关于可变区域问题的变分法以及广义数学规划问题

刘洪秋　　夏人伟
(中科院力学所,北京,100080)　(北京航空航天大学,100083)

摘　要　本文具体研究了定义在可变区域上或可变边界表面上的泛函的一阶、二阶变分问题,得到了与经典变分法相对应的关于可变区域问题的变分法。并用该变分法讨论了具有可变区域的弹性系统的势能原理。另一方面,与传统的数学规划相对应,研究了可变区域上泛函的约束极值问题——广义数学规划问题,给出了相应的广义 Kuhn-Tucker 条件。

关键词　可变区域,变分法,广义数学规划,泛函

0 前　言

在可变区域上的变分或具有待定边界的变分问题,可以说是一个很古老的问题,如待定端点问题在一般经典变分理论书中均有论述,然而仅限于一维变域问题的研究是远远不够的。实际上,在经典力学中,有许多问题的边界是不能预先给定的,比较典型的问题如弹塑性区的交界面,还有两个变形体的接触面等[1],这样一类边界面的确定需要由总体平衡、几何协调及内应力的分布等相互制约下达到。因此,对于这样一类问题,不仅有关的状态变量要由变分来决定,而且这样一类边界面的确定也是变分的目的之一。特别是近十几年来发展起来的形状优化问题,就是要寻求一种几何形状使得其力学性能达到最优,所以它也可以归结为变化区域上的变分问题。

在 80 年代初,钱伟长[1]曾对待定端点问题和二维待定曲线边界问题的理论做了详细的研究。而近年来对变域变分问题的研究热点则是在形状优化领域,并且有许多是关于三维变域变分问题的研究,但由于缺乏较一般的三维变域问题的变分理论,所以大多数是针对具体问题进行具体分析。尽管如此,人们用变域问题的变分方法在形状优化的敏度分析及优化方法方面做了大量工作,并取得了一定的成绩[2][3]。

本文将重点探讨三维可变区域问题的一般变分理论,分别对定义在可变区域上的泛函和定义在可变边界曲面上的泛函的变分问题进行研究,由于一般边界曲面是黎曼曲面,所以通过研究可以发现,定义在可变边界曲面上的泛函的变分并非是定义在可变区域上的泛函的变分的简单推广。文中证明了一般的变域问题的变分等价问题。基于该理论,讨论了具有约束的泛函极值问题——广义数学规划问题,给出了与 Kuhn-Tucker 条件相应的极值条件,称之为广义 Kuhn-Tucker 条件。

本文于 1992 年 7 月 6 日收到,1993 年 4 月 12 日收到修改稿。

最后说明一点,文中所用的“变域”一词是指具有可变边界或待定边界的区域,简称为变域。

1 可变区域及其表面上的泛函的一阶、二阶变分

根据连续介质力学的运动和变形理论,可以用流动构形来描述区域的变化过程。

设构形

$$\{\tilde{X}\} = \{X + t\delta X, \forall\ \delta X \in C^1\}$$

当 $t=0$ 时,为初始构形,记为 $\{X\}$,当 $t=1$ 时,为现实构形,记为 $\{X^*\}$,而 $\{\tilde{X}\}$ 为流动构形。

随着构形的变化,自变函数 $\tilde{Z}(\tilde{X})$ 可表示为:

$$\tilde{Z}(\tilde{X}) = Z(X + t\delta X) + t\delta Z(X + t\delta X) \tag{1.1}$$

在现实构形上则为

$$Z^*(X^*) = Z(X) + \delta\overline{Z}(X) + \delta X \cdot \nabla Z(X) \tag{1.2}$$

其中 $\delta\overline{Z}$ 为经典意义下的变分,于是可定义自变函数的总变分为

$$\delta Z = Z^*(X^*) - Z(X) = \delta\overline{Z}(X) + \delta X \cdot \nabla Z(X) \tag{1.3}$$

上式中的最后一项是由区域的几何形状变化引起的变分,所以在形状优化中称之为形状变分。其中 $\nabla = \frac{\partial}{\partial X}$ 是一阶张量算子。

假设泛函 $f(X,Z(X),\nabla Z(X))$ 及自变函数 $Z(X)$ 是定义在流形 $\{\tilde{X}\}$ 上的二次连续可微的函数,所以泛函 f 可以表示为参数 t 的一元函数,即:

$$\begin{aligned} &f(X + t\delta X, Z(X + t\delta X) + t\delta Z(X + \delta X), \\ &\nabla Z(X + t\delta X) + t\delta\nabla Z(X + t\delta X)) = \varphi(t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

因此 $\varphi(t)$ 也是二次连续可微的,并且有

$$\begin{aligned} f^*(X^*, Z^*(X^*), \nabla Z^*(X^*)) &= \varphi(1) \\ f(X, Z(X), \nabla Z(X)) &= \varphi(0) \end{aligned} \tag{1.5}$$

利用 $\varphi(t)$ 的二阶泰勒展开式

$$f^*(X^*, Z^*, \nabla Z^*) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + o(\delta^2)$$

其中“o”代表高阶余项。对 f^* 的具体展开形式进行整理,忽略高阶小量可得

$$\begin{aligned} f^* = f &+ \delta X \cdot \Box f + \delta\overline{Z} \cdot \nabla_1 f + \delta\nabla\overline{Z} : \nabla_2 f + \frac{1}{2}\{\delta\overline{Z} \cdot \nabla_1\nabla_1 f \cdot \delta\overline{Z} \\ &+ 2\delta\overline{Z} \cdot \nabla_1\nabla_2 f : \delta\nabla\overline{Z} + \delta\overline{Z} : \nabla_2\nabla_2 f : \delta\nabla\overline{Z} \\ &+ \delta X \cdot \Box\Box f \cdot \delta X + 2\delta X \cdot \Box(\delta\overline{Z} \cdot \nabla_1 f) + 2\delta X \cdot \Box(\delta\nabla Z : \nabla_2 f)\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

其中　$\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial Z}$ 和 $\Box = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} \cdot \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial \nabla Z}{\partial X} : \frac{\partial}{\partial \nabla Z}$ 均为一阶张量算子,$\nabla_2 = \frac{\partial}{\partial \nabla Z}$ 为二阶张量算子。

考虑一个定义在可变区域上的积分泛函

$$\Psi = \int_\Omega f(X, Z(X), \nabla Z(X))\mathrm{d}\Omega \tag{1.7}$$

按照上述总变分的定义,有

$$\delta\Psi = \int_{\Omega^*} f^*(X^*, Z^*, \nabla Z^*) \mathrm{d}\Omega^* - \int_{\Omega} f(X, Z, \nabla Z) \mathrm{d}\Omega \tag{1.8}$$

利用两构形间的变换关系

$$X^* = X + \delta X$$

现实构形上的区域微元可表示为：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Omega^* &= \mathrm{d}x_1{}^* \mathrm{d}x_2{}^* \mathrm{d}x_3{}^* \\ &= (\mathrm{d}x_1 + x_{1,i}\mathrm{d}x_i)(\mathrm{d}x_2 + x_{2,j}\mathrm{d}x_j)(\mathrm{d}x_3 + x_{3,k}\mathrm{d}x_k) \end{aligned}$$

忽略高阶小量得

$$\mathrm{d}\Omega^* = \{1 + \nabla \cdot \delta X + \frac{1}{2}((\nabla \cdot \delta X)(\nabla \cdot \delta X) - (\nabla \delta X)^{\mathrm{T}} : \nabla \delta X)\} \mathrm{d}\Omega \tag{1.9}$$

将式(1.6)和(1.9)代入(1.8)中得

$$\begin{aligned} \delta\Psi = \int_{\Omega} & \{f + \delta X \cdot \Box f + \delta \bar{Z} \cdot \nabla_1 f + \delta \nabla \bar{Z} : \nabla_2 f + \frac{1}{2}(\delta \bar{Z} \cdot \nabla_1 \nabla_1 f \cdot \delta \bar{Z} \\ & + 2\delta \bar{Z} \cdot \nabla_1 \nabla_2 f : \delta \nabla \bar{Z} + \delta \nabla \bar{Z} : \nabla_2 \nabla_2 f : \delta \nabla \bar{Z}) \\ & + \frac{1}{2}\delta X \cdot \Box\Box f \cdot \delta X + \delta X \cdot \Box(\delta \bar{Z} \cdot \nabla_1 f + \delta \nabla \bar{Z} : \nabla_2 f)\} \\ & \{1 + \nabla \cdot \delta X + \frac{1}{2}((\nabla \cdot \delta X)(\nabla \delta X) - (\nabla \delta X)^{\mathrm{T}} : (\nabla \delta X)\} - f \mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

经整理泛函的总变分最后可表示为：

$$\begin{aligned} \delta\Psi = & \int_{\Omega} (\delta \bar{Z} \cdot \nabla_1 f + \delta \nabla \bar{Z} : \nabla_2 f) \mathrm{d}\Omega + \int_S f \delta X_n \mathrm{d}S \\ & + \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\delta \bar{Z} \cdot \nabla_1 \nabla_1 f \cdot \delta \bar{Z} + 2\delta \bar{Z} \cdot \nabla_1 \nabla_2 f : \delta \nabla \bar{Z} \\ & + \delta \nabla \bar{Z} : \nabla_2 \nabla_2 f : \delta \nabla \bar{Z}) \mathrm{d}\Omega + \int_S (\delta \bar{Z} \cdot \nabla_1 f + \delta \nabla \bar{Z} : \nabla_2 f) \delta X_n \\ & \frac{1}{2}\{(\delta X \cdot \Box f)\delta X + f(\nabla \cdot \delta X)\delta X - f \delta X \cdot \nabla \delta X\} \cdot N \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{1.10}$$

其中第一个积分为泛函的纯量变分，记为

$$\delta^{(1)}\Psi = \int_{\Omega} (\delta \bar{Z} \cdot \nabla_1 f + \delta \nabla \bar{Z} : \nabla_2 f) \mathrm{d}\Omega \tag{1.11}$$

它与经典变分理论中的一阶变分是相同的，第二个积分是泛函的一阶形状变分，即

$$\delta_{\Omega}^{(1)}\Psi = \int f \delta X_n \mathrm{d}S \tag{1.12}$$

第三个积分是与经典变分相同的二阶纯量变分即

$$\delta_{\Omega}^{(2)}\Psi = \frac{1}{2}\int (\delta \bar{Z} \cdot \nabla_1 \nabla_1 f \cdot \delta \bar{Z} + 2\delta \bar{Z} \cdot \nabla_1 \nabla_2 f : \delta \nabla \bar{Z} + \delta \nabla \bar{Z} : \nabla_2 \nabla_2 f : \delta \nabla \bar{Z}) \mathrm{d}\Omega \tag{1.13}$$

最后一个积分则是纯量变分与形状变分相耦合的二阶变分，即

$$\begin{aligned} \delta_{(Z,\Omega)}^{(2)}\Psi = \int & (\delta \bar{Z} \cdot \nabla_1 f + \delta \nabla \bar{Z} : \nabla_2 f) \delta X_n + \frac{1}{2}\{(\delta X \cdot \Box f)\delta X \\ & + f((\nabla \cdot \delta X)\delta X - \delta X \cdot \nabla \delta X)\} \cdot N \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{1.14}$$

其中 S 为区域 Ω 的可变边界,它可以是边界 $\partial\Omega$ 的一部分或全部,N 为 S 的外法向量。

当几何变量的变分为零时,即

$$\delta X = 0 \qquad \text{在 } S \text{ 上}$$

也就是区域的边界是不变的,此时泛函的总变分恰好就是经典变分。

鉴于三维欧氏空间中的区域边界一般是黎曼曲面,在这样的边界曲面上的泛函的总变分是不能直接由三维区域上的泛函变分所得到,为此,下边将具体讨论变化边界上的泛函的变分。

考虑定义在变化边界上的泛函

$$\Phi = \int_S g(X, Z, \nabla Z)\mathrm{d}S \tag{1.15}$$

按照变分的定义,有

$$\delta\Phi = \int_{S^*} g^*(X^*, Z^*, \nabla Z^*)\mathrm{d}S^* - \int_S g(X, Z, \nabla Z)\mathrm{d}S \tag{1.16}$$

由曲面微元的定义

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}X^1 \times \mathrm{d}X^2 \tag{1.17}$$

可知在现实构形上的曲面微元可表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S^* = \{&1 + \nabla\cdot\delta X - N\cdot\nabla\delta X\cdot N + \frac{1}{2}N\cdot(\nabla\delta X)^{\mathrm{T}}\cdot\nabla\delta X\cdot N \\ &- (N\cdot\nabla\delta X\cdot N)(N\cdot\nabla\delta X\cdot N) \\ &+ (N\cdot\in):((\nabla\delta X)^{\mathrm{T}}\cdot(N\cdot\in)\cdot\nabla\delta X\}\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{1.18}$$

其中$\in$是广义 Kronecker 符号(或置换符号),即(分量形式)

$$e_{ijk} = \begin{cases}1 & \text{当 } i,j,k \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 的偶次置换} \\ -1 & \text{当 } i,j,k \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 的奇次置换} \\ 0 & \text{其它。}\end{cases} \tag{1.19}$$

假设 g 是二次连续可微泛函,它也可以表示为(1.6)式所示的形式,再利用(1.18)式,泛函 Φ 的总变分便可以表示为

$$\begin{aligned}\delta\Phi = \int_S &\{g + \delta X\cdot\Box g + \delta\overline{Z}\cdot\nabla_1 g + \delta\nabla\overline{Z}:\nabla_2 g + \frac{1}{2}(\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1\nabla_1 g\cdot\delta\overline{Z} \\ &+ 2\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1\nabla_2 g:\delta\nabla\overline{Z} + \delta\nabla\overline{Z}:\nabla_2\nabla_2 g:\delta\nabla\overline{Z}) \\ &+ \delta X\cdot\Box(\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1 g + \delta\nabla\overline{Z}:\nabla_2 g) + \frac{1}{2}\delta X\cdot\Box\Box g\cdot\delta X\} \\ &\{1 + \nabla\cdot\delta X - N\cdot\nabla\delta X\cdot N + \frac{1}{2}N\cdot(\nabla\delta X)^{\mathrm{T}}\cdot\nabla\delta X\cdot N \\ &- (N\cdot\nabla\delta X\cdot N)(N\cdot\nabla\delta X\cdot N) \\ &+ (N\cdot\in):((\nabla\delta X)^{\mathrm{T}}\cdot(N\cdot\in)\cdot\nabla\delta X)\} - g\mathrm{d}S\end{aligned}$$

经整理得

$$\begin{aligned}\delta\Phi = \int_S &\{\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1 g + \delta\nabla\overline{Z}:\nabla_2 g + \Box\cdot(\delta X g) - gN\cdot\nabla\delta X\cdot N \\ &+ \frac{1}{2}(\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1\nabla_1 g\cdot\delta\overline{Z} + 2\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1\nabla_2 g:\delta\nabla\overline{Z}) + \delta\nabla\overline{Z}:\nabla_2\nabla_2 g:\delta\nabla\overline{Z})\end{aligned}$$

$$+\square\cdot\{\delta X(\delta Z\cdot\nabla_1 g+\delta\nabla\overline{Z}:\nabla_2 g)\}+\frac{1}{2}\delta X\cdot\square\square g\cdot\delta X$$
$$-(\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1 g+\delta\nabla\overline{Z}:\nabla_2 g)(N\cdot\nabla\delta X\cdot N)$$
$$+\delta X\cdot\square g(\nabla\cdot\delta X-N\cdot\nabla\delta X\cdot N)$$
$$+\frac{1}{2}g\{N\cdot(\nabla\delta X)^{\mathrm{T}}\cdot\nabla\delta X\cdot N)-(N\cdot\nabla\delta X\cdot N)(N\cdot\nabla\delta X\cdot N)$$
$$+(N\cdot\in):(\nabla\delta X)^{\mathrm{T}}\cdot(N\cdot\in)\cdot\nabla\delta X)\}\}\mathrm{d}S$$

其中与经典变分相同的一阶纯量变分为

$$\delta_z^{(1)}\Phi=\int_S(\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1 g+\delta\nabla\overline{Z}:\nabla_2 g)\mathrm{d}S$$

一阶形状变分为

$$\delta_s^{(1)}\Phi=\int_S(\square\cdot(\delta Xg)-gN\cdot\nabla\delta X\cdot N)\mathrm{d}S$$

与经典变分相同的二阶纯量变分为

$$\delta^{(2)}\Phi=\frac{1}{2}\int_S(\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1\nabla_1 g\cdot\delta\overline{Z}+2\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1\nabla_{2}g:\delta\nabla\overline{Z}$$
$$+\delta\nabla\overline{Z}:\nabla_2\nabla_2 g:\delta\nabla\overline{Z})\mathrm{d}S$$

剩下的是纯量变分与形状变分相耦合的二阶变分。说明一点，上述结论的具体推导过程均由具体的微分运算得到，所以本文将此略去，有兴趣者可参考文献〔4〕。

上述结果表明，由定义在可变区域上的泛函的变分是不能简单地推广到可变边界曲面上的泛函的变分，所以在应用中要特别注意。

2 可变区域上的变分法

我们知道在经典变分理论中，是利用构造可取函数的方法，将泛函的极值问题归为普通函数极值问题，从而得到泛函极值所满足的必要条件。前面关于泛函变分式的推导，就是采用了类似的方法。因此，可变区域上的变分问题：求自变函数 Z 使泛函

$$\Psi=\int_\Omega f(X,Z,\nabla Z)\mathrm{d}\Omega$$

取极值，最优解 Z^* 要满足的必要条件是使得泛函 Ψ 的一阶变分为零，即

$$\delta\Psi(Z^*)=0$$

利用泛函总变分式(1.10)，有

$$\delta\Psi=\int(\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1 f+\delta\nabla\overline{Z}:\nabla_2 f)\mathrm{d}\Omega+\int_{S_1}f\delta X_n\mathrm{d}S=0$$

再利用奥高公式，上式又可化为

$$\int_\Omega\delta\overline{Z}\cdot(\nabla_1 f-\square\cdot(\nabla_2 f)^{\mathrm{T}})\mathrm{d}\Omega+\int_S\delta\overline{Z}\cdot\nabla_2 f\cdot N\mathrm{d}S+\int_{S_1}f\delta X_n\mathrm{d}S=0$$

由 $\delta\overline{Z}$ 在 Ω 及 S 上的任意性及 δX_n 在 S_1 上的任意性得

$$(\nabla_1 f-\square\cdot(\nabla_2 f)^{\mathrm{T}})|_{Z^*}=0\qquad\Omega^*\tag{2.1a}$$
$$(\nabla_2 f\cdot N)|_{Z^*}=0\qquad S^*\tag{2.1b}$$
$$f|_{Z^*}=0\qquad S_1^*\tag{2.1c}$$

其中可变边界 S_1 可以是部分边界，也可以是整个边界，即与 S 重合。

在方程组(2.1)中，(2.1a)式恰好是经典变分问题的 Euler 方程，而(2.1b)式则是自然边条件。根据微分方程解的适定性理论可知，对于给定的区域 Ω^* 和边界 S^*，由方程(2.1a)及(2.1b)即可定解。然而若加上条件(2.1c)，通常是无解的，只有在特殊区域上才可能有解，于是问题(2.1)应理解为：寻找一适当的区域 Ω^* 及函数 Z^*，使得 Z^* 在 Ω^* 上满足方程(2.1)。所以要确定泛函 Ψ 的极值，不仅要确定自变函数 Z^*，更重要的是要找一适当的区域，这正是它与经典变分理论之不同所在。为了区别于经典变分法我们将可变区域上的变分法重述如下：

泛函 Ψ 取驻值的必要条件是存在一个 Z^* 和 Ω^*，使得泛函 Ψ 的变分为零，即

$$\delta\Psi(Z^*,\Omega^*) = 0$$

应当指出：前边所得到的关于变域上的泛函取极值的必要条件，仅仅是针对定义在变化区域内的泛函而言，而对于同时还含有定义在变化边界上的积分泛函问题，正如前边在变分式的推导中所提到的是不能简单推广的。为了强调其不同之处，这里仅考虑一种较简单的形式：

$$\Psi = \int_S f(X,Z,\nabla Z)\mathrm{d}\Omega + \int_S g(X,Z)\mathrm{d}S$$

由(1.2)及(1.3)式得

$$\delta\Psi = \int_\Omega(\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1 f + \delta\nabla\overline{Z}:\nabla_2 f)\mathrm{d}\Omega + \int_S(\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1 g)\mathrm{d}S + \int_S f\delta X_n\mathrm{d}S + \int_S(\square\cdot(\delta X g) - gN\cdot\nabla\delta X\cdot N)\mathrm{d}S$$

若假设 $\delta X=\delta X_n N$，即变化边界沿法向变形是任意的，则上式可化为

$$\delta\Psi = \int_\Omega(\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1 f + \delta\nabla\overline{Z}:\nabla_2 f)\mathrm{d}\Omega + \int_S\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1 g\mathrm{d}S + \int_S f\delta X_n\mathrm{d}S + \int_S(\square g\cdot N - Hg)\delta X_n\mathrm{d}S$$

其中 H 为 Gauss 平均曲率由变域变分理论，可得泛函取极值的必要条件：

$$(\nabla_1 f - \square\cdot(\nabla_2 f)^{\mathrm{T}})|_{Z^*} = 0 \qquad \Omega^* \tag{2.2a}$$

$$(\nabla_1 g + \nabla_2 f\cdot N)|_{Z^*} = 0 \qquad S^* \tag{2.2b}$$

$$(f + N\cdot\square g - Hg)|_{Z^*} = 0 \qquad S^* \tag{2.2c}$$

推论：变域上的泛函驻值问题等价于自由边界问题(2.1)或(2.2)。即

$$\delta\Psi(Z^*,\Omega^*) = 0 \Leftrightarrow (2.1)\text{ 或 }(2.2)$$

证明：〔必要性〕：由上述变分法证之。

〔充分性〕：仅以(2.1)为例。对于任意的 $\delta\overline{Z}\in\overline{\Omega}$ 及任意 $\delta X\in S$，有

$$\int(\nabla_1 f - \square\cdot(\nabla_2 f)^{\mathrm{T}})\cdot\delta\overline{Z}\mathrm{d}\Omega + \int N\cdot(\nabla_2 f)^{\mathrm{T}}\cdot\delta\overline{Z}\mathrm{d}S + \int f\delta X_n\mathrm{d}S = 0$$

成立，利用奥高公式得：

$$\begin{aligned} 0 &= \int(\delta\overline{Z}\cdot\nabla_1 f + \delta\nabla\overline{Z}:\nabla_2 f + \square\cdot(\delta X f))\mathrm{d}\Omega \\ &= \int(\delta f\mathrm{d}\Omega) + f\delta\mathrm{d}\Omega \\ &= \delta\Psi \end{aligned}$$

证毕。

值得注意的是，在经典变分理论中，其中一个非常重要的结论是，一个泛函极值问题等价于一个微分方程，利用二者的等价性，人们便可取其中比较简单的问题形式之一来求解。同理，本文得到的推论也给人们同样的启示。诚然，自由边界问题或非适定方程的求解是困难的，但变域变分法为此提供了另一条途径。但如何建立有效的数值方法来求解与自由边界问题相应的泛函极值问题则有待于进一步地研究。经研究发现，经典变分理论中的一般结论对于可变区域问题也是适用的，只是形式及含义不同罢了，所以不再赘述[4]。

作为上述变分理论的直接应用，下面将讨论一下具有可变区域的弹性系统的势能原理。

假设牵引力作用边界为可变边界，并假设边界变化为沿法向变化，即 $\delta X=\delta X_n N$，根据变域问题的变分理论可得：

Ω^*、u^* 是具有可变区域的弹性系统的势能的驻值点，即满足

$$\delta\Pi(u^*,\Omega^*)=0$$

其充分必要条件是：u^* 及 Ω^* 是自由边界问题

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot(D:\nabla u^*)+F=0 && \Omega^*\\
&(D:\nabla u^*)\cdot N-T^0=0 && S_t^*\\
&u^*-u^0=0 && S_u^*\\
&V(\epsilon^*)-F^*\cdot u^*-N\cdot\square(T^0\cdot u^*)+T^0\cdot u^*H=0 && S_t^*
\end{aligned}\qquad(2.3)$$

的解。其中 Π 为弹性系统的势能泛函，$V(\epsilon^*)$ 为应变能密度，H 为 Gauss 平均曲率，D 为四阶弹性系数张量，F 为体力，T^0 为已知边界牵引力，u^0 为已知边界位移。在(2.3)中的前三个方程就是位移表示的平衡条件，而最后一个方程则是确定可变边界的条件。因此，当区域是确定的时候，上述等价条件恰好就是最小势能原理。然而，当所研究的力学系统具有部分可变边界时，由于泛函 $\Pi(u,\Omega)$ 关于自变函数 u 和 Ω 高度非线性，所以这里只能给出驻值条件。关于这一理论的应用作者将在其它文章中详细讨论。

3 变域上的广义数学规划问题

一般的结构优化问题可以化成一个数学规划问题，因此可以直接用数学规划的理论结果建立各种优化方法[8]。然而，形状优化问题不同，它所研究的区域的几何形状是可变的，所以它可以归结为在可变区域上的泛函的约束极值问题，这里称之为广义数学规划问题。为此，有必要研究这种广义数学规划问题。

关于可变区域问题的变分法，它实际上给出了泛函无约束极值的必要条件，而这一部分研究的是有约束极值问题，即

使广义数学规划问题

$$\begin{cases}
\displaystyle\int_\Omega f(X,Z,\nabla Z)\mathrm{d}\Omega\\
\text{s.t.}\quad \displaystyle\int_\Omega F(X,Z,\nabla Z)\mathrm{d}\Omega=\alpha \qquad F,\alpha\in R^m\\
\qquad\quad \displaystyle\int_S G(X,Z)\mathrm{d}S=\beta \qquad G,\beta\in R^n
\end{cases}\qquad(3.1)$$

取驻值的自变函数 Z^* 及几何区域 Ω^*，必满足下列条件：

$$\begin{aligned} \nabla_1 f - \square\cdot(\nabla_2 f)^{\mathrm{T}} + (\nabla_1 F - \square\cdot\nabla_2{}^{\mathrm{T}}F)\cdot\lambda = 0 \qquad & \Omega^* \\ N\cdot\nabla_2{}^{\mathrm{T}}f + \nabla_1 G\cdot\mu + N\cdot\nabla_2{}^{\mathrm{T}}F\cdot\lambda = 0 \qquad & S^* \\ f + \lambda\cdot F + (N\cdot\square G - HG)\cdot\mu = 0 \qquad & S^* \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 λ、μ 为拉氏乘子。

证明：设 Lagrangian 函数

$$L = f\mathrm{d}\Omega + \lambda\cdot(\int_\Omega F\mathrm{d}\Omega - \alpha) + \mu\cdot(\int_S G\mathrm{d}S - \beta)$$

根据变域上的变分法，泛函取驻值的必要条件为

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_\Omega (\delta\overline{Z}\cdot\{\nabla_1 f - \square\cdot\nabla_2{}^{\mathrm{T}}f + (\nabla_1 F - \square\cdot\nabla_2{}^{\mathrm{T}}F)\cdot\lambda\}\mathrm{d}\Omega \\ & + \int_S \delta\overline{Z}\cdot(\nabla_2 f\cdot N + \nabla_1 G\cdot\mu + N\cdot\nabla_2{}^{\mathrm{T}}F\cdot\lambda)\mathrm{d}S \\ & + \int_S \{f + \lambda\cdot F + (N\cdot\square G - HG)\cdot\mu\}\delta X_n \mathrm{d}S = 0 \end{aligned}$$

由 $\delta\overline{Z}$ 在 Ω 及 S 上的任意性和 δX_n 在 S 上的任意性可得(3.2)式。证毕。

这里称(3.2)式为变域上受等式约束问题的广义 Kuhn-Tucker 条件。同理，当问题(3.1)的约束条件是不等式约束时，其取极值的必要条件除了(3.2)式外，还应加上互补性条件，即

$$\begin{aligned} \lambda\cdot(\int_\Omega F\mathrm{d}\Omega - \alpha) = 0 \\ \mu\cdot(\int_S G\mathrm{d}S - \beta) = 0 \\ \lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

式(3.2)与(3.3)一起构成受不等式约束问题的广义 Kuhn-Tucker 条件(证明略)。

对于受微分约束的广义数学规划问题也有类似的结果[4]。

注：这里关于区域变化是在

$$\delta X = \delta X_n N$$

假设下得到的，但这仅仅是为了使形式简单而作的假设，同时这也是形状优化中常见的一种变化形式。

例：在无体力情况下，以自由边界为变化边界，并受等体积约束的势能问题。

其数学模型为

$$\text{求} \left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega V(\varepsilon)\mathrm{d}\Omega - \int_S T^0 . u\mathrm{d}S \\ \text{s.t.} \quad \int_\Omega \mathrm{d}\Omega = 1 \end{array} \right\} \text{的极值}$$

利用上述结果可得其广义 Kuhn-Tucker 条件为

$$\nabla\cdot(D:\nabla u) = 0 \tag{3.4a}$$

$$(D:\nabla u)\cdot N = 0 \tag{3.4b}$$

$$V(\varepsilon) = \lambda = \mathrm{const} \tag{3.4c}$$

其中(3.4a)、(3.4b)是平衡条件，而(3.4c)则是可变边界应满足的条件，文献[6]将它定义为形

状优化问题的积分性能准则。

4 结 论

可变区域问题的变分理论包含了经典变分理论，是对经典变分理论的推广。如同一般的泛函极值问题等价于一个微分方程，而变域上的泛函极值问题等价于一个自由边界问题。因此，可变区域问题的变分法为求解自由边界问题及形状优化问题提供了另一条途径。同时可变区域上的一阶、二阶变分理论以及广义数学规划理论结果为建立形状优化方法提供了数学工具。

致谢 本工作得到了何庆芝教授的热心指导、鼓励和帮助，在此致以衷心的感谢。

参 考 文 献

1 钱伟长．变分法及有限元．北京：科学出版社，1980
2 Cea J. Problems of Shape Optimal Design, *in Optimization of Distributed Parameter Structures*. Sijthoff and Noordhoff, Netherlands, 1981：1005～1048
3 Dems K and Mroz Z. Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis-II, structural shape variation. *Int. J. Solids Structures*, 1984, **20** (6)：527～552
4 刘洪秋．关于形状优化中的几个基本理论问题的研究：〔博士学位论文〕．北京：北京航空航天大学，1992
5 胡海昌．弹性力学的变分原理及其应用．北京：科学出版社，1981 年
6 Banichuvk N V. Optimality conditions and analytical methods of shape optimization. in *Optimization of Distributod Parameter Structures*. Sijthoff and Noordhoff, Netherlands. 1981, 973～1004
7 Liu H Q and Xia R W. First and second order sensitivity analysis of shape optimization based on variational method. *ISAOC* 89, Dalian, China
8 Avriel M. *Nonlinear Programming Analysis and Methods*. Prentice-Hall, 1976.

The Variational Method on Variable Domain and Generalized Mathematical Programming Problem

Liu Hongqiu
(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing, 100080, P. R. China)
Xia Renwei
(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083, P. R. China)

Abstract

Based on the definition of the variation, the variational method of a functional defined on a variable domain or a variable boundary of domain is obtained. By use of the variational method, the potential energy principle of a elastic system on a variable domain is discussed. On the other hand, corresponding to the classical mathematical programming, the generalized mathematical programming problem——a constrained optimum problem on a variable domain is researched and the generalized Kuhn-Tucker condition is given.

Key words: variable domain, variational method, generalized mathematical programming, functional

书　讯

向读者推荐《高等计算结构动力学》一书

本书是《计算结构动力学》(高教社 1989)的姐妹篇，是作者们多年来结合工程实际问题，对结构动力分析的一些没有完全解决的问题，进行研究工作的总结，而不是系统的理论著作。这是作者们多年耕耘的成果，值得借鉴，特此推荐。

本书共分三章。第一章阐述框架结构弹塑性动力分析的各种模型、滞回曲线以及相应参数的计算和实验方法，并对各种逐步积分方法的格式、精度、稳定、人工阻尼和超越等性质在理论上进行了详细的阐述。对掌握结构动力弹塑性分析的逐步积分法颇为有益。其中作者提出的二次近似加速度法具有三阶精度和较小人工阻尼且无超越性质等优点，颇具特色，在学术界有一定影响。书中的几个弹塑性结构动力分析的算例与震害调查和实验结果吻合较好，为抗震结构的弹塑性分析提供了有效的方法。对框架结构进行弹性动力分析的精确解法，避免了集中质量法和一致质量法将结构构件的分布质量人为地集中或分配到节点上所带来的误差，也是很有意义的成果。对框架结构串联多自由度简化体系的动力分析中的等效刚度系数的确定提出了参数识别方法，精度相当高，有很大应用价值。

第二章对结构线弹性分析中的一些方法作了进一步发展。首先对修正振型迭加法，考虑了高阶振型的影响，提出了有关的误差分析方法。其次是对动应力分析中的局部效应，考虑了构件分布惯性力的影响，其精度比应用集中质量法为高。第三是对板杆组合结构的动力稳定问题利用摄动法进行了初步分析，确定出不稳定区。最后对深梁、厚板、厚壳等考虑了沿厚度方向的剪切变形影响，采用余能原理进行了动力分析探讨。

第三章是关于复杂工程结构动力分析的一些近期研究进展，包括子空间迭代法在多重子结构分析中的高效实施，这对于大型结构的振动本征问题是很具特色的工作；三维结构抗震分析的反应谱方法，给出了现行抗震规范反应谱算法的理论依据；以及计算平稳随机结构响应的高效精确方法，比现有方法的计算速度有成量级的提高。其中一些方法已在工程应用中发挥了重要作用。本书获 1993 年辽宁省优秀著作二等奖。

（钟万勰）