

# 平行涡管三维合并的直接数值模拟

王为国 庄逢甘\* 忻鼎定\*\*

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

\* (航天工业总公司科学技术委员会, 北京 100830)

\*\* (北京航空航天大学流体力学研究所, 北京 100083)

**摘要** 采用拟谱方法求解 Navier - Stokes 方程, 对两个同向平行涡管的三维合并过程进行了直接数值模拟, 分析了它的不同于二维合并的“缠绕式”特性. 特别地, 对在合并过程中产生的垂直于初始涡管方向的非主体涡量的意义和物理机制进行了探讨.

**关键词** 拟谱方法, 直接数值模拟, 平行涡管三维合并, 非主体涡量

## 前 言

早在 60 年代, Freymuth<sup>[1]</sup>就发现了涡合并现象. 70 年代, Winant 和 Browand<sup>[2]</sup>指出: 两个涡合并成一个更大的涡是剪切层厚度增长的最主要机制. 随后, 在高雷诺数下, Brown 和 Roshko<sup>[3]</sup>也得到了类似的结论. 80 年代以后, Maxworthy<sup>[4]</sup>等人在浅水分层流、Griffiths 和 Hopfinger<sup>[5]</sup>在旋转流中分别发现和研究了其中的涡合并现象. 此外, Cresswell<sup>[6]</sup>观察到了海洋中两个东澳大利亚热核环的合并; 而 Mac Low 和 Ingersoll<sup>[7]</sup>对从旅行者号飞船发回的图像进行了分析, 发现在木星的大气层中有涡的合并过程. 这些现象的发现, 对人们认识涡合并的作用以及开展这方面的研究有着非常重要的意义.

旋涡的相互作用严重影响飞机的气动性能. 研究表明: 鸭翼涡与前缘涡的相互作用影响飞机的俯仰性能和方向稳定性, 边条涡与前缘涡的相互作用不仅影响飞机横向和纵向的稳定性而且是导致翼面振荡的原因. 70 年代, 波音 747 的机翼改型后, 新的机翼后缘产生了两对共生的襟涡和翼涡, 通过合并降低了尾涡的强度同时加快了尾涡能量的耗散, 使得在波音 747 后面产生的横滚力矩降低了一半, 大大减少了尾涡的危害.

旋涡相互作用的研究有助于我们了解湍流拟序结构的物理本质. 众所周知, 湍流拟序结构的本质就是涡结构<sup>[8]</sup>, 涡的运动、演化及其相互作用决定了拟序结构的特性. 为了解湍流中大尺度形成和小尺度转捩的物理机制, 人们对各种集中涡之间的相互作用进行了研究, 并将其作为湍流研究的一个重要的手段.

旋涡合并的早期理论研究和数值研究大都采用 Vortex-in-cell<sup>[9]</sup>和 CD<sup>[10]</sup>方法. 研究者们发现: 存在着一个无量纲的临界距离参数, 当两个圆涡形心之间的初始无量纲距离小于这个参数时, 两个涡就会合并成一个大涡. 后来, Overman 和 Zabusky<sup>[11]</sup>改进了 CD 方法, 他们的研究结果表明: 不稳定旋涡相互旋转的平衡状态的失稳能够导致合并.

80 年代后期, Melander 等人<sup>[12]</sup>提出了 Hamilton 矩模型, 给出了旋涡合并的充分必要条件, 这是从 Euler 方程出发的关于合并问题的第一个完全的分析解, 他们还由此发现了“亚稳定”(metastable)状态. 近年来, 二维旋涡合并的研究向着更深入更广泛的方向发展, 如:

Dritschel 和 Legras<sup>[13]</sup>发展了二维涡动力学的椭圆模型，给出了比矩模型和 CD 方法更为精确的临界合并判据<sup>[14]</sup>。另外，Basu<sup>[15]</sup>发现：白噪声（white noise）能增大合并的临界距离，解释了实验值与数值研究结果之间出现的差异；Dritschel 和 Waugh<sup>[16]</sup>还采用 CD 方法模拟了不等涡的相互作用，发现了旋涡之间的五种相互作用方式。

但是，这些工作的局限性在于：忽视了粘性的作用，采用了均匀涡量分布，没有考虑三维扰动的影响。为此，我们对平行涡管的三维合并的物理特性进行了直接的数值模拟研究，同时对三维扰动在旋涡合并中的作用进行考察。

### 1 初始条件和数值方法

在不可压缩粘性流体中，有两个靠得很近的同向旋转的平行涡管，关于平面  $y = 0$  对称，涡管的截面则关于平面  $z = 0$  对称。涡量在涡管内关于涡管的中心线呈轴对称分布，而且只有  $z$  方向的分量<sup>[17]</sup>。即

$$\omega = (0, 0, \omega(r)) \tag{1}$$

其中， $r^2 = x^2 + y^2$ 。

如果取

$$\omega(r) = \begin{cases} -20 \int_0^r f(3r/2) J, & r < 0.6667 \\ 0, & r \geq 0.6667 \end{cases} \quad \text{明：} \quad \left[ \begin{matrix} \text{与前者} \\ \text{一致} \end{matrix} \right]$$

}}

(5)

这样的涡量场不满足无散度条件，为此进行如下变换

$$V(x, y, z, t = 0) = \nabla \times (\nabla^2)^{-1} \omega \tag{6}$$

则真实的涡量场为

$$\tilde{\omega}(x, y, z, t = 0) = \nabla \times V(x, y, z, t = 0) \tag{7}$$

(6) 式满足不可压缩条件，而 (7) 式也满足无散度条件。一般地， $g(z)$  是涡管中心线的扰动函数。而  $\theta$  是中心线关于  $y - z$  平面的倾斜角。

鉴于流动的周期性，计算只需在立方体  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  中进行。采用拟谱方法直接求解 Navier - Stokes 方程而不附加任何物理模型。Fourier 变换以后得到的是

关于时间的常微分方程，求解的差分格式对非线性项用 Leap - Frog 格式，耗散项用 Crank - Nicholson 格式。取均匀的配置点分布，网格点数为 32 × 64 × 64。

计算中有关的参数取值如下：定义雷诺数为  $Re = \dots$ ；两个初始涡管的中心线之间的最远距离为  $2b = 1.73$ ；计算的时间步长为  $\Delta t = 0.005$ 。其中， $\Gamma_0$  是初始时刻单个涡管截面环量的绝对值， $\nu$  为运动学粘性系数。

## 2 结果和讨论

### 2.1 平行涡管的轴对称合并

当取  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.0$ ,  $g(z) = \cos(z)$  时，初始涡管的结构关于轴  $x = y = 0$  对称。扰动振幅与涡管间距和涡管长度相比是个小量，即  $\alpha = R_0 \times 15\% = 2b \times 5.78\% = 2 \times 1.59\%$ ,  $Re = \Gamma_0 / \nu = 1,000$ 。其中， $R_0$  是涡管半径， $2$  是涡管长度。图 1 给出了 6 个不同的典型时刻的涡量等值面图，零时刻的等值面代表了初始时刻的涡结构。

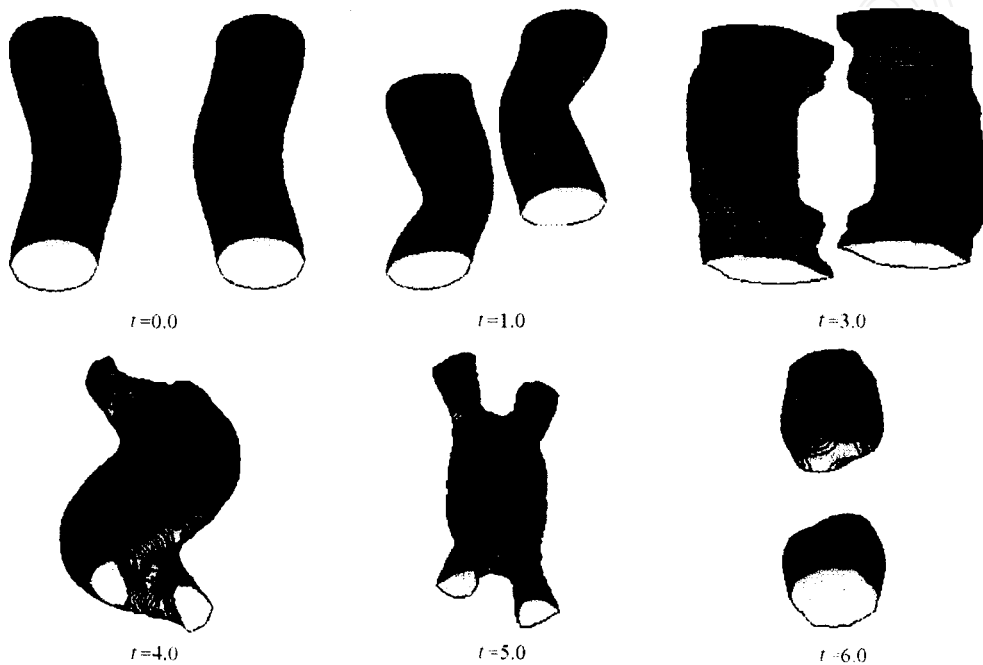


图 1 涡管对称三维合并的涡量等值面图

Fig. 1 Iso - surfaces of vorticity for symmetrical merger of two vortex tubes

$$|\omega| = |\omega_0| \quad (0) \quad |\omega|_{\max} \times 40\% = 8.0$$

$t = 4.0$  时刻的缠绕结构表明：平行涡管的轴对称合并是缠绕式三维合并。其有别于二维涡合并的主要特征是：不同截面之间的相位差和各个截面向共旋中心的位移差导致了涡管轴向速度的产生，使得涡管产生了轴向的拉伸和压缩。特别地，在垂直于涡管的轴向，产生了涡量的集中分布，这里笔者称其为非主体涡量。图 2 给出了非主体涡量在两个不同坐标平面上的分布曲面及其相应的涡量等值线，可以看出它们是以反对称集中涡对的方式存在的，但分布方式不同。图 3 中的非主体涡量峰值的曲线不仅表明了反对称形式的历史性，而且非主体涡量的峰值甚至可以高达初始时刻涡量最大值的 30%。在合并的后期，涡量等值面呈粗细不同的管状，高涡量区逐渐集中于涡管的两端。

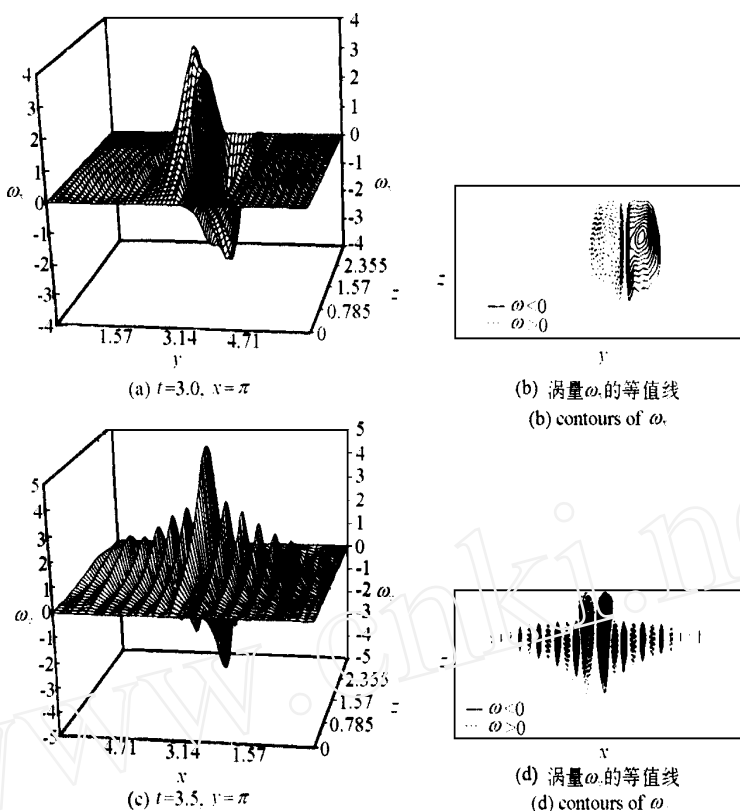


图2 垂直于涡管轴向的非主体涡量的分布曲面及其相应的等值线

Fig.2 Surfaces of vorticity in non - axial ( x , y ) direction and their contours

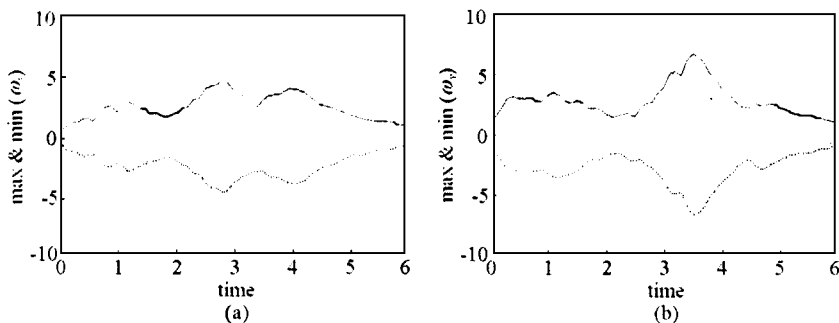


图3 (a)  $\omega_x$  和 (b)  $\omega_y$  的最大最小值曲线

Fig.3 The peak values of (a)  $\omega_x$  and (b)  $\omega_y$

## 2.2 平行涡管的非对称合并

平行涡管非对称合并的初始涡结构有两种情况：一种是两个涡管的半径相同但涡量峰值不同，扰动函数即涡管的弯曲方式也不同。取  $\epsilon = 0.1$ ， $\theta = \pi/3$ ，左边涡管的轴向扰动函数为  $g(x) = 2 \tanh|x - z| - 1$ ，涡量峰值为 15.0，是弱涡；右侧涡管的扰动函数为  $g(x) = \cos(x)$ ，涡量峰值为 20.0，是强涡。

图4给出的6个不同时刻的涡量等值面表明：此种非对称合并的特征主要表现为强涡吞并

弱涡，吞并的方式是三维的；与对称合并相似，非主体涡量也是以反向集中涡对的形式存在的(图 5)，但不同的是，非主体涡量的分布结构是非对称的，这说明非主体涡量分布的对称与否取决于初始涡结构的对称性。

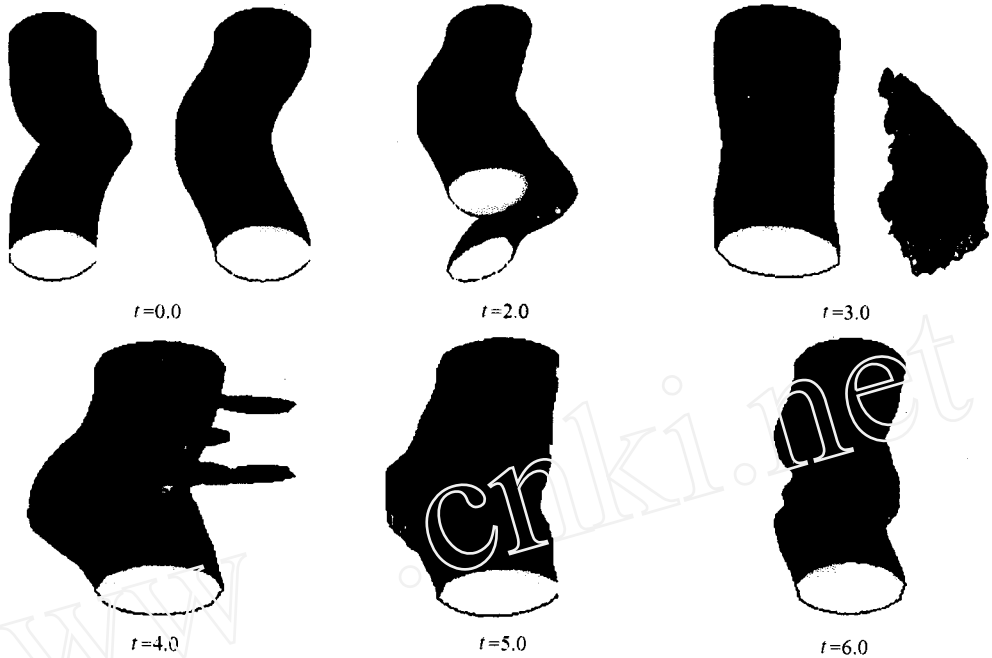


图 4 非对称涡管合并过程中的涡量等值面图 (I)

Fig. 4 Iso - surfaces of vorticity for asymmetrical merger of two vortex tubes (I)

$$| \cdot | = | (0) |_{\max} \times 30 \% = 6.0$$

第二种情况是两个涡管涡量的峰值相同但涡管的半径不同。为此将对称合并情形中的一个涡管的半径由 0.6667 减少为 0.5，模拟的结果更类似于对称合并的情况(见图 6)。可以看出这种空间分布尺度的变化对旋涡相互作用过程影响不大。

### 2.3 讨论

三维扰动导致了涡量沿涡管轴向分布的不均匀性，产生了涡管不同截面之间的相位差和各个截面向共旋中心移动的位移差，因此有导致合并的“缠绕方式”的作用。这种类似于剪切流中“螺旋配对”的缠绕式合并是三维合并的主要特征之一。

这种不均匀性所产生的涡量梯度由于 Navier - Stokes 方程的非线性项的作用使得非主体涡量得到增长。这就导致了三维合并的另一个重要特征：即在合并过程中，在垂直于初始涡管的轴向出现了非主体涡量的集中分布，它们基本上以反向涡对的方式存在，其结构的对称与否取决于初始时刻涡管结构是否对称。值得注意的是：在对称合并中，非主体涡量峰值在“螺旋配对”阶段达到最大值，因此拟序结构中流向涡的产生和增长很可能是不均匀展向涡相互作用特别是“螺旋配对”的结果，而流向涡结构的对称性依赖于展向涡结构的对称性。

上述小扰动振幅只有涡管半径的 15%，合并以后的涡量沿涡管的轴向表现了更加明显的不均匀性。在初始时刻，如果认为组成自由剪切层的细小涡管的半径与扰动尺度相比不是足够的量，那么细小涡管之间的合并与再合并完全可能是以上述三维的方式进行的。这样，在剪

切层中，展向涡量的衰减和流向涡量的积累都是自然的。

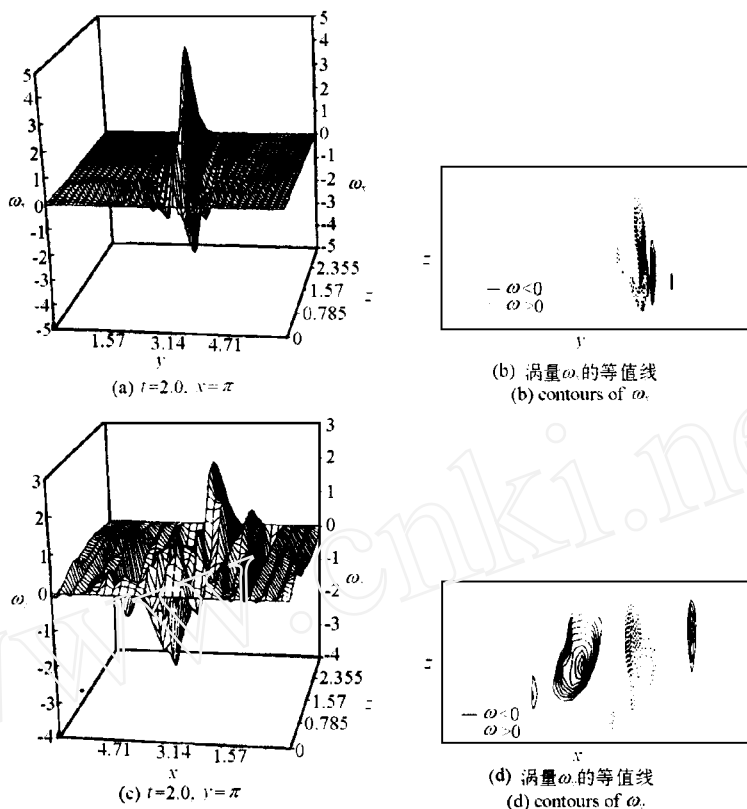


图5 垂直于涡管轴向的非主体涡量的分布曲面及其相应的等值线 (非对称 I)

Fig.5 Surfaces of vorticity in non - axial ( $x, y$ ) direction and their contours (asymmetry I)

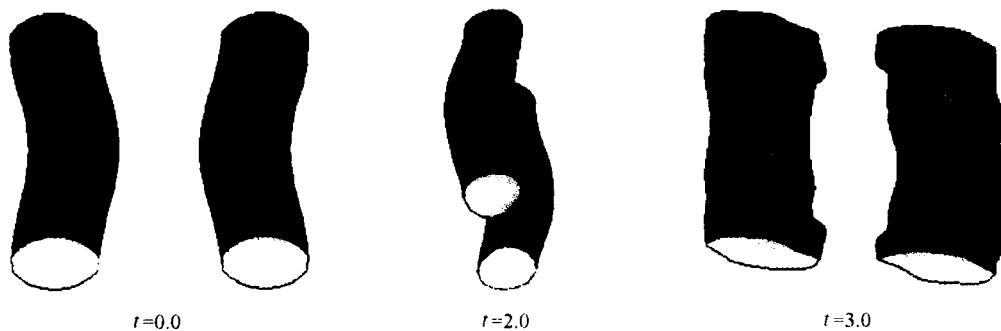


图6 非对称涡管合并过程中的涡量等值面图 (II)

Fig.6 Iso - surfaces of vorticity for asymmetrical merger of two vortex tubes (II)

$| \quad | = | \quad (0) |_{\max} \times 40 \% = 8.0$

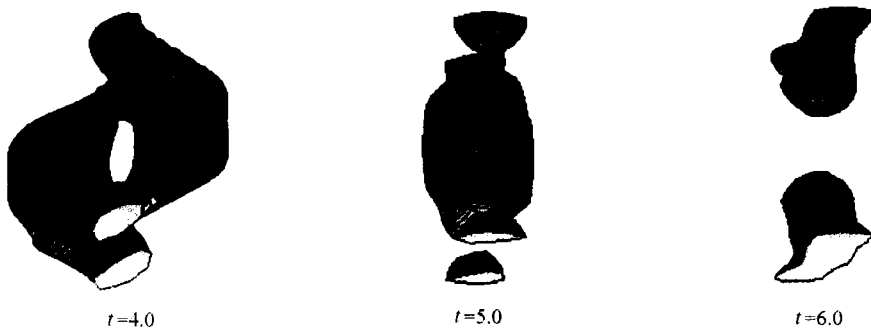


图 6 非对称涡管合并过程中的涡量等值面图 (II) (续)

Fig. 6 Iso - surfaces of vorticity for asymmetrical merger of two vortex tubes (II) (continued)

| | = | (0) |<sub>max</sub> ×40 % = 8.0

## 参 考 文 献

- 1 Freymuth P. On transition in a separated boundary layer. *JFM*, 1966, 25 (4): 683 ~ 704
- 2 Winant CD, Browand FK. Vortex pairing: the mechanism of turbulent mixing growth at moderate Reynolds number. *JFM*, 1974, 63: 237 ~ 255
- 3 Brown GL, Roshko A. On density effects and large structure in turbulent mixing layer. *JFM*, 1974, 64: 775 ~ 816
- 4 Maxworthy T, Caperan P, Spedding GR. Two dimensional turbulence and vortex dynamics in a stratified Fluid. In: List EJ, Jirka G H eds. Stratified flows. New York: American Society of Civil Engineers, 1987. 398 ~ 407
- 5 Griffiths RW, Hopfinger EJ. Coalescing of geostrophic vortices. *JFM*, 1987, 178: 73 ~ 97
- 6 Cresswell GR. The coalescence of two East Australia Current warm - core ring. *Science*, 1982, 215: 161 ~ 164
- 7 Mac Low MM, Ingersoll AP. Merging of vortices in the atmosphere of Jupiter. An analysis of Voyager images. *Icarus*, 1986, 65: 353 ~ 367
- 8 Hussian F, Melander MV. New aspects of vortex dynamics: helical wave, core dynamics, viscous helicity generation, and interaction with turbulence. In: Moffatt HK, Zabusky NJ, Orszag SA eds. Topological Aspects of the Fluids and Plasma. Kluwer Publ., 1992. 1 ~ 23
- 9 Robert KV, Christiansen JP. Topics in computational fluid mechanics. *Comput Phys Commun Suppl*, 1979, 3: 14 ~ 32
- 10 Christansen JP, Zabusky NJ. Instability, coalescence and fission of finite - area vortex structure. *JFM*, 1973, 61: 219 ~ 243
- 11 Overman EA, Zabusky NJ. Evolution and merger of isolated vortex structure. *Phys Fluids*, 1982, 25: 1297 ~ 1305
- 12 Melander MV, Zabusky NJ, McWilliams JC. Symmetric vortex merger in two dimension: causes and conditions. *JFM*, 1988, 195: 303 ~ 340
- 13 Dritschel DG, Legras B. The elliptical model of two - dimensional vortex dynamics. Part II: Disturbance equations. *Phys Fluids A*, 1991, 3 (5): 855 ~ 869
- 14 Legras B, Dritschel DG. The elliptical model of two - dimensional vortex dynamics. Part I: The basic state. *Phys Fluids A*, 1991, 3 (5): 845 ~ 854
- 15 Basu AJ. The role of noise in two - dimensional vortex merging. *Fluid Dynamics Research*, 1992, 10: 169 ~ 180
- 16 Dritschel DG, Waugh DW. Quantification of the inelastic interaction of unequal vortices in two - dimensional vortex dynamics. *Phys Fluids A*, 1992, 4 (8): 1737 ~ 1744
- 17 Shelly MJ, Meiron DI, Orszag SA. Dynamical aspects of vortex reconnection of perturbed anti - parallel vortex tubes. *JFM*, 1993, 246: 613 ~ 652

## THE DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF THREE DIMENSIONAL MERGER FOR TWO PARALLEL VORTEX TUBES

Wang Weiguo Zhuang Fenggan \* Xin Dingding \*\*

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

\* (*Science and Technology Committee of China Aerospace Corporation, Beijing 100830, China*)

\*\* (*Beijing Univ. of Aero. and Astr., Beijing 100083, China*)

**Abstract** By direct numerical simulation of Navier - Stokes Equations, we investigate the three - dimensional merger of two perturbed parallel vortex tubes in this paper. The pseudo - spectral method is used. It is found that the three dimensional merger takes place in the manner of twinning similar to helical pairing. It is worthy of special mention that the concentration of vorticity occurs in non - axial  $x$  and  $y$  directions its maximum value can reach even more than 30 percent of the initial peak vorticity and its structure is symmetrical as long as the initial vortex tubes are symmetric. After the merger is completed, the total vorticity value at the two far ends of the vortex tube is larger than that at the center.

Under the circumstances that the small - amplitude of the perturbation is as much as about 15 percent of radius of initial vortex tubes, the vortex tubes formed by merging exhibits more non - uniformity in the axial  $z$  direction. If the radius of vortex filaments which consist of initial vortical layer is not large enough in comparison with the scale of small perturbations, such a three - dimensional merging and remerging between vortex filaments would occur in the shear layer. In brief, it seems probable that merging and re - merging of spanwise vortices are the main mechanism of three - dimensional roll up and the emerging of streamwise vorticity in shear layer.

**Key words** pseudo - spectral method, direct numerical simulation, three - dimensional merger, vorticity of non - axial  $x$  and  $y$  direction