

基于分段常滑翔角的长航时纵向远程滑翔飞行方程近似解

郭兴玲, 张 珩

(中国科学院力学研究所技术发展研究部, 北京 100080)

摘 要: 提出用包含地球旋转效应的 n 个常滑翔角飞行段近似实际滑翔飞行轨迹的方法。基于该方法推导了长航时纵向远程滑翔飞行轨迹近似解, 并给出了各段常滑翔角、滑翔时间的求解方法及整个滑翔轨迹近似计算步骤。文中算例结果表明, 该近似求解方法计算得到的滑翔航程和滑翔时间与实际值相差很小, 航程误差率约为 0.7%, 时间误差率约为 0.6%, 因此该方法在近似小初始滑翔角的长航时远程纵向滑翔飞行时是有效的、可行的, 尤其针对航程在地球半圈以上的滑翔飞行轨迹。

关键词: 飞行; 近似解; 常滑翔角; 纵向; 远程; 长航时

中图分类号: V412 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328(2005)06-0712-05

0 引言

50 年代以来, 许多研究学者对返回再入式飞行器运动方程的近似解做了大量的研究工作, 例如航天飞机、载人飞船、返回式卫星的再入轨迹近似分析^[1-7], 这些近似分析根据不同的研究问题做了不同的简化, 有的忽略重力对切向加速度的影响, 有的不考虑重力和离心力对再入弹道的影响。这些近似分析都忽略了地球旋转效应的影响。对于飞行时间短, 初始速度接近轨道速度的再入弹道而言, 不考虑地球旋转效应的影响得到的飞行航程和飞行时间和实际值相差不大, 但对飞行时间长的远程滑翔飞行而言, 会在飞行航程和飞行时间计算上带来很大的误差。

为解决此问题, 本文通过对长航时远程滑翔飞行的数值计算和分析, 提出用 n 个常滑翔角飞行段来逼近实际滑翔飞行轨迹的计算方法, 实例计算表明近似方法计算得到的滑翔航程和滑翔时间与实际值相差很小, 尤其在近似航程在地球半圈以上的滑翔轨迹时有明显的优势。

1 长航时纵向远程滑翔飞行模型

首先, 做如下假定:

(1) 飞行体用一质点 M 表示;

(2) 地球以恒定的角速度 $\vec{\omega}_e$ 旋转;

(3) 大气相对地球是静止的;

建立运动坐标参考系如图 1。

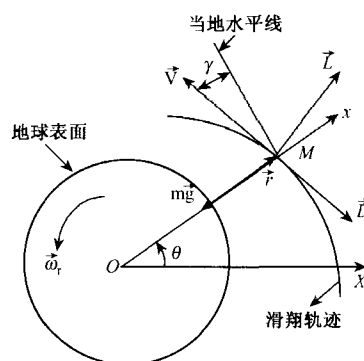


图 1 坐标参考系

Fig.1 Reference coordinate system

图 1 中与旋转地球固连的极坐标参考系, 称为旋转极坐标系, 坐标系的原点 O 位于地球中心, 旋转极坐标系的极轴在 Ox 上, 此坐标系具有地球旋转角速度 $\vec{\omega}_e$ 。与飞行体固连的极坐标系 (\vec{r}, θ) , 坐标系原点在地球中心 O , 极轴 Ox 沿飞行体的位置矢量 \vec{r} (其方向由地心指向飞行体, 大小等于飞行体与地心的距离)。飞行航程角 θ 是在平面内从 Ox 轴起度量的。速度向量 \vec{v} 与当地水平线 (通过位于 M 点的飞行体, 且垂直于位置向量的水平线) 之间的夹角 γ 为滑翔角, 当 \vec{v} 在水

平线之上时, γ 为正值。

飞行体滑翔飞行中每一时刻都受到力 \vec{F} 的作用, \vec{F} 是由重力 \vec{g} 和气动力 \vec{A} 构成^[8]:

$$\vec{F} = \vec{g} + \vec{A}$$

根据牛顿第二定律, 对一个惯性系统, 有向量方程:

$$m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}$$

式中: \vec{v}_i 为惯性坐标系下的绝对速度。

而在与地球固连的旋转参考坐标系下, 由于该旋转坐标系以角速度 $\vec{\omega}_r$ 旋转, 则向量方程变成:

$$m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + 2m\vec{\omega}_r \times \vec{v} + m\vec{\omega}_r \times (\vec{\omega}_r \times \vec{r})$$

式中: \vec{v}_i 为惯性坐标系下的绝对速度, \vec{v} 为飞行体相对于地球固连系的速度。

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}, \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$\vec{a}_c = \vec{\omega}_r \times (\vec{\omega}_r \times \vec{r}), \vec{a}_e = 2\vec{\omega}_r \times \vec{v}$$

式中: \vec{a}_i 为绝对加速度, \vec{a} 为相对加速度, \vec{a}_e 为牵连加速度, \vec{a}_c 为哥氏加速度。

根据纵向飞行的径向和周向运动分析^[9], 并考虑地球旋转, 得到旋转极坐标参考系下的方程如下:

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - m \frac{\mu}{r^2} + 2m\omega_r v \cos \gamma + m\omega_r^2 r - D \sin \gamma + L \cos \gamma \quad (1)$$

$$m \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = r(-L \sin \gamma - D \cos \gamma - 2m\omega_r v \sin \gamma) \quad (2)$$

式中: $D = \frac{1}{2} \rho(h) s c_D v^2$, $L = \frac{1}{2} \rho(h) s c_L v^2$

飞行体的径向及周向飞行速度为:

$$\frac{dr}{dt} = v \sin \gamma \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v \cos \gamma}{r} \quad (4)$$

推出长航时远程纵向滑翔飞行方程组如下:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \sin \gamma \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{v \cos \gamma}{r} \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{\rho(h) v^2 s c_D}{2m} - \frac{\mu}{r^2} \sin \gamma + \omega_r^2 r \sin \gamma \\ v \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\rho(h) v^2 s c_L}{2m} - \frac{\mu}{r^2} \cos \gamma + \frac{v^2}{r} \cos \gamma + 2\omega_r v + \omega_r^2 r \cos \gamma \end{cases} \quad (5)$$

方程组中:

$\mu = 3.986009 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ 地球引力常数

$\omega_r = 7.2921158 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ 地球自转角速度

c_D 为阻力系数

c_L 为升力系数

r 为飞行体质心距地心的距离(m)

v 为飞行体相对地球速度(m/s)

θ 为飞行航程角(rad)

γ 为滑翔角(rad)

s 为用于升力和阻力估算的参考面积(m^2)

m 为飞行体质量(kg)

ρ 为大气层密度(kg/m^3)

2 长航时远程纵向滑翔运动方程近似解

2.1 常滑翔角飞行段近似公式推导

近似解假设条件:

(1) 大气模型用美国 1976 年标准大气模型^[10];

(2) 升阻比为常数;

(3) 重力加速度 $g = -\mu/r^2$;

并考虑将整个飞行过程划分为 N 段, 且每段均采用常滑翔角假设进行处理。据此由自由滑翔纵向飞行运动方程组(3)的第四式, 即飞行滑翔角随时间的运动方程, 有:

$$v_n \frac{d\gamma_n}{dt_n} = \frac{\rho_n(h_n) v_n^2 s c_{Ln}}{2m} - \frac{\mu}{r_n^2} \cos \gamma_n + \frac{v_n^2}{r_n} \cos \gamma_n + 2\omega_r v_n + \omega_r^2 r_n \cos \gamma_n \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (6)$$

式中, 各变量均增加一个下标 n (下同), 表述第 n 段常滑翔角飞行段。

在常滑翔角分段近似条件下, $\frac{d\gamma_n}{dt_n} = 0$

分析式(6)容易得知, $\omega_r^2 r_n \cos \gamma_n$ 项的量级在 10^{-2} 左右, 与其它各项相比, 至少相差一个量级以上。鉴此, 可做忽略此项作用的处理, 将式(6)简化为:

$$v_n \frac{d\gamma_n}{dt_n} = \frac{\rho_n(h_n) v_n^2 s c_{Ln}}{2m} - \left(w_n - \frac{v_n^2}{r_n} \right) \cos \gamma_n = 0$$

式中: $w_n = \frac{\mu}{r_n^2} - \frac{2\omega_r v_n}{\cos \gamma_n} \approx \frac{\mu}{r_n^2} - \frac{2\omega_r v_{0n}}{\cos \gamma_n}$

在这个变量替代中, 将 v_n 用第 n 段的初始速度 v_{0n} 加以近似, r_n 则用第 n 段的平均地心距 \bar{r}_n 来近似。则空气阻力加速度 D_m 为:

$$D_m = c_{Dn} \frac{\rho_n v_n^2}{2m} s = \frac{-\left(\frac{v_n^2}{\bar{r}_n} - w_n \right) \cos \gamma_n}{c_{Ln}} c_{Dn}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{w_n \left(1 - \frac{v_n^2}{w_n r_n} \right) \cos \gamma_n}{c_{L_n}/c_{D_n}} \\ &\approx \frac{w_n \left(1 - \frac{v_n^2}{w_n r_{0n}} \right) \cos \gamma_n}{c_{L_n}/c_{D_n}} = \frac{w_n \left(1 - \frac{v_n^2}{v_{sn}^2} \right) \cos \gamma_n}{c_{L_n}/c_{D_n}} \end{aligned}$$

式中:用 v_{sn}^2 代替 $w_n r_{0n}$ 近似 $w_n r_n$ 。

故方程组(5)中的第三式可做如下近似:

$$\begin{aligned} \frac{dv_n}{dt_n} &= - \frac{\rho_n(h) v_n^2 s c_{Dn}}{2m} - \frac{\mu}{r_n^2} \sin \gamma_n + \omega_r^2 r_n \sin \gamma_n \\ &\approx - \frac{w_n \left(1 - \frac{v_n^2}{v_{sn}^2} \right) \cos \gamma_n}{c_{L_n}/c_{D_n}} - \frac{\mu}{r_n^2} \sin \gamma_n \\ &= \frac{w_n \left(1 - \frac{v_n^2}{v_{sn}^2} \right) \cos \gamma_n}{c_{L_n}/c_{D_n}} - \bar{g}_n \sin \gamma_n \end{aligned} \quad (7)$$

式中: $\omega_r^2 r_n \sin \gamma_n$ 同上所述忽略不计, \bar{g}_n 为第 n 段的重力加速度平均值。

积分式(7)得第 n 段常滑翔角飞行段飞行速度与飞行时间的关系式:

$$v_n = \frac{b_n (e^{a_n} - 1)}{1 + e^{a_n} - c_n} \quad (8)$$

式中:

$$\begin{aligned} a_n &= - \frac{(c_{L_n}/c_{D_n}) v_{sn}^2}{2 \sqrt{w_n \cos \gamma_n} \sqrt{w_n v_{sn}^2 + (c_{L_n}/c_{D_n}) v_{sn}^2 \bar{g}_n \sin \gamma_n}} \\ b_n &= \sqrt{w_n v_{sn}^2 + (c_{L_n}/c_{D_n}) v_{sn}^2 \bar{g}_n \sin \gamma_n} / \sqrt{w_n \cos \gamma_n} \\ c_n &= \ln \left| \frac{\sqrt{w_n v_{sn}^2 + (c_{L_n}/c_{D_n}) v_{sn}^2 \bar{g}_n \sin \gamma_n} / \sqrt{w_n \cos \gamma_n} - v_{0n}}{\sqrt{w_n v_{sn}^2 + (c_{L_n}/c_{D_n}) v_{sn}^2 \bar{g}_n \sin \gamma_n} / \sqrt{w_n \cos \gamma_n} + v_{0n}} \right| \end{aligned}$$

由式(7)有:

$$\frac{dt_n}{dv_n} = \frac{1}{-D_m - \bar{g}_n \sin \gamma_n} \quad (9)$$

积分式(9)得第 n 段常滑翔角飞行段飞行时间和飞行速度的关系式:

$$\begin{aligned} t_n &= \int_{v_{0n}}^{v_{fn}} \frac{dv_n}{- \frac{w_n \cos \gamma_n}{c_{L_n}/c_{D_n}} \left(1 - \frac{v_n^2}{v_{sn}^2} \right) - \bar{g}_n \sin \gamma_n} \\ &= a_n \cdot \left[\ln \left| \frac{b_n + v_{fn}}{b_n + v_{0n}} \right| - \ln \left| \frac{b_n - v_{fn}}{b_n - v_{0n}} \right| \right] \end{aligned} \quad (10)$$

将式(8)代入方程组(5), 获得滑翔高度与飞行时间的关系式:

$$\begin{aligned} r_n &= r_{0n} - b_n \sin \gamma_n t_n + 2a_n b_n \sin \gamma_n \\ &\quad \left[\ln(e^{a_n} - c_n + 1) - \ln(e^{-c_n} + 1) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

进一步, 由方程组(5)的第二式除以第一式可推得:

$$\frac{d\theta_n}{dr_n} = \frac{\text{ctg} \gamma_n}{r_n}$$

相应地有: $\frac{dS_n}{dr_n} = \frac{R_0 \text{ctg} \gamma_n}{r_n}$

式中: S_n 为第 n 段的滑翔航程(m), R_0 为地球半径 ($R_0 = 6371004\text{m}$)。

并将式(11)代入, 得到第 n 段飞行航程与飞行时间的关系式:

$$\theta_n = \text{ctg} \gamma_n (\ln r_n - \ln r_{0n}) \quad (12)$$

相应地有: $S_n = R_0 \text{ctg} \gamma_n (\ln r_n - \ln r_{0n})$

式(8), (11), (12)就是纵向滑翔飞行速度、飞行高度、飞行航程和飞行时间的近似表达式。同理可推得飞行高度和飞行速度、飞行滑翔角的关系式:

$$r_n = r_{0n} + \frac{\sin \gamma_n}{2k_n} \ln \left(\frac{l_n - k_n v_{fn}^2}{l_n - k_n v_{0n}^2} \right) \quad (13)$$

式中:

$$\begin{aligned} l_n &= \frac{w_n \cos \gamma_n}{c_{L_n}/c_{D_n}} + \bar{g}_n \sin \gamma_n \\ k_n &= \frac{w_n \cos \gamma_n}{(c_{L_n}/c_{D_n}) v_{sn}^2} \end{aligned}$$

2.2 常滑翔角的确定方法

对方程组(5)的第四式近似为如下式:

$$\begin{aligned} \frac{dy_n}{dt_n} &\approx \frac{\rho_n(h_n) v_{fn} s c_{L_n}}{2m} - \left(\frac{\mu}{v_{fn}^2 r_n} - \frac{v_{fn}}{r_{0n}} \right) + 2\omega_r = 0 \\ (n &= 1, 2, 3 \dots N) \end{aligned} \quad (14)$$

式中: h_n, v_{fn}, r_n 分别为各飞行段的末端轨道高度、末端轨道高度处的速度值以及各飞行段的平均地心距。

具体计算求解步骤如下:

(1) 首先给定飞行过程分段数 N , 初步确定每段末端高度;

(2) 根据公式(14)求出第 1 段末端轨道高度的飞行速度值 v_{n1} (若 $v_{n1} > v_0$, 将末端轨道高度降低, 重新计算 v_{n1} , 直至 $v_{n1} < v_0$);

(3) 将第 1 段的初始轨道高度 h_{01} , 末端轨道高度 h_n , 平均轨道高度 \bar{h}_1 , 初始速度 v_{01} , 末端速度 v_n 代入式(10), (13), 得到第 1 段的常滑翔角 γ_1 及该段的飞行时间 t_1 ;

(4) 将第 1 段的初始轨道高度 h_{01} , 末端轨道高度 h_n , 平均轨道高度 \bar{h}_1 , 初始速度 v_{01} , 末端速度 v_n , 常滑翔角 γ_1 , 飞行时间 t_1 代入式(8), (11), (12) 得到第 1 段的飞行速度、飞行轨道高度和飞行航程随

飞行时间的变化曲线;

(5) 同理得到 2, 3, …, N 段的飞行速度、飞行轨道高度和飞行航程随飞行时间的变化曲线。从第 2 段开始, 初始轨道高度 $h_{0n} = h_{f(n-1)}$ (第 $n-1$ 段近似计算得到的末端高度值), 初始速度 $v_{0n} = v_{f(n-1)}$ (第 $n-1$ 段近似计算得到的末端飞行速度值)。

3 算例

考虑表 1 所示两种初始条件下在赤道平面上与地球旋转方向相同的高超声速纯纵向滑翔飞行。

表 1 两算例初始数据

Table 1 The initial data of two examples

	算例 1	算例 2
质量 m (kg)	200	200
参考面积 s (m^2)	20	20
升力系数 c_L	0.083	0.063
阻力系数 c_D	0.01	0.01
初始高度 h_0 (km)	100	90
初始速度 v_0 (m/s)	6600	5600
初始滑翔角 γ_0 ($^\circ$)	0	0

按照前述的近似求解方法, 选择 N 进行计算, 表 2 列出了本文算法解、忽略地球旋转效应数值解

及精确数值解结果。

表 3 列出了算例 1 相应各段的计算结果。

图 2、图 3 给出了算例 1、算例 2 的精确数值解、本文算法解与忽略地球旋转效应数值解的曲线图。

表 2 计算结果比较

Table 2 Comparison of calculation results

		精确数值解	本文算法解	忽略地球旋转数值解
算例 1	滑翔时间 (s)	12663	12731	11306
N=9	滑翔航程 (km)	40748	41053	33479
算例 2	滑翔时间 (s)	6974	7274	6571
N=8	滑翔航程 (km)	16515	16659	14863

4 结论

从两个算例计算数据比较表 2、表 3 及曲线图 2、图 3 可看出, 采用本文算法得到的滑翔时间、滑翔航程与精确值相差很小, 而忽略地球旋转效应得到的滑翔时间尤其是滑翔航程与精确值相差很大, 并且当滑翔时间越长、滑翔航程越大, 忽略地球旋转效应数值解与精确解相差越大; 同时从曲线图 2、图 3 可以看出, 滑翔高度、滑翔速度、滑翔航程角与时间的关系曲线和精确数值解关系曲线都能很好地吻合。

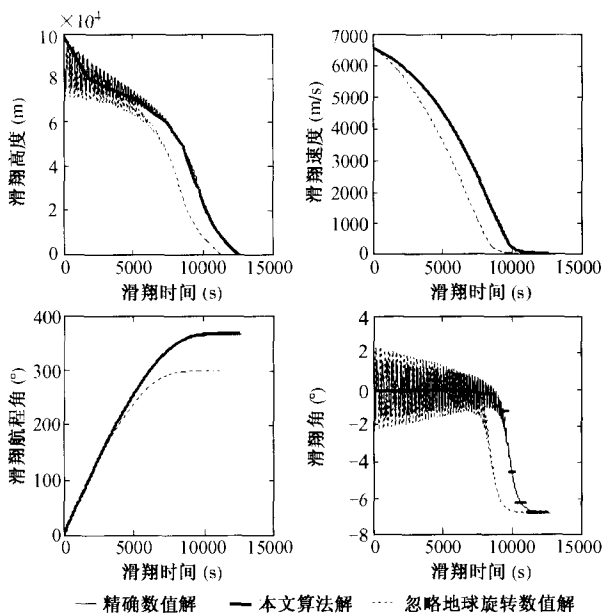


图 2 (算例 1)

Fig.2 (example 1)

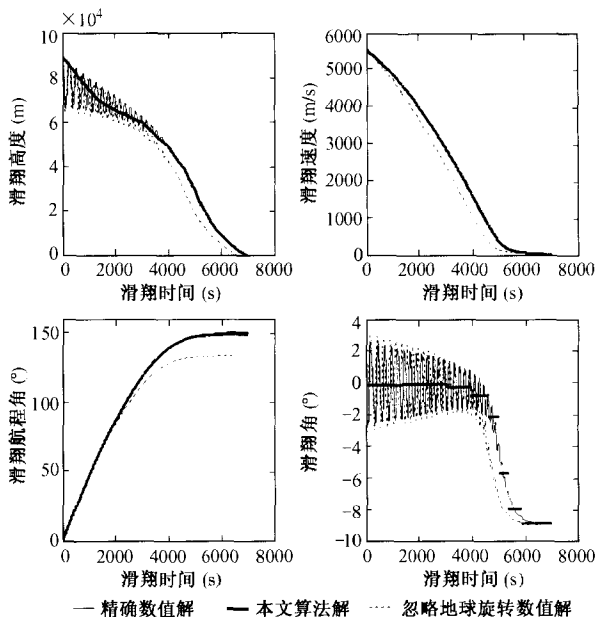


图 3 (算例 2)

Fig.3 (example 2)

精确数值解、本文算法解与忽略地球旋转效应数值解对比图

(细实线为精确数值解, 粗实线为本文算法解, 虚线为忽略地球旋转效应数值解)

Comparison diagram with the solution of algorithm of the paper, the accurate numerical solution and the numerical solution of neglecting the rotation of the earth (thin solid line—accurate numerical solution, thick solid line—solution of the paper, dash line—numerical solution of neglecting the rotation of the earth)

表 3 各段计算结果(算例 1)

Table 3 Calculation results of n segments (example 1)

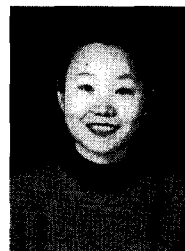
	初始高度 h_{0n} (m)	末端高度 h_{in} (m)	平均高度 h_n (m)	末端速度 v_{in} (m/s)	滑翔角 γ_n (°)	滑翔时间 t_n (s)	滑翔航程角 θ_n (°)	累计滑翔航程角 θ_{1-n} (°)
1	100000	80000	90000	6119.6462	-0.0975	1843	104.2277	104.2277
2	79999.4251	70000	74999.7125	4241.9002	-0.0297	3648	171.6023	275.8300
3	69991.9485	60000	64995.9743	2534.5655	-0.0828	2015	61.4433	337.2733
4	60017.7852	50000	55008.8926	1461.8637	-0.2652	1077	19.2625	356.5358
5	50018.0861	40000	45009.0430	1000	-0.9565	486	5.3460	361.8819
6	40023.2206	30000	35011.6013	370	-1.2375	675	4.1406	366.0225
7	30022.7088	20000	25011.3544	162.0940	-4.3646	489	1.1634	367.1859
8	20110.5581	10000	15055.2790	75.4229	-6.2060	739	0.7834	367.9693
9	10614.9382	0	5307.4691	43.8994	-6.7506	1752	0.8056	369.2056

结果说明采用本文的 n 段常滑翔角飞行方法能够在很大程度上体现地球旋转效应的影响,尤其在近似小初始滑翔角在 0 度附近的,航程在地球半圈以上的纵向滑翔飞行轨迹时很有效。

参考文献:

- [1] Allen H J and Eggers A J. A Study of the motion and aerodynamic heating of missiles entering the earth's atmosphere at high supersonic speeds[R]. NACA TN-4047, 1957
- [2] Chapman D R. An approximate analytical method for studying entry into planetary atmospheres[R]. NACA TRR-11, 1959
- [3] Loh W H T. Dynamics and thermo dynamics of planetary entry[M]. Englewood Cliffs N J: Prentice-Hall, 1963
- [4] Vinh N X. Hypersonic and planetary entry flight mechanics[M]. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1980, 139-156, 178-253
- [5] Eggers A J, Allen H J and Neice S E. A comparative analysis of the performance of long-range hypervelocity vehicles[R]. NACA TN-4046, 1957
- [6] 赵汉元.《飞行器再入动力学和制导》[M].长沙:国防科技大学出版社,1997. [ZHAO Han-yuan. Dynamics and guidance of vehicles entry [M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1997].

- [7] 南英,陈士楷,吕学富.航天器最优再入轨迹的近似解[J].航天返回与遥感,1994,15(2):1-9 [NAN Ying, CHENG Shi-lu, LU Xue-fu. Approximate solution for optimal reentry trajectories of spacecraft[J]. Spacecraft Recovery and Remote Sensing, 1994, 15(2):1-9]
- [8] 阮春荣.大气中飞行的最优轨迹[M].北京:宇航出版社,1987. [RUAN Chun-rong. Optimal Trajectories in Atmospheric Flight [M]. Beijing: Astronautics Press, 1987]
- [9] 竺苗龙.最佳轨道引论[M].北京:宇航出版社,1989. [ZHU Miao-long. Introduction of Optimal Orbit [M]. Beijing: Astronautics Press, 1989]
- [10] 肖业伦.航天器飞行动力学原理[M].北京:宇航出版社,1995 [XIAO Ye-lun. Flight Dynamics of Spacecraft [M]. Beijing: Astronautics Press, 1995]



作者简介:郭兴玲(1973-),女,博士生,重庆市人,一般力学基础与应用专业,现研究方向为航天器轨道飞行力学与空气动力学交叉学科的研究。
通信地址:北京北四环西路15号技术发展部(100080)
电话:(010)62615564
E-mail:guo84624@sina.com

The Approximate Solution for Long-Time and Long-Range Longitudinal Gliding Flight Based on Segment Constant Gliding Angle

GUO Xing-ling, ZHANG Heng

(Division of Technology Sciences, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: A method was proposed for approaching the glide trajectories based on n -segment constant gliding angle. It considered the effect of earth rotation. According to the method, the approximate solution for the glide trajectories was established. The approach to calculating the gliding angle and flight time of each segment was given. The procedure for approaching the whole glide trajectory was described. Two examples show that the differences in the gliding range and flight time between the approximate solution and the accurate solution are very small. The error rate in the range is about 0.7% and the error rate in the time is about 0.6%. Therefore the method is feasible and effective for long-time and long-range longitudinal glide trajectories with initial small gliding angle, especially for the glide trajectories with range greater than half the circumference of the earth.

Key words: Flight; Approximate solution; Constant gliding angle; Longitudinal; Long-range; Long-time