教育研究

关于刚体系统碰撞问题的动力学普遍定理解法

黎邦隆　　黎之奇

(湖南大学，长沙 410082)　(中科院力学所，北京 100080)

对较复杂的刚体系统的碰撞问题，一般都用冲力情况下的拉格朗日方程解答．因为通常都认为，用动力学普遍定理，就要将系统拆开，于是导致各刚体间未知的约束反力冲量出现，解决起来比较麻烦．其实，这个缺点是可以避免的．因为存在这个缺点的主要原因是通常的做法在解题时只应用质心运动定理的积分形式与相对于质心的冲量矩定理，没有考虑应用动能定理，而且限定以质心为矩心，也没有考虑尽量多以整个系统为研究对象的缘故．只要注意了这些问题，用这种方法解题就不会比用拉氏方程麻烦．对有些问题，可能比用拉氏方程还简便．

由于系统在碰撞时有能量损失，所以平常在解决碰撞问题时都未考虑用动能定理．实际上这个定理仍可用于系统的碰撞过程．即系统在碰撞末了和开始时的动能之差，等于作用在各质点上的碰撞力在碰撞过程中所作的功之和，即 $\sum\limits_{i}^{n}\left[\boldsymbol{S}_i\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{v}_i}{2}\right)\right]$．这里 $\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_i$ 分别是任意质点 i 在碰撞末了与开始时的速度，$\boldsymbol{S}_i$ 是作用于它的碰撞冲量，对于受到理想约束的刚体系统，只须考虑各外碰撞力的功．应用本定理时，一般应以整个系统为研究对象，以发挥本定理的优点．

列出系统的冲量矩方程时，并不一定要以质心为矩心，可选任一点为矩心，考虑到在碰撞问题中，各质点的位移可忽略不计的特点，只要计算在绝对运动中的动量矩，则无须考虑修正项．而且不但可选任一点为矩心，还可就同一对象选多个矩心．例如在平面问题中，对同一对象可选不同的两点为矩心列出两个冲量矩方程，配以一个冲量方程；或选不同的三点为矩心列出三个冲量矩方程，列这些方程也要遵守平面力系平衡方程组的二力矩式或三力矩式那样的条件：两矩心的连线不能与投影轴垂直；三矩心不能共线．违反这些条件时，列得的方程就不全部互相独立．

先以图 1 的五均质杆系统为例，每杆长 l，质量为 m，绞接成正五边形静止在光滑水面上．杆 CD 中点受与杆垂直的冲量 $\boldsymbol{S}$ 作用时，求该杆受撞结束时的速度．

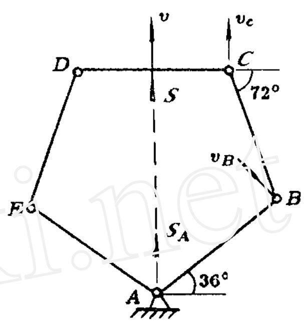

图 1

由对称知 CD 杆受撞后作平动，从而知 $v_B=v_C=v$，且系统只有一个自由度．A 点速度始终为零，故其反力冲量 $\boldsymbol{S}_A$ 不作功．碰撞结束时系统的动能为

$$T=2\times\frac{1}{6}ml^2\left(\frac{v_B}{l}\right)^2+2\left[\frac{m}{2}\left|\boldsymbol{v}_B+\frac{\boldsymbol{v}_{CB}}{2}\right|^2+\frac{ml^2}{24}\left|\boldsymbol{v}_C-\boldsymbol{v}_B\right|^2/l^2\right]+\frac{1}{2}mv_C^2=\frac{1}{6}mv^2(9+2\cos 36^\circ)$$

由动能方程

$$\frac{1}{6}mv^2(9+2\cos 36^\circ)=\frac{1}{2}Sv$$

即得

$$v=3S/m(9+2\cos 36^\circ)$$

由冲量定理可得

$$S_A=-(3-4\cos 36^\circ)S/(9+2\cos 36^\circ)$$

其次考虑文 [2] 中图 3 所示的系统．虽然对它不能应用动能定理 (因内部突加约束情况不明，无法计算其反力冲量的功)，但系统在碰撞发生后只

有三个自由度，只须列出三个方程即可解决问题，以 ω 表示三杆的角速度，碰撞末了时由系统在沿杆方向的动量守恒可立即得到 $r = r_0$，再由垂直于杆方向的动量守恒可得

$$3m(u + \frac{3}{2}l\omega) = \frac{m}{2}(u_0 + 2v_0 + 2\omega_0 + s_0)$$

即

$$6u + 9l\omega = u_0 + 2v_0 + 2\omega_0 + s_0 \qquad (1)$$

又据系统对任一点的动量矩守恒，以 AB 杆的质心为矩心得

$$\frac{3m}{12}(3l)^2\omega + 3m(u + \frac{3}{2}l\omega)l =$$
$$\frac{ml^2}{12}\left[\frac{v_0 - u_0}{l} + \frac{w_0 - v_0}{l} + \frac{s_0 - w_0}{l}\right] +$$
$$m\frac{v_0 + w_0}{2}l + m \cdot \frac{w_0 + s_0}{2} \cdot 2l$$

即

$$81l\omega + 36u = -u_0 + 6v_0 + 18w_0 + 13s_0 \qquad (2)$$

联解 (1) 、 (2) 两式，得

$$u = (5u_0 + 6v_0 - 2s_0)/9$$

$$w = (-7u_0 - 5v_0 + 6w_0 + 7s_0)/27l$$

据此由 $v = u + l\omega$, $w = u + 2l\omega$, $s = u + 3l\omega$ 即可确定 v 、 w 、 s 诸值. 这种方法比文 [2] 中须用带有不定乘子的拉氏方程来解答简便得多.

本题也可在杆上再任选一点为矩心列出另一动量矩守恒的方程与 (2) 式联立来求 u 与 ω 之值，但这两方程与方程 (1) 三式中只有两个是互相独立的.

最后以本刊小问题栏中题 189 为例：欲求该系统 GH 杆所受碰撞冲量，须将该杆解除. 代以其反力冲量 (见本刊 1990 年第 5 期该题解答)，但因 G 与 H 两点在碰撞始末的速度均与该冲量垂直，它不作功，故不能用动能定理将它求出；由于对称也不能对整体用对碰撞点 D 的动量矩守恒来求它. 因而须将此系统拆开，因此便出现了有关的铰链反力冲量 [见该题解答图 5(b) 及 (c)]，但由于解答中分别取 B 点与 C 点为矩心，仍可避免这些未知冲量出现在列出的冲量矩方程中，从而简化了解题过程. 由上可见，只要灵活应用各个定理，选择合适的矩心及投影轴，用动力学普遍定理解决刚体系统的碰撞问题就并不复杂，且此法与用拉氏方程相比较还有以下优点：

(1) 用动能定理时只需按系统的碰撞位置计算其动能，不须解除约束，即使碰撞是由于系统受到突加约束而发生，也只是在计算约束反力冲量的功时须将约束解除. 而用拉氏方程时对于突加约束则一开始便须将它解除，将系统放在任意位置求出它的动能，表为各广义坐标及广义速度的函数，一般都比常一情况繁复.

(2) 对于具有动量守恒或动量矩守恒的系统，可立即求得碰撞结束时的速度，或至少可建立速度方面的一个关系式，有时比拉氏方程方便.

(3) 系统由于受到情况不明的内部突加约束而发生碰撞时，如用拉氏方程，就要用多余坐标并引入不定乘子来解答，而用动量定理和动量矩定理则不须考虑任何形式的内力，且可列得系统的动量守恒与动量矩守恒方程，比用拉氏方程简便.

参 考 文 献

1 吴镇. 分析力学. 上海：上海交通大学出版， 1984

2 宋福磐，黎邦隆. 冲力情况下拉格朗日方程的应用特点. 力学与实践， 1994, 16(5)

(1995 年 5 月 17 日收到第 1 稿，
1995 年 8 月 21 日收到修改稿)

糠粃在前

刁凿齿尝与孙绰共行，绰在前，顾凿齿曰："沙之汰之，瓦石在后." 凿齿曰："簸之扬之，糠粃在前."

(老亮摘自明代冯梦龙编著《广笑府》)