Bingham 体的连续流和阵性流研究中无量纲参数讨论

刘大有[1], 段新平[1], 章书成[2], 余斌[2]
(1. 中国科学院 力学研究所,北京 100081; 2. 中国科学院 成都山地灾害与环境研究所,四川 成都 610041)

摘要:本文首先对轴对称管流、二维管流和明渠连续流研究中无量纲参数的选择进行评述,通过对这些有分析解的流动的讨论,说明采用无量纲表达式的优点、无量纲方法的多样性,以及适当选择基本量的重要性。最后讨论了 Bingham 体阵性流研究中基本量的合理选择。

关键词: 无量纲参数; Bingham 体; 连续流; 阵性流
中图分类号:O303 **文献标识码**:A **文章编号**:0468-155X(2001)01-0016-07

1 引言

高含沙水流、泥石流中的浆体、工业中的水煤浆和其它许多化工原料的流变性质,都接近于 Bingham 体,它们都有显著的屈服应力 τ_0 和较大的粘度 μ_0(又称刚度系数 η)。

近年来,人们针对一些典型流型(如二维明渠流动、二维管流和轴对称管流等)对 Bingham 体的阻力已有很多研究,还引入了各种无量纲参数进行讨论,例如,Reynolds 数 Re、Hedstrom 数 He 和阻力系数 f 等。根据实际的重要性,人们主要研究层流运动,但也有一些论文讨论了 Bingham 体的紊流阻力。

本文在一些典型连续流阻力研究的基础上,对无量纲参数的选择进行了讨论,并在此基础上研究了 Bingham 体阵性流的无量纲表示和独立无量纲量的个数。

基于以下几点考虑,本文不讨论 Bingham 体的紊流运动。

1. Bingham 体与牛顿体的差异仅在于是否存在屈服应力。如果流场中平均应力水平较高,远大于屈服应力,那么屈服应力的存在与否对流动的影响就比较小,就可以用牛顿体代替。事实上,许多介质也并非理想的 Bingham 体,当平均应力水平较高时,Bingham 体近似未必比牛顿体近似更优越。当流动进入紊流区时,应力水平往往已很高,失去了当作 Bingham 体研究的必要性;

2. 当流动进入紊流区时,总有一定强度的紊流脉动,而 Bingham 体运动的重要特征是有流核存在。当有紊流脉动时是否还有流核?流核中是否有紊流脉动?流核如何影响紊流脉动?都是远没有研究清楚的问题;

3. 高粘度介质在较高速度下运动时,有很大的机械能损失,它需要很大的功率输入,同时产生大量的热,这些热会显著改变介质的流变性质。

2 几种定常连续流的流速与阻力

2.1 定常、轴对称管流

下面先用量纲理论对定常($\partial/\partial t = 0$)、轴对称($\partial/\partial\phi = 0$,分速度 $w = 0$)、充分发展的管流($\partial/\partial x = 0$)进行分析。根据定性分析可知:流量 $\dot{Q}$ 和平均速度 U 依赖于负压梯度($-\partial p/\partial x$,以下简写为 P)、管径 D、介质密度 ρ、屈服应力 τ_0 和粘性系数 μ_0

基金项目:国家自然科学基金(49771003)和中国科学院"特别支持领域—山地灾害—泥石流与滑坡"的资助。
作者简介:刘大有(1939-),男,中科院力学所研究员。

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\dot{Q} = \pi D^2 U/4 = \xi(P, D, \rho, \tau_0, \mu_0) \tag{1}$$

对长度为 Δx 的一段管子所作的力平衡分析可得到壁面摩阻 τ_w 的表达式

$$\pi D\tau_w = \pi D^2 P/4, \quad \tau_w = DP/4 \tag{2}$$

如选 D、ρ 和 τ_0 作为基本量，它们的值分别作为长度、密度和应力的单位（基本量度单位），则时间、速度、加速度、粘性系数和压强梯度的单位分别为 $(D\rho^{1/2}\tau_0^{-1/2})$、$(\rho^{-1/2}\tau_0^{1/2})$、$(D^{-1}\rho^{-1}\tau_0)$、$(D\rho^{1/2}\tau_0^{1/2})$ 和 $(D^{-1}\tau_0)$，无量纲的流量 $[\dot{Q}]$、平均速度 $[U]$、负压梯度 $[P]$、壁面摩阻 $[\tau_w]$ 和粘性系数 $[\mu_0]$ 分别定义为

$$[\dot{Q}] \overset{\Delta}{=} \frac{\dot{Q}}{\pi}\frac{\rho^{1/2}}{D^2\tau_0^{1/2}} = \frac{1}{4}\frac{U\rho^{1/2}}{\tau_0^{1/2}} \overset{\Delta}{=} \frac{1}{4}[U], [P] \overset{\Delta}{=} \frac{PD}{\tau_0} = \frac{4\tau_w}{\tau_0} \overset{\Delta}{=} 4[\tau_w], [\mu_0] \overset{\Delta}{=} \frac{\mu_0}{D\rho^{1/2}\tau_0^{1/2}} \tag{3}$$

这时，式(1)可表示为[1]

$$4[\dot{Q}] = [U] = (4/\pi)\xi([P], 1, 1, 1, [\mu_0]) \overset{\Delta}{=} \zeta([P], [\mu_0]) \tag{4}$$

量纲分析可以将依赖于五个参数的函数 ξ 简化为依赖于两个无量纲量的函数 ζ，但是，它给不出该函数的具体形式。量纲分析方法是通用的，它能有效地减少未知函数中独立参数的个数，而未知函数具体形式的寻找，则只能具体问题具体分析了。可以利用该问题的相关理论进行分析求解，也可采用经验的方法。例如，对于牛顿流体，如果人们已知，流量与粘性系数成反比、与负压梯度成正比，就可显著简化该函数：$\zeta([P], [\mu_0]) = C[P]/[\mu_0]$，其中 C 是一待定常数。对于 Bingham 体，虽然流量与负压梯度不再成正比，但仍与粘性系数成反比，所以函数 ζ 仍可得到适度地简化：$\zeta = \psi([P])/[\mu_0]$，其中 ψ 是一未知的单变量函数，它仍要用实验方法或理论方法来确定。但是它比确定双变量函数 ζ 简单得多。下面采用流体力学方法求解函数 ψ（或者说 ζ）。

对于定常、轴对称管流，轴向（x 方向）动量方程可简化为（τ_{rx} 为粘性应力）

$$r^{-1}\partial(r\tau_{rx})/\partial r + P = 0 \tag{5}$$

解方程得到

$$\tau_0 - \mu_0\partial u/\partial r \geq -\tau_{rx}(r) = rP/2 \tag{6}$$

$$u(r) = \begin{cases} P(D-2r)(D-4r_{cr}+2r)/(16\mu_0) & 0.5D \geq r > r_{cr} \\ P(D-2r_{cr})^2/(16\mu_0) & r_{cr} \geq r \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$r_{cr} = \begin{cases} 0.5D\tau_0/\tau_w = 2\tau_0/P & P \geq 4\tau_0/D \\ 0.5D & P < 4\tau_0/D \end{cases} \tag{8}$$

$$\dot{Q} = \frac{\pi D^2 U}{4} = \frac{\pi D^4 P}{128\mu_0}\left(1 - \frac{2r_{cr}}{D}\right)^2\left[1 + \frac{4}{3}\frac{r_{cr}}{D} + \frac{1}{3}\left(\frac{2r_{cr}}{D}\right)^2\right] \tag{9}$$

这就是著名的 Buckingham 方程[2]，其中 r_{cr} 是流核半径，它们的无量纲形式分别为

$$[2r_{cr}] \overset{\Delta}{=} \frac{2r_{cr}}{D} = \begin{cases} \tau_0/\tau_w = [\tau_w]^{-1} = 4/[P] & [P] \geq 4 \\ 1 & [P] < 4 \end{cases} \tag{10}$$

$$4[\dot{Q}] = [U] = \begin{cases} \dfrac{[P]}{32[\mu_0]}\left\{1 - \dfrac{4}{[P]}\right\}^2\left\{1 + \dfrac{8}{3[P]} + \dfrac{16}{3[P]^2}\right\} & [P] \geq 4 \\ 0 & [P] < 4 \end{cases} \tag{11}$$

以上采用流体力学方法给出了函数 $\psi([P])$ 和 $\zeta([P], [\mu_0])$ 的具体形式，即式(11)的右边。图 1(a) 给出了轴对称管流的 $([\mu_0][U]) \sim [P]$ 曲线。

无量纲方法不是唯一的，例如，人们也可选 μ_0、ρ 和 τ_0 作为基本量，它们的值分别作为粘性系数、密度和应力的单位，则时间、长度、速度、加速度和压强梯度的单位分别为 $(\mu_0\tau_0^{-1})$、$(\mu_0\rho^{-1/2}\tau_0^{-1/2})$、$(\rho^{-1/2}\tau_0^{1/2})$、$(\mu_0^{-1}\rho^{-1/2}\tau_0^{3/2})$ 和 $(\mu_0^{-1}\rho^{1/2}\tau_0^{3/2})$，无量纲的流量 $\dot{Q}^*$、平均速度 U^*、压强梯度 P^*、壁面摩阻 τ_w^*、管径 D^*、流核半径 r_{cr}^* 和 Reynolds 数 Re 分别定义为

$$\dot{Q}^* \overset{\Delta}{=} \frac{\dot{Q}}{\pi}\frac{\rho^{3/2}\tau_0^{1/2}}{\mu_0^2} = \frac{1}{4}\frac{D^2\rho\tau_0}{\mu_0^2}\frac{U\rho^{1/2}}{\tau_0^{1/2}} \overset{\Delta}{=} \frac{1}{4}(D^*)^2 U^* \tag{12}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

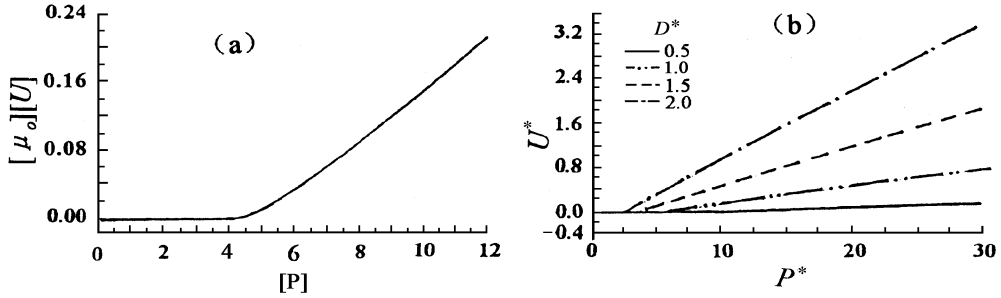

图 1　轴对称管流中无量纲平均流速—压降曲线

Fig. 1　Relationship between the averaged dimensionless velocity and pressure drop in an axisymmetric pipe flow

$$P^* \overset{\Delta}{=} \frac{P\mu_0}{\rho^{1/2}\tau_0^{3/2}} = \frac{4\tau_w}{\tau_0}\Big/\frac{D\rho^{1/2}\tau_0^{1/2}}{\mu_0} = \frac{4\tau_w^*}{D^*} \qquad D^* \overset{\Delta}{=} \frac{D\rho^{1/2}\tau_0^{1/2}}{\mu_0} \tag{13}$$

$$2r_{cr}^* \overset{\Delta}{=} \frac{2r_{cr}\rho^{1/2}\tau_0^{1/2}}{\mu_0} = \begin{cases} D^*/\tau_w^* = 4/P^* & D^*P^* \geq 4 \\ D^* & D^*P^* < 4 \end{cases} \tag{14}$$

$$Re \overset{\Delta}{=} DU\rho/\mu_0 = D^*P^* = [U]/[\mu_0] \tag{15}$$

这时 Buckingham 方程(9)的无量纲形式为(参见图 1(b))

$$U^* = \frac{4\dot{Q}^*}{(D^*)^2} \overset{\Delta}{=} \begin{cases} \dfrac{(D^*)^2P^*}{32}\left\{1-\dfrac{4}{D^*P^*}\right\}^2\left\{1+\dfrac{2}{3}\dfrac{4}{D^*P^*}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{D^*P^*}\right)^2\right\} & D^*P^* \geq 4 \\ 0 & D^*P^* < 4 \end{cases} \tag{16}$$

许多文献中引入如下定义的 Hedstzom 数 He 和阻力系数 f

$$He = \frac{D^2\tau_0\rho}{\mu_0^2}, \qquad f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2} \tag{17}$$

并将 Buckingham 方程(9)写成如下的无量纲形式[2,3]

$$\frac{1}{Re} = \frac{f}{16}\left(1-\frac{8}{3}\frac{He}{fRe^2}+\frac{16}{3}\frac{He^4}{f^4Re^8}\right) \tag{18}$$

采用这个公式,由负压梯度 $P(=4\tau_w/D)$ 求平均流速 U 时很不方便,因为在 f 和 Re 中都有未知量 U。为便于求解,有些作者提出忽略式(18)中的高次项,其实完全没必要[24]。本来公式(9)并不复杂,写成(18)那样的无量纲公式是把简单的问题搞复杂了。

引入式(11)和(16)那样的无量纲公式是有意义的,它把公式(1)中涉及很多参量的 U 与 P 之间的函数 ξ,简化为只依赖单参量的 $[U]$ 与 $[P]$(或者 U^* 与 P^*)之间的函数 ψ。这样简化以后就很容易制成图或表,以备查阅。

在引入无量纲量时应注意,不宜选未知量作为基本量,因为它会使许多无量纲量都成为未知量,不利于求解。

2.2　定常、二维管流

对于管高为 $2h$ 的定常、二维、充分发展的管流,用类似的方法可得到如下各式

$$\dot{Q} = 2hU = 2\xi_a(P, h, \rho, \tau_0, \mu_0) \tag{1a}$$

$$2\tau_w = 2hP, \quad \tau_w = hP \tag{2a}$$

$$\partial\tau_{zx}/\partial z + P = 0 \tag{5a}$$

$$\tau_0 - \mu_0\,\partial u/\partial|z| \geqslant -\tau_{zx}(z)|_{=|z|}P \tag{6a}$$

$$u(z) = \begin{cases} P(h-|z|)(h-2z_{cr}+|z|)/(2\mu_0) & h \geqslant |z| > z_{cr} \\ P(h-z_{cr})^2/(2\mu_0) & z_{cr} \geqslant |z| \geq 0 \end{cases} \tag{7a}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$z_{cr} = \begin{cases} h\tau_0/\tau_w = \tau_0/P & P \geq \tau_0/h \\ h & P < \tau_0/h \end{cases} \tag{8}a$$

二维的 Buckingham 方程为[2]

$$\frac{\dot{Q}}{2} = hU = \frac{h^3 P}{3\mu_0}\left(1 - \frac{z_{cr}}{h}\right)^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{z_{cr}}{h}\right) \tag{9}a$$

以 $2h$、ρ 和 τ_0 为基本量,各无量纲量的定义和无量纲的 Buckingham 方程分别为

$$[\dot{Q}] \overset{\Delta}{=} \frac{\dot{Q}\rho^{1/2}}{2h\tau_0^{1/2}} = \frac{U\rho^{1/2}}{\tau_0^{1/2}} \overset{\Delta}{=} [U], \quad [P] \overset{\Delta}{=} \frac{2hP}{\tau_0} = \frac{2\tau_w}{\tau_0} \overset{\Delta}{=} 2[\tau_w], \quad [\mu_0] \overset{\Delta}{=} \frac{\mu_0}{2h\rho^{1/2}\tau_0^{1/2}} \tag{3}a$$

$$[\dot{Q}] = [U] = 2\xi_a([P], 0.5, 1, 1, [\mu_0]) \overset{\Delta}{=} \zeta_a([P], [\mu_0]) \tag{4}a$$

$$[2z_{cr}] \overset{\Delta}{=} \frac{2z_{cr}}{2h} = \begin{cases} \tau_0/\tau_w = [\tau_w]^{-1} = 2/[P] & [P] \geq 2 \\ 1 & [P] < 2 \end{cases} \tag{10}a$$

$$[\dot{Q}] = [U] = \begin{cases} \dfrac{[P]}{12[\mu_0]}\left\{1 - \dfrac{2}{[P]}\right\}^2\left\{1 + \dfrac{1}{[P]}\right\} & [P] \geq 2 \\ 0 & [P] < 2 \end{cases} \tag{11}a$$

如以 μ_0、ρ 和 τ_0 作为基本量,各无量纲量的定义和无量纲的 Buckingham 方程分别为

$$\dot{Q}^* \overset{\Delta}{=} \frac{\dot{Q}\rho}{\mu_0} = \frac{2h\rho^{1/2}\tau_0^{1/2}}{\mu_0}\frac{U\rho^{1/2}}{\tau_0^{1/2}} \overset{\Delta}{=} 2h^* U^* \tag{12}a$$

$$P^* \overset{\Delta}{=} \frac{P\mu_0}{\rho^{1/2}\tau_0^{3/2}} = \frac{\tau_w}{\tau_0}\Big/\frac{h\rho^{1/2}\tau_0^{1/2}}{\mu_0} = \frac{\tau_w^*}{h^*}, \quad h^* \overset{\Delta}{=} \frac{h\rho^{1/2}\tau_0^{1/2}}{\mu_0} \tag{13}a$$

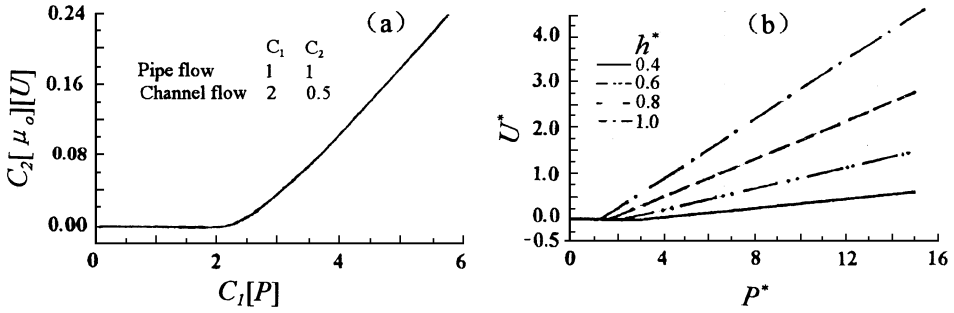

图 2 二维管流(或明渠流)中无量纲流速—压强(或水深)曲线

Fig. 2 Relationship between the dimensionless velocity and pressure drop (or depth) in a 2-D pipe flow (or channel flow)

$$z_{cr}^* \overset{\Delta}{=} \frac{z_{cr}\rho^{1/2}\tau_0^{1/2}}{\mu_0} = \begin{cases} h^*/\tau_w^* = (P^*)^{-1} & h^*P^* \geq 1 \\ h^* & h^*P^* < 1 \end{cases} \tag{14}a$$

$$Re \overset{\Delta}{=} 2hU\rho/\mu_0 = 2h^*U^* = \dot{Q}^* = [\dot{Q}]/[\mu_0] = [U]/[\mu_0] \tag{15}a$$

$$U^* = \begin{cases} \dfrac{(h^*)^2 P^*}{3}\left(1 - \dfrac{1}{h^*P^*}\right)^2\left(1 + \dfrac{1}{2h^*P^*}\right) & h^*P^* \geq 1 \\ 0 & h^*P^* < 1 \end{cases} \tag{16}a$$

用式(11)a 和(16)a 计算的结果分别示于图 2。

如引入下面(17)a 定义的 He 和 f,则无量纲的 Buckingham 方程如式(18)a 所示

$$He = \frac{(2h)^2\tau_0\rho}{\mu_0^2} \qquad f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2} \tag{17}a$$

$$\frac{1}{Re} = \frac{f}{12}\left(1 - \frac{3He}{fRe^2} + \frac{4He^3}{f^3Re^6}\right) \tag{18}a$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2.3 定常二维充分发展的明渠流

定常、二维、充分发展的明渠流的流速分布与定常、二维管流的下半部流动完全一样，但是，这时的驱动力 P 是重力的流向分力，$P=\rho g\sin\vartheta$。依照通常习惯，在二维明渠流研究中，$z=0$ 平面位于床面，因此，只要在式(1)a、(6)a、(7)a 和(9)a 中用 $(h-z)$ 代替 $|z|$，用 τ_{zx} 代替 $|-\tau_{zx}|$，用 $2\dot{Q}$ 代替 $\dot{Q}$，就能得到定常二维充分发展的明渠流相应的公式，式(2)a、(5)a 和(8)a 完全不用改变。

$$\dot{Q}=hU=\xi_b(P,h,\rho,\tau_0,\mu_0) \tag{1}_b$$

$$\tau_0+\mu_0\frac{\partial u}{\partial z}\geq\tau_{zx}(z)=(h-z)P \tag{6}_b$$

$$u(z)=\begin{cases}Pz(h-z_{cr}-0.5z)/\mu_0 & h-z_{cr}>z\geq 0\\ P(h-z_{cr})^2/(2\mu_0) & h\geq z\geq h-z_{cr}\end{cases} \tag{7}_b$$

$$\dot{Q}=hU=\frac{h^3P}{3\mu_0}\left(1-\frac{z_{cr}}{h}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{z_{cr}}{h}\right) \tag{9}_b$$

若以 h、ρ 和 τ_0 为基本量引入无量纲量 $[U]$，$[P]$，$[\mu_0]$，$[r_{cr}]$ 等，则只要用 $2[P]$ 代替 $[P]$、用 $0.5[\mu_0]$ 代替 $[\mu_0]$、用 $[z_{cr}]$ 代替 $[2z_{cr}]$，二维定常管流的无量纲式(10)a 和(11)a 就转换为明渠流各式了，包括图 2(a)。

$$[z_{cr}]\overset{\Delta}{=}\frac{z_{cr}}{h}=\begin{cases}\tau_0/\tau_w=[\tau_w]^{-1}=[P]^{-1} & [P]\geq 1\\ 1 & [P]<1\end{cases} \tag{10}_b$$

$$[\dot{Q}]=[U]=\begin{cases}\dfrac{[P]}{3[\mu_0]}\left\{1-\dfrac{1}{[P]}\right\}^2\left\{1+\dfrac{1}{2[P]}\right\} & [P]\geq 1\\ 0 & [P]<1\end{cases} \tag{11}_a$$

但在明渠流问题中，水深 h 常是未知的，用它作基本量得到的结果不便于使用。如以 μ_0、ρ 和 τ_0 作为基本量引入无量纲量 U^*，P^*，h^*，r_{cr}^* 等，则各无量纲量的定义和无量纲的 Buckingham 方程(13)a～(16)a 仍基本上适用，包括图 2(b)，只是 Reynolds 数的定义和 $\dot{Q}^*\sim U^*$ 关系需改为

$$Re=h\rho U/\mu_0=h^*U^*=\dot{Q}^*=\frac{[\dot{Q}]}{[\mu_0]}=\frac{[U]}{[\mu_0]} \tag{15}_b$$

在明渠流问题中，采用 $P/\rho(=g\sin\vartheta)$、ρ 和 τ_0 作基本量可能更方便，它们分别是加速度、密度和应力的单位，则时间、长度、速度和粘度的单位分别为 $[\rho^{-1/2}\tau_0^{1/2}(g\sin\vartheta)^{-1}]$、$[\rho^{-1}\tau_0(g\sin\vartheta)^{-1}]$、$[\rho^{-1/2}\tau_0^{1/2}]$ 和 $[\rho^{-1/2}\tau_0^{3/2}(g\sin\vartheta)^{-1}]$，无量纲的平均流速 $\langle U\rangle$、水深 $\langle h\rangle$、粘度 $\langle\mu_0\rangle$ 分别定义为

$$\langle U\rangle\overset{\Delta}{=}\frac{U\rho^{1/2}}{\tau_0^{1/2}},\quad \langle h\rangle\overset{\Delta}{=}\frac{h\rho g\sin\vartheta}{\tau_0}=\frac{\tau_w}{\tau_0}\overset{\Delta}{=}\langle\tau_w\rangle,\quad \langle\mu_0\rangle\overset{\Delta}{=}\frac{\mu_0\rho^{1/2}g\sin\vartheta}{\tau_0^{3/2}} \tag{19}$$

$$\langle z_{cr}\rangle\overset{\Delta}{=}\frac{z_{cr}\rho g\sin\vartheta}{\tau_0}=\begin{cases}1 & \langle h\rangle=h\rho g\sin\vartheta/\tau_0\geq 1\\ \langle h\rangle & \langle h\rangle=h\rho g\sin\vartheta/\tau_0<1\end{cases} \tag{20}$$

这时 Buckingham 方程可表示为(见图 3)

$$\langle U\rangle=\begin{cases}\dfrac{\langle h\rangle^2}{3\langle\mu_0\rangle}\left(1-\dfrac{1}{\langle h\rangle}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{2\langle h\rangle}\right) & \langle h\rangle\geq 1\\ 0 & \langle h\rangle<1\end{cases} \tag{21}$$

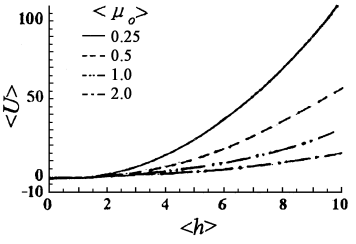

图 3 明渠流中无量纲流速 - 水深曲线

Fig. 3 Relationship between the dimensionless velocity and depth in a open channel flow

如引入如下定义的 Hedstzom 数 He 和阻力系数 f，则相应的 Buckingham 方程如式$(18)_b$ 所示

$$He=\frac{h^2\tau_0\rho}{\mu_0^2},\quad f=\frac{2\tau_w}{\rho U^2} \tag{17}_b$$

$$\frac{1}{Re}=\frac{f}{6}\left(1-\frac{3He}{fRe^2}+\frac{4He^3}{f^3Re^6}\right) \tag{18}_b$$

不论由流速求水深，还是由水深求流速，这个方程都不方便，因为

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

水深 h 和流速 U 在 He, Re 和 f 三个变量中,都至少出现两处。

3 二维、充分发展的阵性流

粘性泥石流运动多呈阵性,这可能与 Bingham 体连续流的运动不稳定性有关[5]。阵性泥石流在干床上运动时,由于它在运动后都会留下一定厚度的残留层(能长时间保持不动),因而运动的介质会越来越少,这就是所谓的"铺床过程"。对于一定的介质,在一定坡度($\tan\vartheta$)的二维渠道内,残留层厚度不可能超过临界值 $z_{cr}(=\tau_0/\rho g\sin\vartheta)$。我们的数值计算表明(另文发表),泥石流通过后留下的残留层一般也不小于临界值,基本上等于临界厚度 z_{cr}。所以,一定量的泥石流体在已铺过床的渠道内运动时(假设原残留层内的介质与运动的介质相同),流体总量基本上不变。这样,如果渠道的几何条件沿程不变,那么泥石流体的运动速度和形态最终将趋于稳定,这就是充分发展的阵性流。如果有一个跟随阵性流一起运动的坐标系,并在该坐标系内考察运动,那么充分发展的阵性流的运动是定常的。

由定性分析可知,充分发展的阵性流的运动速度 U 依赖于介质密度 ρ、屈服应力 τ_0、粘性系数 μ_0、运动介质的(单宽)总量 Q、重力加速度 g 和倾角 ϑ,即

$$U = F(\rho, \tau_0, \mu_0, Q, g, \vartheta) \tag{22}$$

如选 ρ、τ_0 和 g 作为基本量,它们的值分别作为密度、应力和加速度的单位,则时间、长度、速度和粘性系数的单位分别为 $(\rho^{-1/2}\tau_0^{1/2}g^{-1})$、$(\rho^{-1}\tau_0 g^{-1})$、$(\rho^{-1/2}\tau_0^{1/2})$ 和 $(\rho^{-1/2}\tau_0^{3/2}g^{-1})$,无量纲的阵性流速度 $\langle U\rangle$、运动介质总量 $\langle Q\rangle$、粘性系数 $\langle\mu_0\rangle$ 和残留层临界厚度 $\langle z_{cr}\rangle$ 分别定义为

$$\langle U\rangle \overset{\Delta}{=} \frac{U\rho^{1/2}}{\tau_0^{1/2}},\quad \langle Q\rangle \overset{\Delta}{=} \frac{Q\rho^2 g^2}{\tau_0^2},\quad \langle\mu_0\rangle \overset{\Delta}{=} \frac{\mu_0\rho^{1/2}g}{\tau_0^{3/2}},\quad \langle z_{cr}\rangle \overset{\Delta}{=} \frac{z_{cr}\rho g}{\tau_0} = \frac{1}{\sin\vartheta} \tag{23}$$

对于阵性流,可采用如下定义的 Reynolds 数

$$Re \overset{\Delta}{=} \rho U Q^{1/2}/\mu_0 = \langle U\rangle\langle Q\rangle^{1/2}/\langle\mu_0\rangle \tag{24}$$

这时式(22)可简化为[1]

$$\langle U\rangle = F(1, 1, \mu_0^*, Q^*, 1, \vartheta) = \Phi(\mu_0^*, Q^*, \vartheta) \tag{25}$$

函数 Φ 的具体形式需通过求解流体力学方程得到。

在实验室坐标系中,非定常、二维、不可压缩流体(无量纲化的)运动方程为(为书写方便,在本段落中略去了表示无量纲的符号◇)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + \sin\vartheta \tag{27}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} - \cos\vartheta \tag{28}$$

Bingham 体的应力本构关系为[6]

$$\begin{cases} \tau_{ij} = 2e_{ij}(\mu_0 + q^{-1}) & 0.5\tau_{ij}\tau_{ji} > \tau_0^2 = 1 \\ e_{ij}^* = 0 & 0.5\tau_{ij}\tau_{ji} \le \tau_0^2 = 1 \end{cases} \tag{29}$$

其中,应变率 $e_{ij} = 0.5(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$, $q = (2e_{ij}e_{ji})^{1/2}$。由于边界条件都是齐次的,不涉及任何特征量,在此从略;在初始条件中,对充分发展运动状态有影响的仅仅是运动介质的总量 $\langle Q\rangle$,故也不在此详细列出。

与前面研究过的几种连续流不同,阵性流中某些区域(例如龙头区)有显著的垂向(z 向)运动,因而垂向动量方程(28)不能略去。由于垂向动量方程中有因子 $\cos\vartheta$,所以,即使在 $\langle Q\rangle$ 和 $\langle\mu_0\rangle$ 的定义式 $(23)_2$ 和 $(23)_3$ 中采用 $g\sin\vartheta$ 代替 g,方程组(26)～(29)中仍然包含无量纲量 ϑ,不能减少独立无量纲参数的数目。也就是说,在无量纲函数 Φ 中,除在变量 $\langle\mu_0\rangle$ 和 $\langle Q\rangle$ 中含有因子 $\sin\vartheta$ 外,ϑ 还可能以其它方式影响函数 Φ。所以,我们宁愿采用式(23)定义的 $\langle\mu_0\rangle$ 和 $\langle Q\rangle$,Φ 一般说来是 $\langle\mu_0\rangle$、$\langle Q\rangle$ 和 ϑ 三个无量纲变量的函数。虽然还可以采用其它的无量纲量,如 Reynolds 数 Re,Hedstzom 数 He 和阻力系数 f 等,

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

但是,我们推荐采用$\langle\mu_0\rangle$、$\langle Q\rangle$和 ϑ,因为它们分别代表了介质物性,阵性流总量和渠道的几何,都有简明的物理或几何意义。例如,在$\langle\mu_0\rangle$的定义中,除不变的常量 g 以外,都是与介质物理性质有关的量,即密度 ρ、屈服应力 τ_0 和粘度 μ_0。此外,在这些无量纲量的定义中涉及的都是已知量,不包含像运动速度 U 和龙头高度等未知量,使用比较方便。

4 结论

(1) 不论是轴对称管流、二维管流、还是明渠流,都可用 Buckingham 方程(轴对称管流的(9),二维管流的(9)a 和明渠流的(9)$_b$)计算平均流速 U。有多种方法可将 Buckingham 方程变成无量纲形式,例如轴对称流的式(11)、(16)和(18),或二维流动的式(11)a、(16)a 和(18)a,或明渠流的式(11)$_b$、(16)a、(21)和(18)$_b$,使原来有六个变量的关系变成只涉及三个变量之间的关系,便于制成图表。但是,这些无量纲关系使用的方便程度有很大差别,例如,式(18)、(18)a 和(18)$_b$ 中有两个变量涉及未知量 U,(18)$_b$ 中有两个变量涉及水深 h,因而不便于使用。

无量纲化时,一般不选未知量作基本量。在管流研究中,由于管子的特征长度(管径 D 或管高 $2h$)通常已知,所以,可选 D(或 $2h$)、ρ 和 τ_0 作为基本量。

(2) 二维明渠中的连续流与二维管流的下半部流动基本上一致。由于明渠流中的水深 h 常常是未知的,所以,无量纲化时,可选 $g\sin\vartheta$、ρ 和 τ_0 作为基本量。

(3) 对于二维明渠的阵性流,可选 g、ρ 和 τ_0 为基本量,这时,无量纲速度$\langle U\rangle$依赖于$\langle\mu_0\rangle$、$\langle Q\rangle$和 ϑ 三个无量纲变量,其中,$\langle\mu_0\rangle$代表了运动介质物性,$\langle Q\rangle$代表了阵性流总量,而 ϑ 则反映渠道的几何特性,都有简明的物理或几何意义。

参 考 文 献

[1] 谢多夫(Седов, Л И). 力学中的相似方法与量纲理论. 科学出版社,1982(沈青等译).

[2] 钱宁. 高含沙水流运动. 清华大学出版社,1989,第 112 - 113 页.

[3] Chen, C.L., Generalized viscoplastic modeling of debris flow, J. Hydraulic Engineering, ASCE. 114, pp. 237 - 258.

[4] Shamber, D. R. & MacArthur, R. C., One-dimensional model for mudflows, Hydraulics and Hydrology in the Small Computer Age, ASCE. Vol 2, pp. 1334 - 1339.

[5] 王兆印,林秉南,张新玉. 非牛顿体的不稳定流研究. 力学学报,22(3),1991.

[6] 陈文芳. 非牛顿流体力学. 科学出版社,1984.

Discussion on the Dimensionless Parameters in the Investigation of Bingham-Fluid Continual and Intermittent Flow

LIU Da-you[1], DUAN Xin-ping[1], ZHANG Shu-cheng[2], YU Bin[2]

(1. *Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences;*

2. *Institute of Mountain Hazards and Environment, Chinese Academy of Sciences)*

Abstract: In this paper, the comments about the selection of dimensionless parameters in the investigation of axisymmeteric and 2-D pipe flow and continual open channel flow were given. The advantages of the dimensionless expressions, the diversity of the dimensionless method and the importance of the selection of the basic variables were demonstrated by the above flow which have analytical solution. The proper selection of the basic variables in the investigation of the intermittent flow of Bingham-fluid was discussed at last.

Key words: dimensionless parameters; Bingham-fluid; continual flow; intermittent flow

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net