

P III 分布曲线 φ 值表的研究及软件开发

罗才茂 张光平

(重庆交通学院水港工程系 630074)

摘 要

P III 分布曲线的离均系数 φ 值表是 P III 曲线的根本,目前我国所采用的 φ 值表是在较落后计算条件下产生的,本文在利用连分级数及求和级数精确计算 P III 分布积分的基础上,联合牛顿迭代法与弦截矩法,可以很快地在已知 C_s 和频率 P (%) 的情形下迭代求得离均系数 φ 值. 并和英文原版数学手册的有关数值进行了对比,结果完全相符,在此基础上,给出了几个频率 P (0.001~1.0%), C_s 从 0.0~6.5 (间隔 0.1) 的 φ 值表,原 φ 值表与现 φ 值表在频率很小时在小数后面的第二位有差异,本文给出的其对比结果. 作者编制了汉化的软件.

关键词: P III 分布, 连分级数计算, 离均系数 φ 值表, 牛顿迭代法, 弦截矩法

0 前 言

P III 曲线是我国水文统计的主要线型,由于该线型频率分布函数积分的复杂,文 [4] 根据 φ 值的定义,由分布密度函数求近似值,程序复杂,工作量大,耗用计算机时很多. 现国内绘制频率分布曲线几乎用查表法,虽然文 [1] 给出了离均系数 φ 值的插值方法,但如频率 P 也需插值时,精度就会受到影响,本文利用连分式和级数精确求出 P 值 (在给定 C_s^2 和 φ 值),联合牛顿迭代法和弦截矩法求出 φ 值.

由于人工适线误差较大,很多研究人员提出了各种方法来改进人工适线的任意性,例如:文 [7] 的权重矩法,文 [8] 的极大似然法以及文 [9] 的双权积分法等. 在应用这些方法时, C_s 并不会恰是 KP 值表所列的 1.5、2.0、2.5 等倍,无法查用 KP 值表,只有 φ 值表才是最根本的表,它的精确度将直接影响工程设计及造价.

为避免利用积分近似造成程序复杂,本文通过“通用公式”,可以大大提高分布函数的计算速度,程序也得以大大简化,其精度 $< 10^{-10}$ 或更高,计算离均系数表 (频率 32 个, C_s 值步长 0.1, 0.0, 0.2, 0.3, ~6.0) 大约需要 3 分钟时间 (在 386 机运行). 利用本文软件可以看出工作量既小,耗用机时也小,精度又高的特点.

本文收到日期:1995-07-13. 罗才茂,男,29岁,讲师,现于中科院力学所攻读博士学位.

1 数值计算方法

P III 曲线密度函数的数学表达式为^[5]:

$$y = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (x - a_0)^{\alpha-1} e^{-\beta(x-a_0)} \quad (1)$$

式中:

$$\alpha = \frac{4}{C_s^2}; \beta = \frac{2}{C_v C_s x}; a_0 = \frac{C_s - 2C_v}{C_s} x.$$

利用变换 $x = (\varphi C_v + 1) \bar{x}$, 得到理论频率积分^[5]:

$$P = \frac{(2/C_s)^{4/C_s^2}}{\Gamma(4/C_s^2)} \int_{\infty}^{-\infty} (\varphi + \frac{2}{C_s})^{4/C_s^2 - 1} e^{-2(\varphi + 2/C_s)/C_s} d\varphi \quad (2)$$

式中: P ——频率 (或概率); φ ——离均系数, C_s ——偏差系数, C_v ——离差系数, Γ ——伽马函数.

1.1 迭代公式

任一样本的经验频率及相应的值给定以后, 根据 (7)、(8) 式能解出 C_s 、 C_v 及 E_x , 但首先得算出 φ (P_i , C_s), 由 (2) 式的积分, 用牛顿迭代法, 其迭代公式为:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \frac{F(\varphi_n)}{F'(\varphi_n)} \quad (3)$$

式中: (函数 $P(\varphi_n)$) 见式 (2))

$$F(\varphi_n) = -P_i + P(\varphi_n)$$

$$F'(\varphi_n) = -\frac{(2/C_s)^{4/C_s^2}}{\Gamma(4/C_s^2)} (\varphi_n + \frac{2}{C_s})^{4/C_s^2 - 1} e^{-2(\varphi_n + 2/C_s)/C_s}$$

利用弦截矩法, 其公式为:

$$\varphi = \varphi_1 - F(\varphi_1) \times \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{F(\varphi_2) - F(\varphi_1)} \quad (4)$$

1.2 P 啊分布的积分

由于式 (2) 的积分等价于 χ^2 分布的积分, 即

$$P(C_s, \varphi_p) = Q(\chi^2 | \nu) \quad (5)$$

式中: $\nu = 8 / C_s^2$, $\chi^2 = \nu + \sqrt{2\nu} \varphi_p$, 计算 χ^2 分布的积分有通用公式^[3]:

$$Q(\chi^2 | \nu) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\chi^2/2)^{\nu/2+n}}{n! (\nu/2+n)} \quad (6)$$

上式收敛得非常快, 经过本文的计算, 发现在 $C_s < 0.5$ 或 $\varphi_p < C_s/2$ 之后精度达不到要求, 利用连分式公式计算^[3]:

$$Q(\chi^2 | \nu) = \frac{(\chi^2)^{\nu/2} e^{-\chi^2/2}}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \left\{ \frac{1}{\chi^2/2 + 1} \frac{1 - \nu/2}{1 + \frac{1 - \nu/2}{\chi^2/2 + 1}} \frac{1}{\chi^2/2 + 1 + \dots} \right\} \quad (7)$$

通过以上措施, 本文利用牛顿迭代法并辅以弦截矩迭代法求解离均系数 φ 值表, 计算频率为 0.001, 0.01, 0.1, 0.2, 0.333, 0.5, 1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 85, 90, 95, 97, 99 共 25 个, $C_s = 0.0, 0.2 \sim 5.0$ (间隔为 0.1), 所用时间为 2 分钟左右, 计算结果与表的最大误差 $\leq 0.001\%$.

1.3 Γ 函数及 C_s 值很小时的处理

Γ 函数的计算利用 Stirling 公式^[3]:

$z=4/C_s^2$, 当 $20 < z < 130$,

$$\Gamma(z) = e^{-z} z^{z-1/2} (2\pi)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \dots \right] \quad (8)$$

当 $z \geq 130$,

$$\ln \Gamma(z) = \left[z - \frac{1}{2} \ln z - z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \frac{1}{1680z^7} + \dots \right] \quad (9)$$

应特别注意 z 很大时其他中间数值的溢出问题, 本文所编软件成功地解决了该难点.

2 计算步骤

1. 给定统计参数 E_s 、 C_s 、 C_v , 划分频率间隔;
2. 对应于每一频率, 及 C_s 值, 用牛顿迭代法辅以弦截法迭代求出离均系数 φ 值;
3. 利用 $K_p = 1 + C_v \varphi$ 求出相应的 K_p 值.

3 结果分析

本文给出了利用“通用公式”所计算出的频率与数学手册相应结果的比较, 见附表 1. 从结果可以看出二者完全相符, 本文结果小数后面保留 6 位, 手册为 5 位. 本文迭代求得的结果和数学手册也进行了比较, (见附表 2) 有些值相差达 10^{-2} , 由于本文的迭代精度达 10^{-10} , 有理由认为手册结果精度不够, 为了进一步说明本文结果精度的可信度, 将文 [1] 的“真值”与本文所算结果作了对比 (见附表 3), 发现文 [1] 的“真值”在有 * 标记处有差异, 但第 2 位有效数字是完全相同, 只在第 3 位有效数上有差异. 由于本文与原版数学手册在频率计算上完全相符, 且 φ 值迭代精度为 10^{-10} , 本文结果完全满足该精度收敛, 因而本文结果优于“真值”.

附表 4 给出了本文所算结果和文 [5] 表的对比差异, 最大差值为大于 0.02, 误差比较大的情况是: $C_s \leq 2.0$, $P=0.001\%$, $P=0.2\%$, 及 $P=0.333\%$, 在 * * 处同时给出了文 [1] 所列“真值”, 也同样不相符, 也说明原表计算精度的不足.

附表 5 给出了 $P(\%) = 0.001, 0.01, 0.0333, 0.1, 0.2, 0.333, 0.5, 1.0, C_s = 0.0 \sim 6.5$ (间隔 0.1) 的 φ 值表, 保留小数后面 4 位.

本文同时也计算了 K_p 值表, 由于 $C_v = C_s/2, C_s/2.5$ 等, 而 $K_p = 1 + C_v \times \varphi$, 计算结果与《规范》[6] 只有个别地方有差异, 由于篇幅, 本文未给出其对比值表. 最后给出了两条用本文软件绘制的曲线, 见图 1, 2.

4 结 论

本文通过利用级数精确计算 P_{III} 分布积分, 从而给高精度迭代计算 φ 值表奠定了基础. 为了验证本文的正确性, 计算了英文原版的数学手册所列频率, 结果 100% 相符, 并与文 [1] 的真值进行了比较, 结果在某些值小数后面第 3 位有差异, 并与文 [5] 在频率特小时进行了比较, 发现最大差值达 0.02, 说明老 φ 值需要更新, 最后给出了部分 φ 值表.

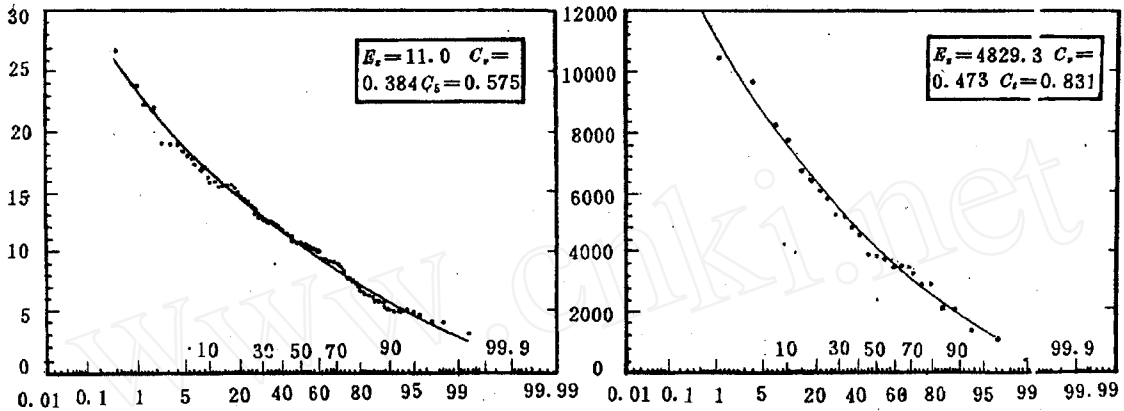


图 1

图 2

参 考 文 献

- 1 杨荣富, 丁晶, 邓育仁. P-III 型 φ 值表的高精度插值. 水文. 1993, 3
- 2 李世才. Γ 分布函数情形 $S(t)$ 曲线通用算法的研究. 水文. 1995, 1
- 3 National Bureau of Standards. Handbook of Mathematical Functions. 1965
- 4 Ji Xuewu, DingJing, et al. Plotting Positions for Pearson Type Three Distribution Journal of Hydrology. Vol. 74, 1984
- 5 詹道江. 工程水文学. 北京: 人民交通出版社, 1988
- 6 交通部公路规划设计院. 公路桥位勘测设计规范 JTJ062-91. 北京: 人民交通出版社, 1992
- 7 宋德敦, 丁晶. 概率权重矩法及其在 P-III 分布中的应用. 水利学报, 1988, 3
- 8 刘治中. 频率计算中参数估计方法对资料的适应性研究. 华东水利学院研究生毕业论文, 1983
- 9 刘光文. 皮尔逊 III 型分布参数估计. 水文, 1990, 4~5

A Study on φ Value Table of P-III Distribution

Luo Caimao Zhang Guangpin

(Department of Harbour and Waterway Engineering)

Abstract

The φ value table of P-III Distribution is significant for plotting the P-III curve. The present φ value table was calculated in 1960, updating it is necessary. Using series formulas instead of integrating method, present method saves a lot of CPU time and the results match the results of Mathematical Handbook. Combining the Newtonian Iteration Method and the interpolation iteration method, the degree of convergence of φ value is 10^{-10} . The present paper gives some differences between the old φ value table and present results. And the Chinese software has been worked out.

Key words: P-III distribution, continued fraction, φ value table, Newtonian iteration, interpolation iteration

附表1 已知 χ^2 和 ν , 频率 P 的计算值与英文原版数学手册值^[3]的对比

ν	$\chi^2=15.500$	16.000	16.500	17.000	17.500	18.000	18.500	19.0
1	0.000083	0.000063	0.0000492	0.000037	0.000029	0.000022	0.000017	0.000013
	0.00008	0.00006	0.00005	0.00004	0.00003	0.00002	0.00002	0.00001
3	0.001436	0.001134	0.000895420	0.000707	0.000558	0.000440	0.000347	0.000273
	0.00144	0.00113	0.00090	0.00071	0.00056	0.00044	0.00035	0.00027
5	0.008427	0.006844	0.005552	0.004500	0.003643	0.002946	0.002381	0.001922
	0.00843	0.00684	0.00555	0.00450	0.00364	0.00295	0.00238	0.00192
7	0.030098	0.025116	0.020921	0.017396	0.014442	0.011970	0.009907	0.008187
	0.03010	0.02512	0.02092	0.01740	0.01444	0.01197	0.00991	0.00819
9	0.078086	0.066882	0.057146	0.048716	0.041438	0.035174	0.029796	0.025193
	0.07809	0.06688	0.05715	0.04872	0.04144	0.03517	0.02980	0.02519
11	0.160731	0.141131	0.123560	0.107876	0.093931	0.081581	0.070681	0.061094
	0.16073	0.14113	0.12356	0.10788	0.09393	0.08158	0.07068	0.06109
13	0.277186	0.249130	0.223180	0.199304	0.177443	0.157519	0.139441	0.123104
	0.27719	0.24913	0.22318	0.19930	0.17744	0.15752	0.13944	0.12310
15	0.416036	0.382052	0.349621	0.318864	0.289863	0.262666	0.237292	0.213734
	0.41604	0.38205	0.34962	0.31886	0.28986	0.26267	0.23729	0.21373
17	0.559515	0.523835	0.488707	0.454366	0.421019	0.388841	0.357974	0.328532
	0.55951	0.52383	0.48871	0.45437	0.42102	0.38884	0.35797	0.32853
19	0.690333	0.657278	0.623701	0.589868	0.556033	0.522438	0.489305	0.456836
	0.69033	0.65728	0.62370	0.58987	0.55603	0.52244	0.48931	0.45684
21	0.797054	0.769651	0.740933	0.711106	0.680388	0.649004	0.617180	0.585140
	0.79705	0.76965	0.74093	0.71111	0.68039	0.64900	0.61718	0.58514
23	0.875823	0.855269	0.833044	0.809252	0.734017	0.757489	0.729832	0.701225
	0.87582	0.85527	0.83304	0.80925	0.78402	0.75749	0.72983	0.70122
25	0.928907	0.914829	0.899124	0.881794	0.862866	0.842391	0.820444	0.797121
	0.92891	0.91483	0.89912	0.88179	0.86287	0.84239	0.82044	0.79712
26	0.947491	0.936203	0.923412	0.909083	0.893201	0.875773	0.856832	0.836430
	0.94749	0.93620	0.92341	0.90908	0.89320	0.87577	0.85683	0.83643
27	0.961819	0.952947	0.942736	0.931122	0.918059	0.903520	0.887496	0.870001
	0.96182	0.95295	0.94274	0.93112	0.91806	0.90352	0.88750	0.87000
28	0.972660	0.965819	0.957823	0.948589	0.938049	0.926149	0.912851	0.898136
	0.97266	0.96582	0.95782	0.94859	0.93805	0.92615	0.91285	0.89814
29	0.980713	0.975536	0.969388	0.962181	0.953833	0.944272	0.933439	0.921288
	0.98071	0.97554	0.96939	0.96218	0.95383	0.94427	0.93344	0.92129

注: 表中有效数为5位是文 [3] 的真值, 有效数为6位的是本文所算结果。

附表 2 已知频率 P 和 v , χ^2 的计算值与英文原版数学手册的对比
(手册值见文献^[3]P. 984~985)

$C.$	v	99.5%	99%	50%	1%	0.1%	0.01%
2.828	1.0	0.00003927	0.00015709	0.45493644	6.63489662	10.82756606	15.13670524
2.000	2.0	0.01002507	0.02010065	1.38629439	9.21034039	13.81551044	18.42068076
1.633	3.0	0.07172173	0.11483173	2.36597392	11.34486675	16.26623607	21.10751349
1.414	4.0	0.20698899	0.29710933	3.35669402	13.27670416	18.46682682	23.51274247
1.265	5.0	0.41174174	0.55429785	4.35146024	15.08627249	20.51500551	25.74483198
1.155	6.0	0.67572655	0.87209002	5.34812068	16.81189385	22.45774434	27.85634126
1.069	7.0	0.98925539	1.23904192	6.34581126	18.47530693	24.32188620	29.87750394
1.000	8.0	1.34441272	1.64649691	7.34412156	20.09023505	26.12448140	31.82762803
0.943	9.0	1.73493248	2.08790020	8.34283276	21.66599436	27.87716471	33.71994847
0.894	10.0	2.15585599	2.55821155	9.34181784	23.20925118	29.58829828	35.56401397
0.853	11.0	2.60322134	3.05348343	10.34099815	24.72497034	31.26413345	37.36698647
0.816	12.0	3.07382303	3.57056823	11.34032246	26.21696733	32.90949024	39.13440391
0.784	13.0	3.56503391	4.10691467	12.33975597	27.68824964	34.52817880	40.87065504
0.756	14.0	4.07467423	4.66042419	13.33927424	29.14123777	36.12327350	42.57928898
0.730	15.0	4.60091479	5.22934795	14.33885960	30.57791420	37.69729804	44.26322498
0.707	16.0	5.14220461	5.81221148	15.33849898	31.99992694	39.25235461	45.92489908
0.686	17.0	5.69721621	6.40775873	16.33818248	33.40866363	40.79021652	47.56636959
0.667	18.0	6.26480375	7.01490980	17.33790247	34.80530576	42.31239614	49.18939451
0.649	19.0	6.84397046	7.63272849	18.33765300	36.19086916	43.82019577	50.79548970
0.632	20.0	7.43384323	8.26039712	19.33742934	37.56623482	45.31474642	52.38597331
0.516	30.0	13.78671409	14.95345236	29.33603139	50.89218135	59.70306408	67.63263030
0.447	40.0	20.70652807	22.16425607	39.33534469	63.69073979	73.40195728	82.06229388
0.400	50.0	27.99074023	29.70667658	49.33493656	76.15389129	86.66081493	95.96874852
0.365	60.0	35.53448122	37.48484457	59.33466609	88.37941895	99.60723279	109.50293055
0.338	70.0	43.27516856	45.44170959	69.33447368	100.42518428	112.31693156	122.75465381
0.316	80.0	51.17191987	53.54006886	79.33432980	112.32879257	124.83922071	135.78252117
0.298	90.0	59.19629117	61.75406991	89.33421815	124.11631874	137.20835381	148.62728760
0.283	100.0	67.32754938	70.06488520	99.33412899	135.80672323	149.44925244	161.31865701

附表 3 已知 P 和 C_s 的 φ 值表 (与文 [1] 对比)

C_s	0.005%	0.0333%	0.333%	3.333%	15%	33.333%	85%
0.0	3.890626	3.403212	2.713384	1.833960	1.036433	0.430736	-1.036433
	3.3891	3.403	2.713	1.834	1.036	0.430	-1.036
0.5	5.110532	4.304236	3.241940	2.018613	1.032037	0.358040	-1.019476
	5.111	4.304	3.241*	2.119	1.032	0.358	-1.019
1.0	6.375430	5.219710	3.756702	2.176288	1.006768	0.276811	-0.980450
	6.375	5.219*	3.756*	2.176	1.007	0.277	-0.98
1.5	7.646876	6.125457	4.246568	2.304299	0.961270	0.189208	-0.918995
	7.647	6.125	4.246*	2.304	0.961	0.189	-0.919
2.0	8.903481	7.007361	4.704783	2.401297	0.897120	0.098622	-0.837481
	8.903	7.006*	4.704*	2.401	0.897	0.099	-0.837
3.0	11.330267	8.672401	5.514975	2.504900	0.725752	-0.072447	-0.650562
	11.330	8.671*	5.514*	2.505	0.726	-0.072	-0.651
4.0	13.617845	10.193514	6.185078	2.50381	0.525373	-0.200321	-0.499316
	13.620*	10.190*	6.183*	2.504	0.525	-0.200	-0.499
5.0	15.766227	11.577158	6.729588	2.42229	0.328179	-0.268377	-0.399989
	15.770*	11.580*	6.727*	2.422	0.328	-0.268	-0.400

注: 表中有效数为 3 位的是文 [1] 的真值, 有效数为 6 位的是本文所算结果。

* 表示文 [1] 的“真值”与本文结果在第 3 位有效数上有差异。

附表 4 文 [5] 与本文所算 φ 值差异情况表

$C_s, P(\%)$	0.0, 0.001%	0.1, 0.001%	0.1, 0.01%	0.2, 0.001%	0.2, 0.01%	0.2, 0.333%	0.3, 0.001%	0.3, 0.01%
本文	4.265	4.5545	3.9345	4.8498	4.1530	2.9255	5.1500	4.3739
文 [5]	4.26	4.56	3.94	4.86	4.16	2.92	5.16	4.38
$C_s, P(\%)$	0.4, 0.001%	0.4, 0.01%	0.4, 0.2%	0.5, 0.001%	0.5, 0.01%	0.5, 0.2%	0.5, 0.333%	0.6, 0.001%
本文	5.4552	4.5969	3.3657	5.7618	4.8214	3.4874	3.2419**	6.0722
文 [5]	5.47	4.61	3.36	5.78	4.83	3.48	3625, 36241	6.09
$C_s, P(\%)$	0.6, 0.2%	0.7, 0.001%	0.7, 0.01%	0.7, 0.2%	0.8, 0.001%	0.9, 0.333%	1.1, 0.2%	1.2, 0.333%
本文	3.6087	6.3850	5.2739	3.7296	6.6996	3.6555	4.2058	3.9561
文 [5]	3.60	6.40	5.28	3.72	6.71	3.65	4.20	3.95
$C_s, P(\%)$	1.3, 0.1%	1.4, 0.01%	1.4, 0.2%	1.5, 0.2%	1.5, 0.333%	1.6, 0.001%	1.6, 0.01%	1.6, 0.2%
本文	4.9555	5.0950	4.5530	4.6665	4.2466**	9.2446	4.3182	4.7787
文 [5]	4.95	5.09	4.56	4.68	4.24, 4.246	9.25	7.31	4.80
$C_s, P(\%)$	1.7, 0.001%	1.7, 0.1%	1.7, 0.2%	1.8, 0.001%	1.8, 0.02%	1.9, 0.2%	2.0, 0.2%	2.1, 0.2%
本文	9.5627	5.5070	4.8897	9.8802	4.9994	5.1077	4.2146	4.7787
文 [5]	9.57	5.50	4.91	9.89	5.01	5.12	5.22	5.3201

附表 5 部分 φ 值表 ($P \leq 1\%$)

	0.001	0.010	0.033	0.100	0.200	0.333	0.500	1.000
0.0	4.2651	3.7190	3.4032	3.0902	2.8782	2.7134	2.5758	2.3263
0.1	4.5545	3.9345	3.5806	3.2332	2.9998	2.8195	2.6697	2.3996
0.2	4.8498	4.1530	3.7597	3.3770	3.1217	2.9255	2.7632	2.4723
0.3	5.1500	4.3739	3.9403	3.5214	3.2437	3.0314	2.8564	2.5442
0.4	5.4542	4.5969	4.1219	3.6661	3.3657	3.1369	2.9490	2.6154
0.5	5.7618	4.8214	4.3042	3.8109	3.4874	3.2419	3.0410	2.6857
0.6	6.0722	5.0472	4.4871	3.9557	3.6087	3.3464	3.1323	2.7551
0.7	6.3850	5.2739	4.6703	4.1002	3.7296	3.4502	3.2228	2.8236
0.8	6.6996	5.5012	4.8536	4.2444	3.8498	3.5533	3.3124	2.8910
0.9	7.0157	5.7290	5.0368	4.3881	3.9693	3.6555	3.4011	2.9573
1.0	7.3329	5.9569	5.2197	4.5311	4.0880	3.7567	3.4887	3.0226
1.1	7.6509	6.1848	5.4022	4.6734	4.2058	3.8569	3.5753	3.0866
1.2	7.9695	6.4125	5.5841	4.8149	4.3226	3.9561	3.6607	3.1494
1.3	8.2883	6.6398	5.7654	4.9555	4.4384	4.0541	3.7450	3.2110
1.4	8.6073	6.8666	5.9459	5.0950	4.5530	4.1510	3.8280	3.2713
1.5	8.9261	7.0928	6.1255	5.2335	4.6665	4.2466	3.9097	3.3304
1.6	9.2446	7.3182	6.3041	5.3709	4.7787	4.3409	3.9902	3.3880
1.7	9.5627	7.5427	6.4816	5.5070	4.8897	4.4339	4.0693	3.4444
1.8	9.8802	7.7663	6.6581	5.6419	4.9994	4.5256	4.1470	3.4994
1.9	10.1969	7.9889	6.8333	5.7755	5.1077	4.6159	4.2234	3.5530
2.0	10.5129	8.2103	7.0074	5.9078	5.2146	4.7048	4.2983	3.6052
2.1	10.8280	8.4306	7.1801	6.0387	5.3201	4.7923	4.3719	3.6560
2.2	11.1421	8.6497	7.3515	6.1682	5.4243	4.8783	4.4440	3.7054
2.3	11.4551	8.8675	7.5216	6.2963	5.5269	4.9630	4.5147	3.7535
2.4	11.7670	9.0840	7.6903	6.4229	5.6282	5.0462	4.5839	3.8001
2.5	12.0778	9.2992	7.8576	6.5481	5.7280	5.1279	4.6518	3.8454
2.6	12.3873	9.5130	8.0234	6.6719	5.8263	5.2082	4.7182	3.8893
2.7	12.6956	9.7254	8.1879	6.7942	5.9232	5.2870	4.7831	3.9318
2.8	13.0025	9.9364	8.3508	6.9151	6.0186	5.3644	4.8467	3.9730
2.9	13.3082	10.1460	8.5124	7.0344	6.1125	5.4404	4.9088	4.0129
3.0	13.6125	10.3542	8.6724	7.1524	6.2051	5.5150	4.9696	4.0514
3.1	13.9154	10.5609	8.8310	7.2688	6.2961	5.5881	5.0290	4.0886
3.2	14.2170	10.7662	8.9882	7.3838	6.3858	5.6599	5.0870	4.1245
3.3	14.5172	10.9700	9.1439	7.4974	6.4740	5.7302	5.1436	4.1592
3.4	14.8159	11.1724	9.2981	7.6095	6.5608	5.7992	5.1989	4.1926
3.5	15.1133	11.3733	9.4509	7.7202	6.6463	5.8668	5.2529	4.2247
3.6	15.4093	11.5728	9.6022	7.8295	6.7303	5.9331	5.3056	4.2557
3.7	15.7038	11.7709	9.7522	7.9374	6.8130	5.9980	5.3570	4.2854
3.8	15.9970	11.9676	9.9007	8.0440	6.8943	6.0617	5.4071	4.3140
3.9	16.2887	12.1628	10.0478	8.1491	6.9744	6.1240	5.4560	4.3415
4.0	16.5791	12.3566	10.1935	8.2529	7.0530	6.1851	5.5036	4.3678
4.1	16.8681	12.5491	10.3379	8.3553	7.1304	6.2449	5.5500	4.3930
4.2	17.1556	12.7401	10.4809	8.4565	7.2065	6.3035	5.5953	4.4171

4.3	17.4418	12.9298	10.6225	8.5563	7.2814	6.3608	5.6393	4.4401
4.4	17.7267	13.1181	10.7628	8.6548	7.3550	6.4170	5.6822	4.4621
4.5	18.0101	13.3050	10.9017	8.7520	7.4273	6.4719	5.7240	4.4830
4.6	18.2922	13.4907	11.0394	8.8480	7.4985	6.5257	5.7646	4.5030
4.7	18.5730	13.6750	11.1757	8.9427	7.5684	6.5784	5.8042	4.5219
4.8	18.8525	13.8579	11.3108	9.0362	7.6372	6.6299	5.8426	4.5399
4.9	19.1306	14.0396	11.4446	9.1295	7.7048	6.6803	5.8800	4.5569
5.0	19.4074	14.2200	11.5772	9.2196	7.7712	6.7296	5.9164	4.5730
5.1	19.6829	14.3992	11.7085	9.3095	7.8366	6.7778	5.9517	4.5882
5.2	19.9572	14.5771	11.8386	9.3983	7.9008	6.8250	5.9860	4.6025
5.3	20.2301	14.7537	11.9675	9.4859	7.9639	6.8711	6.0193	4.6159
5.4	20.5018	14.9291	12.0952	9.5723	8.0259	6.9162	6.0517	4.6285
5.5	20.7723	15.1033	12.2218	9.6577	8.0869	6.9603	6.0831	4.6402
5.6	21.0415	15.2763	12.3472	9.7419	8.1468	7.0034	6.1135	4.6511
5.7	21.3095	15.4481	12.4714	9.8251	8.2057	7.0455	6.1430	4.6612
5.8	21.5763	15.6188	12.5945	9.9071	8.2636	7.0866	6.1716	4.6705
5.9	21.8419	15.7883	12.7164	9.9881	8.3205	7.1268	6.1993	4.6790
6.0	22.1063	15.9566	12.8373	10.0681	8.3763	7.1660	6.2262	4.6868
6.1	22.3696	16.1238	12.9571	10.1471	8.4312	7.2044	6.2521	4.6938
6.2	22.6317	16.2899	13.0758	10.2250	8.4852	7.2418	6.2772	4.7001
6.3	22.8926	16.4549	13.1934	10.3019	8.5382	7.2784	6.3015	4.7057
6.4	23.1524	16.6188	13.3100	10.3779	8.5903	7.3140	6.3250	4.7106
6.5	23.4111	16.7816	13.4256	10.4528	8.6414	7.3488	6.3476	4.7148