第 32 卷 第 1 期 力 学 学 报 Vol. 32, No.1
2000 年 1 月 ACTA MECHANICA SINICA Jan., 2000

# 一种快速逼近 Fourier 级数和的实用算子

俞慧丹
(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室，北京 100080;
浙江师范大学物理系，金华 321004)
韩 臻
(北方交通大学计算机系，北京 100044)

**摘要** 采用逐次平均方法，构造一种快速逼近 Fourier 级数和的实用算子 (逐次平均算子)，用这种算子来取代 Fourier 级数无穷项求和，具有误差小，收敛速度快的功能. 与 Fejer 算子比，它的逼近性要好得多；与 Korbin 算子比，它更易于实用. 理论证明其一般性. 计算著名的 Saffman-Taylor 粘性指进问题时应用逐次平均算子，既不产生大的截断误差，又能避免高频振荡而使计算过程稳定，得到很好的结果.

**关键词** 逐次平均算子，连续模，收敛性

## 引 言

动力学结构的生成和演化是非线性科学中最引人注目的现象之一，斑图生成问题在流体动力学系统中具有普遍性. 一般只有极少数非线性动力学方程能在某些非常特殊的条件下有解析解，许多有意义的流动特性需要通过数值计算来刻画. 近三十年来，计算机业的突飞猛进极大地提高了数值求解非线性偏微分方程的可能性和有效性，尤其对于一维，二维运动系统，其众多的非线性现象可以通过适当的计算技术来描写.

求解非线性流体动力学方程时，常常会碰到无穷级数求和的问题，数值计算时需要有合适的算子来逼近它.

1956 年 L.V. Ahlfors 给出的泊松定理 [1] 对研究两相平面流动分界面的运动情况有优越性，它通过保形变换，利用 Fourier 级数巧妙地把分界面和流场建立对应关系，使得有可能不涉及分界面的复杂性，仅通过流场内的流动特性来建立界面随时间变化的动力学方程，大大简化了运动模型，已经成为研究粘性指进 [2] 问题的主要研究方法 [3]. 数值计算由泊松定理得到的动力学方程会涉及 Fourier 级数求和问题. 由于在数值计算中无穷级数和只能被截断为有限项之和，因此不可避免地出现精确性和稳定性的冲突：如果截断项数 $N$ 小，就会造成大的截断误差；但若截断项数 $N$ 大， Fourier 级数引入高频振荡将导致非线性不稳定而使计算崩溃. 因此需要寻找合适的逼近算子来取代 Fourier 级数求和，以调和这一对矛盾.

数学上常用 Fejer 算子和 Korbin 算子逼近无穷 Fourier 级数和. Fejer 算子简单易操作，但是收敛速度很慢； Korbin 算子逼近性质虽好，但需要满足一定的条件，实际应用很难. 本文采用逐次平均方法，构造一种新型的逼近算子取代 Fourier 级数无限项求和，理论证明其快速收敛性. 我们用这种新型算子来计算著名的 Saffman-Taylor 粘性指进问题，既不产生大的截断

1998-05-13 收到第一稿， 1999-05-04 收到修改稿.

误差，又能避免高频振荡而使计算过程稳定，取得很好的效果；与 Fejer 算子进行计算对比，说明这种新型算子的优越性和实用性.

## 1 逐次平均逼近算子

设 $g(\psi) \in C[0, 2\pi]$, $\omega(\delta)$ 是 $g(\psi)$ 的连续模. 令 $g(\psi)$ 的 Fourier 部分和为

$$S_N(g, \psi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi) \tag{1}$$

其中

$$A_N = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\psi)\cos n\psi \mathrm{d}\psi \tag{2.1}$$

$$B_N = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\psi)\sin n\psi \mathrm{d}\psi \tag{2.2}$$

一般情况下， $S_N(g, \psi)$ 不一定能逼近 $g(\psi)$, 特别是当 $g(\psi)$ 的光滑性较差时， $S_N(g, \psi)$ 常常不能收敛到 $g(\psi)$ 或者收敛很慢.

Fejer 引进 Fejer 算子

$$F_N(g, \psi) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(g, \psi) \tag{3}$$

满足

$$|F_N(g, \psi) - g(\psi)| \le \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\omega(N^{-\frac{1}{2}}) \tag{4}$$

保证了 $F_N(g, \psi)$ 收敛到 $g(\psi)$, 但收敛速度不够快，只有 $\omega(N^{-\frac{1}{2}})$ 阶.

Korbkin 给出一种逼近性质要好得多的算子 ——Korbkin 算子

$$\sigma_N(g, \psi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \rho_n^{(N)}(A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi) \tag{5}$$

其中数组 $\rho_n^{(N)}$ $(N = 1, 2, \cdots; n = 1, 2, \cdots, N)$ 满足条件

$$\lim_{N\to\infty} \rho_1^{(N)} = 1 \tag{6.1}$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \rho_n^{(N)} \cos n\psi \ge 0, \quad \forall \psi \in [0, 2\pi] \tag{6.2}$$

并证明了

$$|\sigma_N(g, \psi) - g(\psi)| \le \omega(\delta)\left(1 + \frac{\pi}{\delta\sqrt{2}}\right)\sqrt{1 - \rho_1^{(N)}}\Big) \tag{7}$$

其中 $\delta > 0$ 为某个数, 可以看出其收敛阶是 $\omega(\delta)$, 而 $\delta \sim (\rho_1^{(N)} - 1$ 的阶数的开方). 要构造满足条件 (i), (ii) 且达到较大收敛阶的数组 $\rho_n^{(N)}$ 不是一件容易的事, 所以 Korbkin 算子的实用性差.

这里我们采用逐次平均方法，构造一种新的逼近算子，这种算子对于光滑性比较差的函数有较好的收敛效果，实用性好.

对 $S_N(g,\psi)$ 逐次平均

$$S_N^{(1)}(g,\psi)=\frac{1}{2}[S_N(g,\psi)+S_{N-1}(g,\psi)]$$

$$S_N^{(2)}(g,\psi)=\frac{1}{2}[S_N^{(1)}(g,\psi)+S_{N-1}^{(1)}(g,\psi)]$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_N^{(N)}(g,\psi)=\frac{1}{2}[S_N^{(N-1)}(g,\psi)+S_{N-1}^{(N-1)}(g,\psi)]$$

定义逐次平均逼近算子

$$V_N(g,\psi)=S_N^{(N)}(g,\psi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\rho_n^{(N)}(A_n\cos n\psi+B_n\sin n\psi) \tag{8}$$

其中

$$\rho_n^{(N)}=\frac{1}{2^N}\sum_{i=n}^{N}c_N^i,\quad c_N^i=\frac{N!}{i!(N-i)!} \tag{9.1}$$

$$\rho_1^{(N)}=\frac{2^N-1}{2^N}=1-\frac{1}{2^N} \tag{9.2}$$

因为 $\rho_1^{(N)}$ 逼近 1 的阶数为 $\frac{1}{2^N}$，是指数逼近，但 $\rho_n^{(N)}$ 不满足 Korbkin 条件 (ii)，所以逐次平均逼近算子不是 Korbkin 算子.

## 2 收敛性证明

$g(\psi)$ 的 Fourier 级数的部分和 $S_N(g,\psi)$ 可写成积分形式

$$S_N(g,\psi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos n(t-\psi)\right]\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[g(\psi+2t)+g(\psi-2t)]\frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t \tag{10}$$

从而

$$S_N^{(1)}(g,\psi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[g(\psi+2t)+g(\psi-2t)]\cos t\frac{\sin 2Nt}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$S_N^{(2)}(g,\psi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[g(\psi+2t)+g(\psi-2t)]\cos^2 t\frac{\sin(2N-1)t}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$\cdots\cdots$$

$$V_N(g,\psi)=S_N^{(N)}(g,\psi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[g(\psi+2t)+g(\psi-2t)]\cos^N t\frac{\sin(N+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t \tag{11}$$

记误差为

$$E_N(g,\psi)=V_N(g,\psi)-g(\psi)=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[g(\psi+2t)+g(\psi-2t)-g(\psi)]\cos^N t\frac{\sin(N+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t \tag{12}$$

令 $I_N=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^N\psi\mathrm{d}\psi$, 则 $I_N^2\le\frac{\pi}{2n}$. 任取正数 $\delta$, 有

$$\int_0^{\frac{\delta}{2}}\cos^N\psi\mathrm{d}\psi\le\sin\frac{\delta}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2N}}$$

令

$$\Delta_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\delta}{2}}[g(\psi+2t)+g(\psi-2t)-2g(\psi)]\cos^N t\frac{\sin(N+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t \tag{13}$$

$$\Delta_2=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[g(\psi+2t)+g(\psi-2t)-2g(\psi)]\cos^N t\frac{\sin(N+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t \tag{14}$$

则 $E_N=\Delta_1+\Delta_2$.

进一步地,

$$|\Delta_1|\le\frac{2\omega(\delta)}{\pi}(N+1)\sin\frac{\delta}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2N}}\le c_1\delta\sqrt{N}\omega(\delta) \tag{15}$$

$$|\Delta_2|\le\frac{2\omega(\delta)}{\pi\sin\frac{\delta}{2}}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^N t\mathrm{d}t\le\frac{2\omega(\pi)}{\pi\sin\frac{\delta}{2}}\cos^{\frac{N}{2}}\frac{\delta}{2}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{N}{2}}t\mathrm{d}t\le\frac{c_2}{\delta\sqrt{N}}(1-\delta^2)^{\frac{N}{4}} \tag{16}$$

其中 $c_1$, $c_2$ 是与 $\delta$, $N$, $g(\psi)$ 无关的正常数.

于是有

$$|E_N(g,\psi)|\le c_1\delta\sqrt{N}\omega(\delta)+\frac{c_2}{\delta\sqrt{N}}(1-\delta^2)^{\frac{N}{4}} \tag{17}$$

若 $\theta=\delta\sqrt{N}\omega^{\frac{1}{2}}(\delta)$ 为取定正常数，则有

$$|E_N(g,\psi)|\le c_1\theta\omega^{\frac{1}{2}}(\delta)+\frac{c_2}{\theta}\omega^{\frac{1}{2}}(\delta)\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4\omega(\delta)}} \tag{18}$$

从而当 $\delta\to0$ 或 $n\to\infty$ 时， $|E_N(g,\psi)|\to0$.

从估计式可以看出,误差分为两部分,前一部分的大小由函数的连续模及所选常数 $\theta$ 确定;而后一部分在 $\theta$ 确定后是关于 $\delta\to0$ 或 $n\to\infty$ 按指数衰减，收敛速度很快. 因此 $S_N(g,\psi)\to g(\psi)$ 的速度相当快.

另外，可以取 $\theta=\theta_0\omega^{\alpha}(\delta)$, 其中 $\theta_0$ 为常数，正常数 $\alpha<\frac{1}{2}$ 时

$$|E_N(g,\psi)|\le c_1\theta_0\omega^{\frac{1}{2}+\alpha}(\delta)+\frac{c_2}{\theta_0}\omega^{\frac{1}{2}-\alpha}(\delta)\mathrm{e}^{-\frac{\theta_0^2}{4\omega^{1-2\alpha}(\delta)}}=c_1\theta_0\omega^{1-\beta}(\delta)+\frac{c_2}{\theta_0}\omega^{\beta}(\delta)\mathrm{e}^{-\frac{\theta_0^2}{4\omega^{2\beta}(\delta)}} \tag{19}$$

其中 $0<\beta=\frac{1}{2}-\alpha<\frac{1}{2}$.

## 3 算例：非奇性 Saffman-Taylor 指的演化

Hele-shaw 盒 [4] 中的粘性流动无论在理论上还是实验上都相对简单，是许多复杂斑图动力学过程的范例. 当粘性较大流体在两块靠得很近的平行板中间被小粘性流体驱动，两种流体的分界面按类似于手指的形状生长演化 (简称粘性指进). 界面的图样和稳定性取决于流体的粘滞程度和流速大小. 1958 年 Saffman-Taylor[2] 不计表面张力，在理论上给出一组单参数解析解并在实验中找到对应某一参数的指头以后，很多学者注意到并从理论，实验，数值计算各个角度研究这一在石油二次开采中有着可预期的应用前景的二维流动 [5~7], 得到了许多有意义的结果. Bensimon 引入泊松定理，利用保形变换，建立指演化方程 [2], 但是由于 Bensimon 方程高度非线性化，计算过程中引入的任何微小误差都会被迅速放大而导致计算发散，而方程中涉及的 Fourier 无穷级数求和不可避免地会引入截断误差，因此不容易得到指的长时间演化. 利用本文提出的新型逼近算子，可以非常稳定地计算 Bensimon 方程，观察长时间的粘性指进过程.

如图 1, 以 Hele-shaw 盒流道的对称轴为 $x$ 轴，垂直于流道为 $y$ 轴，建立直角坐标系. 假定盒宽 $2\pi$, 无穷远流体流速为 1.

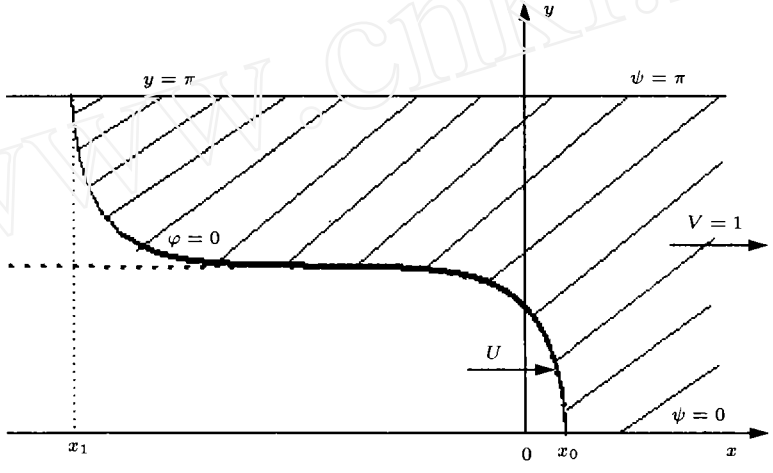


图 1
Fig.1

令 $z = x + \mathrm{i}y$, $\Phi = \varphi + \mathrm{i}\psi$, 其中 $\varphi$ 和 $\psi$ 分别表示速度势和流函数. 在不计表面张力时，界面处 $\varphi = 0$. 把流场保型变换至复平面 $\zeta = \mathrm{e}^{-\Phi}$, 圆周 $\zeta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}$ 对应于指形界面，则指形界面的演化方程 [2] 为

$$\partial_t Z = -\left(2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin n\psi) + \mathrm{i}g(\psi)\right)\partial_\psi Z \tag{20}$$

其中

$$g(\psi) = \frac{1}{(\partial_\psi y)^2 + (\partial_\psi x)^2}, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{g(\psi)}{2}\cos n\psi \mathrm{d}\psi \tag{21}$$

非奇性 Saffman-Taylor 指 [8]

$$z = 2(1-\lambda)\ln\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi} + 1 + \varepsilon) + \mathrm{i}\psi \tag{22}$$

其中 $\varepsilon$ 是一个正实数修正量，单参量 $\lambda$ 表示 $\varepsilon=0$ 时指宽对平行板宽之比，我们以 (22) 为初始条件求解方程 (20), 以得到非奇性 Saffman-Taylor 指随时间的演化规律.

在数值计算 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin n\psi)$ 时无穷级数和只能被截断为有限项之和 $\sum_{n=1}^{N}(a_n \sin n\psi)$, 计算表明如果截断项数 $N$ 小，就会造成大的截断误差；但若截断项数 $N$ 大，Fourier 级数引入高频振荡导致非线性不稳定而使计算崩溃. 为此，我们引入逐次平均算子 (9.1), 于是有

$$\sum_{n=1}^{N}(a_n \sin n\psi)=\sum_{n=1}^{N}\left(\rho_n^{(N)} a_n \sin n\psi\right) \tag{23}$$

为了最大程度地减少高频影响和减少截断误差，我们取 $N=7$, 并取 $\varepsilon=0.2$, $\lambda=0.5$ 迭代近 20000 步，得到图 2 所示的稳定的演化结果. 用 Fejer 算子代替逐次平均算子重新计算，结果是取 $N=7$, 迭代近 100 步崩溃；取 $N=70$, 迭代近 1000 步崩溃.

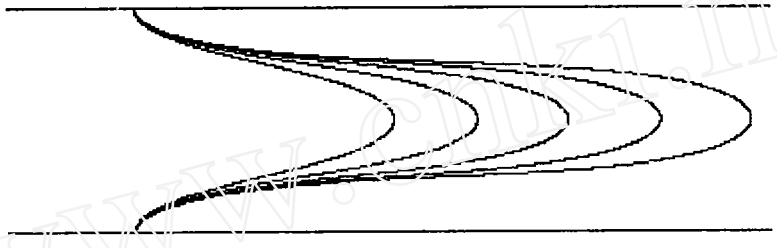

图 2
Fig.2

## 参　考　文　献


1 Ahlfors LV. Complex Analysis. New York: McGraw-Hill, 1953

2 Saffman PG, Taylor GI. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc Roy Soc, London Ser A,* 1958, 245: 312~329

3 Bensimon D. Stability of viscous fingering. *Phys Rev A,* 1986, 33: 1302~1308

4 Hele-shaw HJS. The flow of water. *Nature,* 1898, 58: 34~36

5 Wooding RA, Morel-Seytoux HJ. Multiphase fluid flow through porous media. *Annu Rev Fluid Mech,* 1976, 8: 233~274

6 Bender CM, Orszag SA. Advanced Mathematical Methods for Scienti Saffman-Taylors and Engineers. New York: McGraw-Hill, 1978

7 Mclean JW, Saffman PG. The effect of surface-tension on the shape of fingers in a Hele-Shaw cell. *J Geophys Res,* 1972, 65: 3739~3758

8 Zhao Kaihua, Yu Huidan. Nonsingular Saffman-Taylor finger. *Communication in Nonlinear Science Numerical Simulation,* 1997, 2(1): 12~16

# A PRACTICAL OPERATOR TO FAST APPROACH FOURIER SERIES SUM

Yu Huidan

(*LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China; Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua* 321004, *China*)

Han Zhen

(*Computer Department, Northern Jiaotong University, Beijing* 100044, *China*)

**Abstract** In this paper, we present a practical operator (Successive Averaging Approximating Operator) to fast approach Fourier series sum. Summing a finite number of items in an infinite Fourier series expanded from a function is a normal but useful computational method. Anyway, when we sum a Fourier series, there always exists a conflict between accuracy and instability: in order to reduce the residual error the number of items $N$ in the Fourier series should be as large as possible. However, large $N$ will introduce high frequency trigonometric functions which always make numerical computation unstable even collapsing. Traditionally Fejer introduced an operator but still with low convergence rate. Another approach is Korbkin operator which has a much better approximation but is difficult to construct. By using Successive Averaging Approximating Operator to calculate the famous Saffman-Taylor finger , we reduce the residual errors to a very low level, making the computation possible and enhancing the calculating speed greatly,which is much better than using Fejer Operator, and get very good solution. The generality of Successive Averaging Operator is proved theoretically.

**Key words** successive averaging approximating operator, continuous modulus, convergence

Received 13 May 1998, revised 4 May 1999.