中 国 科 学 (A 辑)
第 29 卷 第 1 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1999 年 1 月

非完整力学的第二类、第一类和中间类型变分原理*

朱如曾
(中国科学院力学研究所,非线性连续介质力学开放研究实验室,北京 100080)

摘要 提出非完整力学的第二类微分变分原理,在此基础上建立一系列第二类积分变分原理,并由此出发导出“δq-Δq 普遍关系”和第一类及中间类型积分变分原理的普遍形式,它概括了所有可能的 δq-Δq 关系和所有可能的积分变分原理,从而统一了所有的 δq-Δq 关系和所有的积分变分原理.

关键词 非完整力学 变分原理

对 n 自由度非完整力学,在态空间里,广义坐标 $q(q_1, \cdots, q_n)$ 与广义速度 $q'(q_1', \cdots q_n')$ 应为平等的基本变量,因此 q 的运动方程

$$\dot{q}_s = q_s' \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{1}$$

与 q' 的运动方程,即 Newton 第二定律在态空间的形式,应被视为平等的运动方程. 这里已将 q_s 的时间微商 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_s$,简记为 $\dot{q}_s$. 以往所有的非完整力学变分原理[1~4],由于只允许广义坐标独立变分,而广义速度不能独立变分,故必须事先承认真实运动满足 q 的运动方程,才能导出 q' 的运动方程. 本文将为非完整力学建立能把 q 的运动方程和 q' 的运动方程一起导出的变分原理. 我们建立的变分原理将允许 δq 和 Δq 都是独立变分,称之为第二类变分原理,而以往的变分原理则称为第一类变分原理. 此外,在非完整力学中,提出了许多不同的 δq-Δq 关系和不同的第一类积分变分原理,甚至引起过若干争论[1~6]. 能否将所有这些关系和原理内在地统一起来呢?本文将表明,笔者所提出的非完整力学的第二类积分变分原理可以导出 δq-Δq 普遍关系以及完整和非完整力学第一类及中间类型积分变分原理的普遍形式,它概括了所有可能的积分变分原理,从而统一了所有的 δq-Δq 关系和所有的积分变分原理.

1 第二类微分变分原理

考虑 N 个质点组成的,受 m 个独立的理想双面完整约束

$$W_\alpha(\mathrm{r}, t) = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, m < 3N) \tag{2}$$

和 g 个 Appell-Chetaev 意义[1~3]下的理想独立双面非完整一阶约束

1998-10-08 收稿
* 国家自然科学基金资助项目(批准号:19272064)

$$G_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g < 3N - m) \tag{3}$$

的系统. 此处 $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N)$, $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \cdots, \mathbf{r}_N')$; $\mathbf{r}_i$ 和 $\mathbf{r}_i'$为第 i 个质点的位置矢量和速度矢量. 理想双面约束的约束力 $\mathbf{R}_i$ 具有性质:对满足条件

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial W_\alpha}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, m) \tag{4}$$

和 Appell-Chetaev 条件[1~3]

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} G_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, g) \tag{5}$$

的矢量元 $\delta\mathbf{r}(\delta\mathbf{r}_1, \delta\mathbf{r}_2, \cdots, \delta\mathbf{r}_N)$,有

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \tag{6}$$

其等价形式是约束力 $\mathbf{R}_i$ 可表示为[3]

$$\mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{m} \mu_\alpha(t) \frac{\partial W_\alpha}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{\beta=1}^{g} \zeta_\beta(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} G_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \quad (i = 1, \cdots, N), \tag{7}$$

此处系数 μ_α 和 ζ_β 依赖于瞬时动力学态. Newton 第二定律在态变量下可写为

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{r}_i' = 0 \quad (i = 1, \cdots, N), \tag{8}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{r}_i' = 0 \quad (i = 1, \cdots, N), \tag{9}$$

其中 m_i 和 $\mathbf{F}_i$ 分别为第 i 个质点的质量和所受主动力.

定理 1.1(广义 D'Alambert-Lagrange 原理(第二类微分变分原理)的 Newton 表述) 定义在时间间隔$[t_0, t_1]$上的足够光滑的$(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t))$是约束 Newton 系统(2), (3)和(7)~(9)式的真实运动,其充要条件是它在时间间隔$[t_0, t_1]$上时时满足方程(2)和(3)以及 $\delta\mathbf{r}'(\delta\mathbf{r}_1', \cdots, \delta\mathbf{r}_N')$任意而 $\delta\mathbf{r}$ 受到条件(4)和(5)限制的方程

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{F}_i - m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{r}_i' \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{N} m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{r}_i') \cdot \delta \mathbf{r}_i' = 0. \tag{10}$$

证 先证条件的必要性. 假设$(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t))$是约束 Newton 系统(2), (3)和(7)~(9)式在时间间隔$[t_0, t_1]$上的真实运动,故满足条件(2)和(3)式. 对任意的矢量元 $\delta\mathbf{r}'$ 以及满足条件(4)和(5)式的 $\delta\mathbf{r}$, (7)式给出(6)式. 由(6)、(8)和(9)式得出(10)式. 就证明了条件的必要性.

现在证明充分性. 假设定理的条件成立. 于是有(2)和(3)式. 在(10)式中 $\delta\mathbf{r}$ 受到(4)和(5)式的限制,故应用 Lagrange 不定乘子法,即用 μ_α 乘(4)式两边, ζ_β 乘(5)式两边,然后与(10)式相加. 在结果的式子中利用 $\delta\mathbf{r}$ 和 $\delta\mathbf{r}'$ 的独立性得到(8)和(9)式,其中 $\mathbf{R}_i$ 由(7)式表示. 这就证明了条件的充分性.

现在在广义态坐标(q, q')下表示上述原理. 完整约束面(2)式的交上的广义位形坐标数为 $n = 3N - m$,即当 $\mathbf{r}$ 满足(2)式时,有 $q_i = q_i(\mathbf{r}, t)$ $(i = 1, \cdots, n)$.

为推导方便起见,在态空间$(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$内将约束超曲面(2)式上的广义位形坐标光滑可逆地延拓到包括约束面的交在内的开域 $\Sigma(t)$内,并新定义 m 个辅助广义位形坐标 $q_{n+\alpha} = W_\alpha(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N, t)$ $(\alpha = 1, \cdots, m)$. 对应的广义速度坐标 $q'(q_1', \cdots, q_{3N}')$为

$$q_s' = \frac{\partial q_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial q_s}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{r}_i' \quad (s = 1, \cdots, 3N). \tag{11}$$

其逆变换为

$$\mathrm{r}_i = \mathrm{r}_i(q, t), \quad \mathrm{r}_i' = \frac{\partial \mathrm{r}_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial \mathrm{r}_i}{\partial q_s} q_s' \quad (i = 1, \cdots, N). \tag{12}$$

由(10)～(12)式容易证明如下的广义 Lagrange 关系

$$\frac{\partial \mathrm{r}_i'}{\partial q_s'} = \frac{\partial \mathrm{r}_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathrm{r}_i}{\partial q_s} = \frac{\partial \mathrm{r}_i'}{\partial q_s} + \sum_{k=1}^{n}(\dot{q}_k - q_k')\frac{\partial^2 \mathrm{r}_i}{\partial q_s \partial q_k} \quad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, N \\ s = 1, \cdots, n \end{pmatrix} \tag{13}$$

和广义中心 Lagrange 方程

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial q_s'} + \frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s\right)\delta q_s + \sum_{s=1}^{n}(\dot{q}_s - q_s')\delta\frac{\partial T}{\partial q_s'} = 0. \tag{14}$$

以上已用动能 T 及广义主动力 Q_s 的定义式 $T = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i \mathrm{r}_i'^2$ 和 $Q_s = \sum_{i=1}^{N}\mathrm{F}_i \cdot \frac{\partial \mathrm{r}_i}{\partial q_s}$. 由于条件(2)式的限制,(13)和(14)式中的 s 和 k 只取 1 到 n 而不是 1 到 $3N$(以后 q 和 q 也都只有 n 个分量). (14)式可化为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q_s'}L + \frac{\partial}{\partial q_s}L + Q_s'\right)\delta q_s + \sum_{s=1}^{n}(\dot{q}_s - q_s')\delta\frac{\partial L}{\partial q_s'} = 0, \tag{15}$$

此处 L 是包含所有保守主动力贡献的 Lagrange 函数 $L = T - V$, $Q_s'(s = 1, \cdots, n)$ 是可能存在的非保守主动力.

应用上述诸关系可得:

定理 1.2(广义 D'Alambert-Lagrange 原理的 Lagrange 表述)　定义在时间间隔 $[t_0, t_1]$ 上的足够光滑的 $(q(t), q'(t))$ 为约束条件

$$f_\beta(q, q', t) = G_\beta(\mathrm{r}(q, t), \mathrm{r}'(q, q', t), t) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{16}$$

(即条件(2)和(3)式)下 Lagrange 系统的真实运动,其充要条件是它在时间间隔 $[t_0, t_1]$ 上时时满足方程(16)和 δq 任意而 δq 受到条件

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s'}\delta q_s = 0 \ (\beta = 1, \cdots, g) \tag{17}$$

限制的方程(15).

2　第二类积分变分原理

利用 $\delta \dot{q}_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_s$,(14)式可化为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s'}\delta q_s\right) + \delta L + \delta\sum_{s=1}^{n}(\dot{q}_s - q_s')\frac{\partial L}{\partial q_s'} + \sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s = 0. \tag{18}$$

将 $q(t)$ 和 $q'(t)$ 连续延拓到 t_0 和 t_1,然后利用变分学的基本定理[7]容易证明,在 (t_0, t_1) 中成立的(18)式等价于时间间隔 (t_0, t_1) 上的积分式

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta\left[L + \sum_{s=1}^{n}(\dot{q}_s - q_s')\frac{\partial L}{\partial q_s'}\right] + \sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s\right\}\mathrm{d}t - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s'}\delta q_s\Bigg|_{t_0}^{t_1} = 0, \tag{19}$$

由于 δq 受到条件(17)的限制,方程(19)称为偏变分方程. 于是我们有:

定理 2.1(端点自由的第二类积分变分原理的 Lagrange 表述)　定义在时间间隔 $[t_0, t_1]$ 上

的足够光滑的 $(q(t), q'(t))$ 为约束条件(16)式(即条件(2)和(3)式)下 Lagrange 的真实运动,其充要条件是它在时间间隔 $[t_0, t_1]$ 上时时满足方程(16)式和 δq 任意而 δq 受条件(17)式限制的偏变分方程(19).

在闭区间 $[t_0, t_1]$ 端点处加上条件

$$\delta q_s(t_0) = \delta q_s(t_1) = 0 \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{20}$$

或同时还加上条件

$$\delta q_s'(t_0) = \delta q_s'(t_1) = 0 \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{21}$$

则在开区间 (t_0, t_1) 内,D'Alambert-Lagrange 原理仍成立,故积分变分原理也成立,只是(19)式化为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta\left[L + \sum_{s=1}^{n}(\dot{q}_s - q_s')\frac{\partial L}{\partial q_s'}\right] + \sum_{s=1}^{n}Q_s\delta q_s\right\}\mathrm{d}t = 0. \tag{22}$$

因此我们有

定理 2.2(端点半固定(或固定)的第二类积分变分原理的 Lagrange 表述) 定义在时间间隔 $[t_0, t_1]$ 上的足够光滑的 $(q(t), q'(t))$ 为约束条件(16)式(即条件(2)和(3)式)下 Lagrange 的真实运动,其充要条件是它在时间间隔 $[t_0, t_1]$ 上时时满足方程(16)式和 δq 任意(或 δq 满足条件(21)式)而 δq 受条件(17)和(20)式限制的偏变分方程(22).

用 Lagrange 乘子 (λ_β) 法,并考虑到 Hertz 矩阵 $\frac{\partial^2 T}{\partial q' \partial q'}$ 的非奇异性,上述第二类积分变分原理给出态空间封闭的运动方程组:(16)式和

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial q_s'} + \frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s'} = 0 \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{23}$$

$$\dot{q}_s = q_s' \quad (s = 1, \cdots, n). \tag{24}$$

若将方程(24)代入方程(23),即得出著名的 Routh 方程[1~3]. 这也说明了第二类积分变分原理的正确性.

3 第二类积分变分原理的 Hamilton 表述

本节以主动力保守的情况为代表. 由于 Hertz 矩阵 $\frac{\partial^2 T}{\partial q' \partial q'}$ 非奇异,故可引进 Legendre 变换

$$p_s = \frac{\partial}{\partial q_s'}L(q, q', t) \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{25}$$

$$H(q, p, t) = \sum_{s=1}^{n}p_s q_s' - L(q, q', t). \tag{26}$$

从这两式可解出

$$q_s' = q_s'(q, p, t) = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{27}$$

于是(19)、(22)、(16)、(17)和(21)式分别化为

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta\left\{\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s - H\right\}\mathrm{d}t - \sum_{s=1}^{n}p_s\delta q_s\Big|_{t_0}^{t_1} = 0, \tag{28}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta\left(\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s - H\right)\mathrm{d}t = 0, \tag{29}$$

$$u_\beta(q, p, t) = f_\beta(q, q', t) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g), \tag{30}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_\beta}{\partial p_k}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial p}\right]^{-1}_{ks}\delta q_s = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g), \tag{31}$$

$$\delta p_s(t_0) = \delta p_s(t_1) = 0 \quad (s = 1, \cdots, n). \tag{32}$$

因此我们得到:

定理 3.1(端点自由的第二类积分变分原理的 Hamilton 表述)　在条件(30)式(即条件(2)和(3)式)下,(t_0, t_1)中的$(q(t), p(t))$为 Hamilton 系统的真实运动,其充要条件是它在(t_0, t_1)内满足方程(30)和 δp 任意而 δq 受条件(31)限制的偏变分方程(28).

定理 3.2(端点半固定(或固定)的第二类积分变分原理的 Hamilton 表述)　在条件(30)式(即条件(2)和(3)式)下,(t_0, t_1)中的$(q(t), p(t))$为 Hamilton 系统的真实运动,其充要条件是它在(t_0, t_1)内满足方程(30)和 δp 任意(或 δp 满足条件(32)式)而 δq 受条件(31)和(20)式限制的偏变分方程(29).

虽然上文给出的诸变分原理均与 Newton 系统相关联,但是容易证明在 L 氏表述和 H 氏表述中删去与 Newton 系统相关联的词语,则它们仍然是成立的. 此外,当非完整约束不存在时,我们的变分原理退化为完整系统的第二型变分原理. 著名的 Livens 原理[8]和"改进的 Hamilton 原理"[9,10]就是两个特例.

4　"$\delta q'$-δq 普遍关系"和第一类及中间类型积分变分原理的导出

真实运动条件(1)式是第二类变分原理的推论,故在原原理中对正轨增加此条件后,得到的是与原原理等价的新原理. 然后在新原理中,正轨条件(1)式与偏变分方程(22)结合成为新的偏变分方程

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L + \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_s}(\delta\dot{q}_s - \delta q'_s) + Q_s\delta q_s\right)\right]_{q'=\dot{q}}\mathrm{d}t = 0, \tag{33}$$

注意,(33)式中方括号的下标 $q' = \dot{q}$ 仅限制正轨,而不限制傍轨,故在新原理中,$\delta q_s'$仍都是独立变分(当然要受端点条件的限制),所以,新原理仍属第二类变分原理. 但若将(33)式中的 δL 展开,便可见其中含 $\delta q_s'$的项互相抵消,故 $\delta q_s'$的任何选取方法都是等效的. 所以对于新原理而言,附加 $\delta q_s'$对 δq 的任意线性依赖关系($\delta q'$-δq 普遍关系)

$$\delta q_s' = A_s(\delta q) \quad (s \in \{1, \cdots, n\}) \tag{34}$$

(这里,A_s 可以依赖于 q, $\dot{q}$ 和 t)等效于允许 q' 独立变分. 但增加了附加条件(34)式的原理已成为第一类(当 S 的个数 $M_S = n$ 时)或中间类型(当 $0 < M_S < n$)的了. 于是得到:

定理 4.1(非完整力学端点半固定(或固定)的第一类积分变分原理普遍形式的 Lagrange 表述)　定义在时间间隔$[t_0, t_1]$上的足够光滑的$(q(t), q'(t))$为约束条件(16)式下 Lagrange 系统的真实运动,其充要条件是它在时间间隔$[t_0, t_1]$上时时满足方程(16)和偏变分方程(33).(33)式中,$\delta q'$ 和 δq 受条件(34)式和 Appell-Chetaev 条件(17)式以及端点条件(20)式(或还有(21)式)的限制.

线性算子 A_s 的任一具体形式都决定了对应的积分变分原理的形式. 特别值得注意的是,中间类型变分原理是以往文献中未曾出现过的. 此外,上述推导过程表明,A_s 的形式可不受约束条件(16)式的限制. 当非完整的约束条件(16)式不存在时,本文的非完整力学端点半固定(或固定)的第一类和中间类型积分变分原理的普遍形式便退化为完整力学的第一类和中间类型积分变分原理的普遍形式.

举例如下:

1) 令(34)式取形式 $\delta q' = 0$, (33)式便取偏变分方程的形式

$$\int_0^1 \left[\delta L(q, q', t) + \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_s} \delta \dot q_s + Q_s \delta q_s \right) \right]_{q' = \dot q} \mathrm{d}t = 0,$$

这是文献中未曾出现过的.

2) 令(34)式取形式 $\delta q' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q$,则(33)式在无非保守主动力情况下取 Hölder 偏变分方程的形式[1～4]

$$\int_0^1 [\delta L(q, q', t)]_{q' = \dot q} \mathrm{d}t = 0.$$

3) 令(34)式取 Suslov 形式,则(33)式在无非保守主动力情况下取 Suslov 偏变分方程的形式[1～4].

4) 令方程(34)取形式 $\delta q_s' = \delta \dot q_s + \left(Q_s / \frac{\partial L}{\partial \dot q_s} \right) \delta q_s \ (s = 1, \cdots, n)$,则方程(33)化为[11]

$$\int_0^1 [\delta L(q, q', t)]_{q' = \dot q} \mathrm{d}t = 0.$$

5 结论

由上可见,我们建立的非完整力学第二类变分原理不仅可以导出态变量下封闭的运动方程组,还可以导出 δq-δq 普遍关系以及完整和非完整力学第一类和中间类型积分变分原理的普遍形式,它概括了所有可能的 δq-δq 关系和所有可能的积分变分原理,从而统一了所有的 δq-δq 关系和所有的积分变分原理,取消了任何可以争论的余地.

参　考　文　献

1 Rumyantsev V V. Proc IUTAM-ISIMM Symp on Modern Developments in Analytical Mechanics, Torino, 1982. 697～716
2 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京:北京工业学院出版社,1985. 63～77
3 陈　滨. 分析动力学. 北京:北京大学出版社,1987. 345～400; 64～67
4 Arnold V L. Dynamical System. Vol 3. Berlin: Springer, 1988. 9～20
5 陈　滨. 关于非完整力学的一个争论. 力学学报,1991,23(3): 379～394
6 梁立孚,石志飞. 非完整约束系统中广义位移变分的选值域问题. 固体力学学报,1993,14(3): 189～193
7 Cushing J T. Applied Analytical Mathematics for Physical Scientists. New York: J Wiley & Sons Inc, 1975. 237
8 Pars L A. A Treatise on Analytical Dynamics. London: Heinemann, 1965. 530～531
9 戈尔茨坦 H. 古典力学. 北京:世界图书出版公司,1995. 438～441
10 Deslege E A. Classical Mechanics. Vol 2. New York: J Wiley & Sons, 1982. 843～852
11 Vujanović B. A variational principle for non-conservative dynamical systems. Z Angew Math Mech, 1975, 55: 321～331