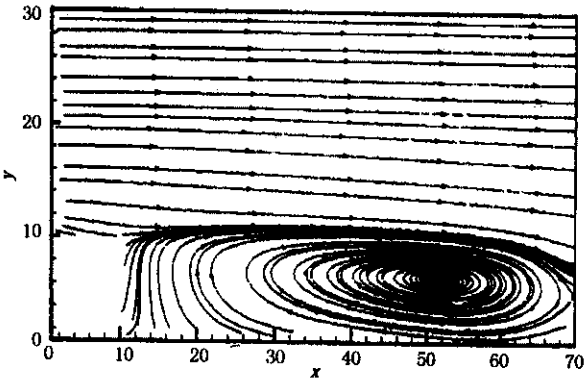

图 9 二维后台阶绕流 PFD 格式计算结果流线分布图 Re 数 1000，网格数 30×70

图 4 和图 5 给出了 PFD 格式计算结果的流线分布。对这种 Re 数相对较高的情况，PFD 格式的计

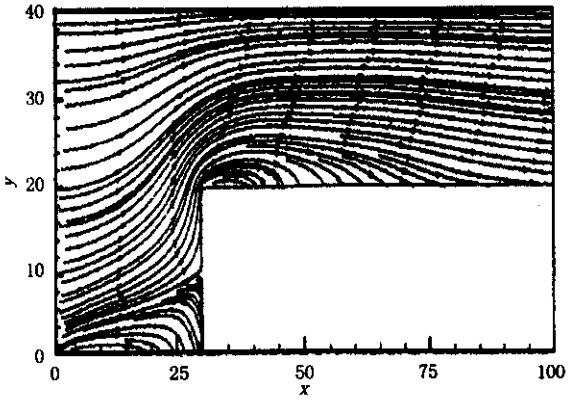

图 10 二维前台阶绕流 PFD 格式计算结果流线分布图 Re 数 100,网格数 40×100

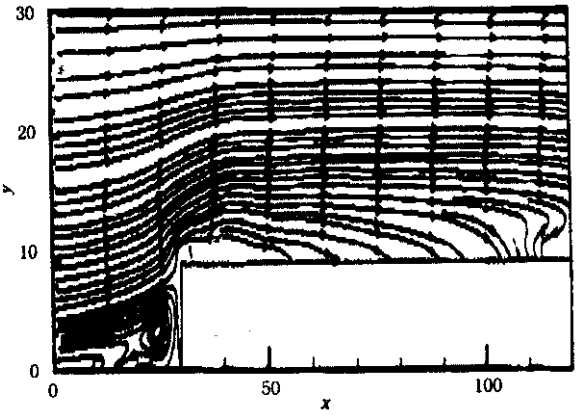

图 11 二维前台阶绕流 PFD 格式计算结果流线分布图 Re 数 1000,网格数 30×120

算也取得了良好的结果。

(4) 二维后台阶绕流

后台阶流动的流动区域示意图见图 6。对 Re 数为 100 和 1000,图 8 和图 9 给出了 PED 格式计算结果的流线分布。计算结果与经典的结果[10]一致,能正确反映后台阶流动的物理图像。

(5) 二维前台阶绕流

前台阶流动的流动区域示意图见图 7。计算显示在 Re 数较低,$Re = 100$ 时台阶前后涡不明显,见图 10;而在 Re 数较高时的台阶前有明显的涡,在台阶后方的涡不明显,见图 11。计算结果符合实际流动的物理图像。

4 结束语

摄动有限差分(PFD)方法是与多基点和紧致高精度差分方法思路不同的新方法。对流扩散的摄动有限差分(PENS 和 PFD)格式与其他高精度差分格式(多基点高精度格式[3]紧致差分格式[2])相比,它的离散处理没有超出推导微分方程时的物理考虑和数学处理,这是摄动差分格式最大的特点。

PENS 格式与已有的精确数值解(ENS)格式[5]和有限分析(FA)格式[4,5]性质相同,这些格式可准确反映对流效应,又不存在伪数值扩散和负浓度解问题,对任意大小网格 Reynold 数一致稳定和收敛,特别是 PENS 格式不存在已有 ENS 格式和 FA 格式中指数项计算的"数字"溢出问题,又远比 FA 格式简单、节省机时和存储。

PFD 格式在边界上无需特殊处理即能达到所需精度。文中的一维 CD 方程和二维流动问题的数值算例证实了 PFD 格式的上述优点,获得了良好的数值结果。

目前对 PFD 方法的研究仍然处在发展阶段,作为一种性质优良的全新的计算思想和方法,摄动有限差分(PFD)方法有着很大的潜力,值得更进一步的深入研究和推广应用。

参 考 文 献:

[1] 高智. 摄动有限差分研究进展[J]. 力学进展,2000,30(2):200-215.

[2] SHEN Men-gu. Advances in high accurate and resolving power difference schemes[A]. In: ISMA Symposium on Computational Aerodynamics[C]. Spt. 1999.

[3] CHEN C J, H. C. Development of finite analytic numerical solution method for usteady two-dimensional convection tranfer equation[J]. Jour. Comput. Phys. 1983, 49: 401-23.

[4] 吴江航,韩庆松. 计算流体力学的理论、方法及应用[M]. 北京:科学出版社. 1988.

[5] RIVAS E K. On the use of Nonuniform grids in finite difference equations[J]. Jour. Comput. Phys. 1972, 10: 202-10.

[6] 忻孝康等. 定常对流扩散方程的修正积分因子方法[J]. 水动力学研究与进展,1993, 8(3):285-295.

[7] 帕坦卡 SV 著,张政译. 传热与流动的数值计算[M]. 北京:科学出版社. 1984.

[8] GHIA U et al. High resolutions for incompressible flow using the navier-Stokes equations and a multigrid method[J]. Jour. Comp. Phy. 1982, 48: 387-411.

[9] CHARLES-HENRI, BRUNEAU and JOURON CLAUDE. An efficient scheme for Navier-Stokes equations[J]. Jour. Comp. Phy., 1990, 89: 389-413.