

# 承受弯曲板断裂问题的特征根\*

徐永君

(中国科学院力学研究所,北京,100080)

**摘要** 把 Reissner 型平板裂纹尖端位移场展开式推广到任意切口、任意边界的多材料问题. 证明了 Reissner 型平板断裂问题的特征根等价于相类似的反平面切口问题和平面切口问题两部分的特征根迭加.

**关键词** Reissner 型平板, 断裂问题, 特征根, 反平面切口问题, 平面切口问题

## 0 引言

对于单材料 Reissner 型板断裂问题, 文[1]采用推广幂级数特征展开的方法获得了裂纹尖端位移场的展开式, 并给出了渐近展开式的前几项函数和系数的具体表达式. 文[2]~[4]利用奇异单元法对一些问题裂纹尖端位移场进行了分析求解, 近似地计算了相应情况的应力强度因子. 对于大多数数值计算方法, 若要有效地计算应力强度因子, 都要在不同程度上、直接或间接地利用到问题的特征解. 在文[1]的基础上, 文[5]将推广幂级数特征展开的方法拓展到了 Reissner 型板切口问题的分析计算上, 采用 Müller 法计算特征方程的根, 给出的特征方程和一些数值算例表明了 Reissner 型板的特征根均可分为与反平面切口问题等价和与平面切口问题等价的两部分叠加. 本文从板的基本方程出发推证了对任意多材料、任意切口张角、任意切口边界条件的 Reissner 型板的特征根等价于类似反平面切口问题和与类似平面切口问题叠加, 故可直接调用已有的求解这两类问题特征根的求解程序<sup>[6~11]</sup>对 Reissner 型板的特征根问题进行计算, 区别仅在于输入的材料参数不同而已.

## 1 基本方程

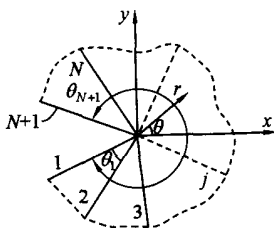


图1 N种材料切口

考虑如图1所示的多(N)种材料平板弯曲切口问题, 取切口尖端为坐标原点. 考虑 Reissner 型板的三广义位移弯曲理论<sup>[1]</sup>, 取  $u^j, v^j, w^j$ . 第j种材料所在域内平衡方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial M_r^j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta^j}{\partial \theta} + \frac{M_r^j - M_\theta^j}{r} - Q_r^j = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial M_r^j}{\partial r} + \frac{\partial M_\theta^j}{\partial r} + \frac{2M_\theta^j}{r} - Q_\theta^j = 0 \\ \frac{\partial Q_r^j}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( Q_r^j + \frac{\partial Q_\theta^j}{\partial \theta} \right) + P^j = 0 \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中  $M_r^j, M_\theta^j, M_r^j$  为内力矩,  $Q_r^j, Q_\theta^j$  为横向剪力,  $P^j$  为横向载荷. 可能出现的切口边界条件可表示为

$$\begin{cases} M |_{=j} = 0, M_r |_{=j} = 0, Q |_{=j} = 0 \\ r |_{=j} = 0, \theta |_{=j} = 0, w |_{=j} = 0 \end{cases} \quad j = 1, N+1 \quad (2)$$

可能出现的应力平衡和位移连续的边界条件为

$$\begin{cases} \left\{ M^{j-1} - M^j \right\} |_{=j} = 0, \left\{ M_r^{j-1} - M_r^j \right\} |_{=j} = 0 \\ \left\{ Q^{j-1} - Q^j \right\} |_{=j} = 0, \left\{ r^{j-1} - r^j \right\} |_{=j} = 0 \\ \left\{ \theta^{j-1} - \theta^j \right\} |_{=j} = 0, \left\{ w^{j-1} - w^j \right\} |_{=j} = 0 \end{cases} \quad j = 2, 3, 4, \dots, N \quad (3)$$

广义力和广义位移关系为

$$\begin{cases} M_r^j = -D_j \left[ \frac{\partial u^j}{\partial r} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v^j}{\partial \theta} + \frac{v^j}{r} \right) \right] \\ M_\theta^j = -D_j \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v^j}{\partial r} + \frac{v^j}{r} + \frac{\partial u^j}{\partial r} \right] \\ M_r^j = -\frac{D_j}{2} (1 - \nu_j) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u^j}{\partial r} + \frac{\partial v^j}{\partial r} - \frac{v^j}{r} \right] \\ Q_r^j = C_j \left[ \frac{\partial w^j}{\partial r} - \frac{v^j}{r} \right], \quad Q_\theta^j = C_j \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w^j}{\partial \theta} - u^j \right] \end{cases} \quad (4)$$

\* 2002-11-11 收到第1稿, 2003-03-25 收到修改稿.

其中  $D_j$  为弯曲刚度,  $G_j$  为剪切刚度,  $\nu_j$  为泊桑比.

$$D_j = \frac{E_j h^3}{12(1 - \nu_j^2)}, \quad C_j = \frac{5 G_j h}{6}$$

以三个广义位移  $u_r^j, u_\theta^j, w^j$  表示的第  $j$  种材料域的 Reissner 理论基本方程为

$$D_j \left[ \frac{\partial^2 u_r^j}{\partial r^2} + \frac{\partial u_r^j}{r \partial r} - \frac{u_r^j}{r^2} + \frac{j-3}{r^2} \frac{\partial u_r^j}{\partial r} + \frac{j+1}{2r} \frac{\partial^2 u_r^j}{\partial r \partial \theta} + \frac{1-\nu_j}{r^2} \frac{\partial^2 u_r^j}{\partial \theta^2} - \frac{\nu_j}{2r^2} \frac{\partial^2 u_r^j}{\partial r^2} \right] + C_j \left[ \frac{\partial w^j}{\partial r} - \frac{u_r^j}{r} \right] = 0 \quad (5a)$$

$$D_j \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r^j}{\partial \theta^2} + \frac{3-\nu_j}{2r^2} \frac{\partial u_r^j}{\partial \theta} + \frac{1+\nu_j}{2r} \frac{\partial^2 u_r^j}{\partial r \partial \theta} + \frac{1-\nu_j}{2} \frac{\partial^2 u_r^j}{\partial r^2} + \frac{1-\nu_j}{2r} \frac{\partial u_r^j}{\partial r} - \frac{1-\nu_j}{2r^2} \frac{u_r^j}{\theta} \right] + C_j \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w^j}{\partial \theta} - \frac{u_r^j}{r} \right] = 0 \quad (5b)$$

$$C_j \left[ \frac{\partial^2 w^j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w^j}{\partial \theta^2} - \left[ \frac{\partial u_r^j}{\partial r} + \frac{u_r^j}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^j}{\partial \theta} \right] \right] + P_j = 0 \quad (5c)$$

本文只考虑  $P^j = 0 (j = 1, 2, 3, \dots, N)$  的情况即只由于边界力的作用而使板弯曲, 设

$$\begin{cases} u_r^j = r^{i+n} a_{ni}^j(\theta) \\ u_\theta^j = r^{i+n} b_{ni}^j(\theta) \\ w^j = r^{i+n} c_{ni}^j(\theta) \end{cases} \quad (6)$$

为了便于书写,在不影响阅读和理解的情况下,一般略支表示区域的角标  $j$ . 记特征根  $\lambda$  对应的最低阶项(即第 0 项)为

$$(i) \begin{cases} \bar{u}_r = r a_0(\theta) \\ \bar{u}_\theta = r b_0(\theta) \end{cases}, \quad (ii) \bar{w}_0 = r c_0(\theta) \quad (7)$$

将式(6)代入式(4)化简整理,并将  $r$  最低阶所对应的关系式定义为

$$\begin{cases} (i) \begin{cases} \bar{M}_{r0} = -D \left[ \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \right) \right] \\ \bar{M}_0 = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} + \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} \right] \\ \bar{M}_{r0} = -\frac{D}{2} (1 - \nu) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{u}_\theta}{r} \right] \end{cases} \\ (ii) \begin{cases} \bar{Q}_0 = C \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial r} \\ \bar{Q}_0 = C \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \theta} \end{cases} \end{cases} \quad (8)$$

将式(6)代入基本方程式(5)按逐项分别化简整理并取  $r$  最低阶所对应的关系式可得

$$(i) \begin{cases} \frac{\partial \bar{M}_{r0}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{M}_0}{\partial \theta} + \frac{\bar{M}_0 - \bar{M}_{r0}}{r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{M}_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{M}_{r0}}{\partial r} + \frac{2\bar{M}_{r0}}{r} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$(ii) \frac{\partial \bar{Q}_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \bar{Q}_0 + \frac{\partial \bar{Q}_0}{\partial \theta} \right) = 0$$

将式(6)代入边界条件(2)和边界条件(3)化简整理并取  $r$  最低阶所对应的关系式可得

$$(i) \begin{cases} \bar{M}_0|_{=j} = 0, \bar{M}_{r0}|_{=j} = 0 \\ \bar{u}_\theta|_{=j} = 0, \bar{u}_r|_{=j} = 0 \end{cases}$$

$$(ii) \bar{Q}_0|_{=j} = 0, \bar{w}_0|_{=j} = 0, \quad j = 1, N + 1 \quad (10a)$$

$$(i) \begin{cases} \left[ \bar{M}_0^{j-1} - \bar{M}_0^j \right]|_{=j} = 0 \\ \left[ \bar{M}_{r0}^{j-1} - \bar{M}_{r0}^j \right]|_{=j} = 0 \\ \left[ \bar{u}_\theta^{j-1} - \bar{u}_\theta^j \right]|_{=j} = 0 \\ \left[ \bar{u}_r^{j-1} - \bar{u}_r^j \right]|_{=j} = 0 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} \left[ \bar{Q}_0^{j-1} - \bar{Q}_0^j \right]|_{=j} = 0 \\ \left[ \bar{w}_0^{j-1} - \bar{w}_0^j \right]|_{=j} = 0, \quad j = 2, 3, 4, \dots, N \end{cases} \quad (10b)$$

式(9)、式(10a)和(11b)的(i)和(ii)的两套关系式之间不耦合,这样求 Reissner 型板断裂问题的特征根问题就转化为分别独立地求解式(9)、式(10a)和(11b)的(i)和(ii)两类特征根问题.

### 2 Reissner 型板断裂问题特征根求解的平面问题与反平面问题特征根联合比拟

#### 2.1 平面问题基本方程及其比拟

如图 1 所示,若为多 ( $N$ ) 种材料平面切口断裂问题,若设

$$\bar{D} = -\frac{E}{1 - \nu^2} \quad (11)$$

则位移与应力的关系为

$$\begin{cases} \sigma_r = -\bar{D} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \right] \\ = -\bar{D} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] \\ \sigma_\theta = -\frac{\bar{D}}{2} (1 - \nu) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u}{r} - \frac{u_r}{r} \right] \end{cases} \quad (12)$$

熟知平面断裂问题的特征根  $\lambda$  对应的 Williams 展开项为

$$u_r = r f_1(\cdot), \quad u = r f_2(\cdot) \quad (13)$$

存在如下比拟关系

$$\begin{aligned} D &\sim \bar{D}, & a_0 &\sim f_1, & b_0 &\sim f_2 \\ \bar{r}_{,0} &\sim u_r, & \bar{r}_0 &\sim u \\ \bar{M}_{r,0} &\sim \tau, & \bar{M}_0 &\sim \tau, & \bar{M}_{r,0} &\sim \tau \end{aligned} \quad (14)$$

所以对 Reissner 型板的第一部分特征根无需单独研制算法和程序,利用已有的求解平面断裂问题特征根的程序<sup>[6,7,9,10]</sup>就可,只是将求解平面断裂问题特征根程序中的参数  $\bar{D}$  用板的抗弯刚度  $D$  代替即可.

### 2.2 反平面问题基本方程及其比拟

如图 1 所示,若为多 ( $N$ ) 种材料反平面应力切口断裂问题,熟知平面断裂问题的特征根  $\lambda$  对应的 Williams 展开项为

$$w = r f(\cdot) \quad (15)$$

则位移与应力的关系为

$$\tau_z = G w_{,r}, \quad z = \frac{1}{r} G w. \quad (16)$$

存在如下比拟关系

$$\begin{cases} C \sim G, & c_0 \sim f \\ \bar{w}_0 \sim w \\ \bar{Q}_{r,0} \sim \tau_z, & \bar{Q}_0 \sim z \end{cases} \quad (17)$$

所以对 Reissner 型板的第二部分特征根同样无需单独研制算法和程序,利用已有的求解反平面断裂问题特征根的程序<sup>[8-10]</sup>就可,只是将求解反平面断裂问题特征根程序中的参数  $G$  用板的抗剪刚度  $C$  代替即可.

对于两切口边界为应力自由边的单材料 Reissner 型板切口问题,由于基本方程和边界条件中均将材料参数约掉而特征根与材料参数无关,所以两切口边界为应力自由边的单材料 Reissner 型板切口问题的特征根与两切口边界为应力自由边的单材料反平面切口问题和平面切口问题的特征根完全相同<sup>[9,10]</sup>.

### 3 数值算例

考虑两切口边界均为应力自由边的单材料切口问题的特征根

对于单材料反平面切口问题其特征方程为

$$\sin \lambda = 0 \quad (18)$$

对于单材料平面切口问题,其特征方程为

$$\sin^2(\lambda) - \tau^2 \sin^2(\lambda) = 0 \quad (19)$$

对于单材料 Reissner 型板切口问题,其特征方程为

$$(\sin^2 \lambda - \tau^2 \sin^2 \lambda) \sin \lambda = 0 \quad (20)$$

从上式也可以看出,单材料 Reissner 型板切口问题其特征方程包含了反平面切口问题的特征方程和平面切口问题的特征方程两部分.将单材料  $\tau = 1$  和  $\tau = 2$  两种特殊情况下的特征根归纳为表 1.

表 1 单材料反平面、平面、Reissner 型板切口问题特征根

| 反平面<br>问题 | 平面问题          | Reissner<br>型板                          | 备注                |
|-----------|---------------|---|-------------------|
| $i$       | $i, i$        | $i, i, i$                               | $i = 1, 2, \dots$ |
| 2         | $\frac{i}{2}$ | $\frac{i}{2}, \frac{i}{2}, \frac{i}{2}$ | $i = 1, 2, \dots$ |

### 4 结论

本文从 Reissner 型平板的基本方程出发推证了对任意多材料、任意切口张角、任意切口边界条件的特征根等价于类似反平面切口问题和与类似平面切口问题两部分的特征根叠加,故可直接调用已有的求解反平面切口问题特征根求解程序和平面切口问题特征根求解程序分别求解,而后迭加得 Reissner 型板的特征根序列,只是输入材料参数不同而已.

### 参 考 文 献

- 1 柳春图. 承受弯曲的板在裂纹顶端附近的应力和变形. 固体力学学报, 1983, 3: 441 ~ 448
- 2 李英治, 柳春图. Reissner 型平板弯曲断裂问题分析. 力学学报, 1983, 4: 366 ~ 375
- 3 柳春图, 李英治. Reissner 型板裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算. 力学学报, 1984, 15(4): 351 ~ 362
- 4 柳春图, 张瑞重. Reissner 型板中应力强度因子的近似方程和近似计算. 力学学报, 1988, 20(6): 515 ~ 521.
- 5 钱俊. 切口尖端应力应变场与分区混合有限元法计算切口应力强度因子. 清华大学工学博士学位论文, 1990
- 6 Xu Yongjun, Yuan Si. Complete eigen solutions for plane notches with multi-materials by the imbedding method. International Journal of Fracture, 1996, 81: 373 ~ 381
- 7 徐永君, 袁骊. 断裂问题的特征根区间及其二分迭代求解. 工程力学, 1996, 13(4): 28 ~ 40
- 8 袁骊, 徐永君. 嵌入法和 Müller 法联合求解断裂问题特征根的完备解. 计算力学学报, 1997, 14(增): 639 ~ 642
- 9 徐永君, 袁骊. 多材料反平面断裂问题特征根的超逆幂迭代求解. 固体力学学报, 1997, 18(4): 290 ~ 294
- 10 Xu Yongjun, Yuan Si. Complete eigen solutions for anti-plane notches with multi-materials by super-inverse iteration. Acta Mechanica Solida Sinica, 1997, 10(2): 157 ~ 166

11 徐永君. 断裂问题特征根的完备求解和基于有限元线法的应力强度因子计算. 清华大学博士学位论文, 1996

## EIGEN PROBLEM IN FRACTURE MECHANICS FOR A REISSNER PLATE

Xu Yongjun

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080*)

**Abstract** The expanding form of stresses and deformation near a crack tip as in the literature is extended to a general case, i. e., the Reissner plate crack/notches with multi-materials, arbitrary opening angles and various surface conditions. It is shown that the Reissner plate eigen problem is equivalent to a combination form of a plane problem and an anti-plane problem.

**Key words** Reissner plate, plane problem, anti-plane problem, eigenvalue, fracture mechanics