维普资讯 http://www.cqvip.com

1997年 11 月　　西北工业大学学报　　Nov. 1997
第15卷第4期　JOURNAL OF NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY　Vol. 15 No. 4

数值模拟二元喷管的三维可压粘性流场

尤迎玫①　赵桂萍②　沈慧俐③

摘　要　发展了一种用扫描有限元素法求解二元喷管内部湍流流场的数值模拟方法，并提出了N－S方程中二阶导数项新的离散方法，推导了更完善、更简洁的扫描有限元方程的表达式。用本文发展的方法对二维平面收扩喷管、两个大宽高比的二元喷管（宽高比分别为7和4）及其圆转方转接段的三维粘性流场等算例的计算结果表明，该方法具有较宽广的适用范围，有较高的应用和研究价值。

关键词　扫描有限元素法，二元喷管，圆转方转接段，N－S方程
中图分类号　O354.2　O357.5

引　言

有限元法应用于流场计算虽然时间较短，但由于其网格容易生成，并能很好地模拟物面，反映物面的影响，近年来在流体力学中得到了广泛应用。扫描有限元法在保持了传统有限元的上述优点以外，又不必构造适用于整体的泛函和集合单元方程，而直接应用控制方程在每一单元上建立有限元方程，并逐块求解，从而避免了求解一个包括全部节点未知量的大型非线性方程组，故可以方便地求解N－S方程或欧拉方程。此外根据其逐块扫描的特点，可以在计算域内不同的区域，根据流动特征采用不同的单元与格式进行计算[1]。

喷管是发动机的重要部件，它的性能直接影响推力、阻力、机身后体阻力以及飞行器的隐身性能、机动性能。二元喷管不但具有良好的内特性，还具有良好的红外特性，雷达散射面积也较小，增强了飞行器的隐身能力，也很容易实现推力换向、反推力，使飞行器着陆和起飞滑跑距离缩短，实现更陡的控制俯冲和转弯前的更快减速，使飞行器的机动性能得到改善[2]。然而，喷管需要一圆转方过渡段与涡轮相衔接。从设计角度讲，过渡段的型面设计较困难，它内部的流动也较为复杂。研究圆转方过渡段与矩形喷管有着重要的意义，国内外已经大力开展这方面的研究。扫描有限元法在求解这样的复杂可压粘性流场，显示出了它独到的优越性。

1　扫描有限元法

1.1　控制方程

时间相关三维直角坐标系强守恒形式的Navier－Stokes方程可写为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial E}{\partial z}=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial z} \tag{1}$$

① 西北工业大学博士生　② 中国科学院力学所博士后　③ 西北工业大学教授

本文收到日期：1996－04－15

维普资讯 http://www.cqvip.com

式中，U、F、G、E、H、Q、S 为向量表达式[2]。

扫描有限元法要求将方程写成积分形式，对(1)进行积分得

$$\frac{\partial U}{\partial t}\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}\left(-\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{2}$$

1.2 等参变换

在有限元分析中，一个重要的问题是选择元素和在元素内定义合适的插值函数，目的是对每一个单元内的变量变化规律通过插值函数进行有限元逼近。本文选用二十七节点六面体单元，插值函数为双二次型不完全六次式

$$\Phi(\alpha,\beta,\gamma)=(a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3)\ (b_1\beta^2+b_2\beta+b_3)\ (c_1\gamma^2+c_2\gamma+c_3) \tag{3}$$

这样选取的插值函数具有对称性，在边界上 C^0 连续，并且每个方向上都有常数项、一次项、二次项来表征位移、速度、加速度或者粘性项的变化。根据插值函数在各节点的性质，可求得各节点的插值函数

$$\begin{aligned}
&N_i=0.125\alpha\beta\gamma(\alpha+\alpha_i)(\beta+\beta_i)(\gamma+\gamma_i) && i=1,3,5,7,19,21,23,25\\
&N_i=0.25\alpha\beta(1-\gamma^2)(\alpha+\alpha_i)(\beta+\beta_i) && i=2,6,20,24\\
&N_i=0.25\alpha\gamma(1-\beta^2)(\alpha+\alpha_i)(\gamma+\gamma_i) && i=4,8,22,26\\
&N_i=0.25\beta\gamma(1-\alpha^2)(\beta+\beta_i)(\gamma+\gamma_i) && i=10,12,14,16\\
&N_i=0.5\alpha(1-\gamma^2)(1-\beta^2)(\alpha+\alpha_i) && i=9,27\\
&N_i=0.5\beta(1-\alpha^2)(1-\gamma^2)(\beta+\beta_i) && i=11,15\\
&N_i=0.5\gamma(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(\gamma+\gamma_i) && i=13,17\\
&N_i=(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2) && i=18
\end{aligned} \tag{4}$$

进行等参变换

$$x=\sum_{i=1}^{27}x_iN_i\qquad y=\sum_{i=1}^{27}y_iN_i\qquad z=\sum_{i=1}^{27}z_iN_i \tag{5}$$

这样物理域转换为标准计算域。此时给定 α、β、γ 值，即可求出

$$\begin{aligned}
&[\partial N_i/\partial x\quad \partial N_i/\partial y\quad \partial N_i/\partial z]^{\mathrm{T}}=J^{-1}[\partial N_i/\partial\alpha\quad \partial N_i/\partial\beta\quad \partial N_i/\partial\gamma]^{\mathrm{T}}\\
&[\partial^2N_i/\partial x_j\partial x\quad \partial^2N_i/\partial x_j\partial y\quad \partial^2N_i/\partial x_j\partial z]^{\mathrm{T}}=J^{-1}[\partial N_{ix_j}/\partial\alpha\quad \partial N_{ix_j}/\partial\beta\quad \partial N_{ix_j}/\partial\gamma]^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{6}$$

式中 $N_{ix_j}=\partial N_i/\partial x_j$，$x_j$ 为 x，y，z，J 为雅可比矩阵。各流场变量 Φ 及其一阶、二阶导数可利用下式求出

$$\Phi=\sum_{i=1}^{27}\Phi_iN_i\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{27}\Phi_i\frac{\partial N_i}{\partial x_j}\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_k}=\sum_{i=1}^{27}\Phi_i\frac{\partial^2N_i}{\partial x_j\partial x_k} \tag{7}$$

所有网格上只与几何形状有关的导数可以预先统一求出，无需用二维计算方法[3]来求得导数，新的计算公式三维流场的存储量为 9×27×网格数，而用原来的算法却要存储 9×27×27×网格数。

1.3 建立扫描有限元方程

采用 Jameson[4]发展的多步龙格-库塔法进行时间推进，完成对方程的时间离散，推进公式为

$$U^{(m)}=U^{(0)}+\frac{1}{5-m}(\Delta U+D)^{(m-1)}\qquad m=1,\cdots,4 \tag{8}$$

式中 D 是二阶及四阶人工粘性项。经过时间域上的离散，方程(2)可写成

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$\Delta U=\frac{\Delta t}{V}\iiint_{\Omega}\left(-\sum_{i=1}^{27}F_i\frac{\partial N_i}{\partial x_i}-\sum_{i=1}^{27}G_i\frac{\partial N_i}{\partial y_i}-\sum_{i=1}^{27}E_i\frac{\partial N_i}{\partial z_i}+\sum_{i=1}^{27}Fvisc^i\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{9}$$

其中,$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,$Fvisc^i$ 是适合于扫描有限元离散的第 i 节点的粘性通量,在动量方程中为

$$Fvisc_j^i=\mu\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\partial x_k}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_k}\right]^i \tag{10}$$

在能量方程中为

$$Fvisc^i=\mu u_j\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\partial x_k}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_k}\right]^i \tag{11}$$

其中的紊流粘性系数由 B-L 湍流模型求出。式(9)中的粘性通量与(7)式高度统一。

利用关系式(6)、(7),在(9)式中对 x、y、z 的偏导数可化为对 α、β、γ 的偏导数,对 x、y、z 的积分转化为对 α、β、γ 的积分,积分域为 $-1\to+1$ 的正方体,并利用高斯公式将其离散化

$$\Delta U=\frac{\Delta t}{V}\sum_{k=1}^{27}W_k\sum_{j=1}^{27}W_j\sum_{i=1}^{27}W_i f(\alpha_i,\beta_j,\gamma_k)\,|J(\alpha_i,\beta_j,\gamma_k)| \tag{12}$$

式中 W_i,W_j,W_k 为高斯积分权因子,k 为高斯积分点数,α_i,β_j,γ_k 为积分基点在 i、j、k 三个方向的坐标,本文所取高斯积分点为中心节点。

1.5 网格生成

涡轮出口的圆截面转变为喷管的矩形出口截面,这一变化过程是由圆→超椭圆→矩形等面积变化而来。使用 O 型网格在矩形截面网格分布不合理,而用一般的代数方法生成的 H 型网格在圆及椭圆截面壁面正交性又不好。本文用 TTM 网格生成法先生成正交性较好的粗网,然后在壁面处再进行加密。二元喷管的几何形状及网格见图 1。

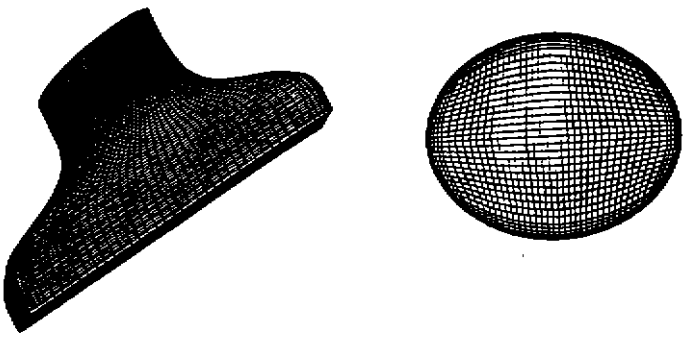
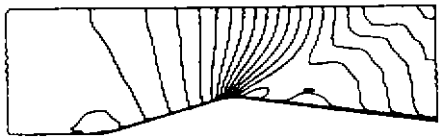


图 1　二元喷管网格

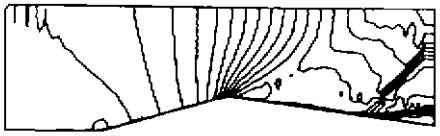
2 算例分析

图 2 所示是一个二维平面收扩喷管的计算结果。由于流场的几何形状对称,流动对称,所以可取二分之一流场作为计算域。为检验本文所发展的方法及开发的程序的正确性,Z 方向的两个壁面按欧拉流处理,以便与实验数据[5]进行对比。本文计算了这个喷管落压比为 2 和 4 两种工况下的流场,图 2a、图 2b 是等马赫线图,在落压比为 2 的工况下,喷管出口附近的壁面已产生分离,图 2c、2d 是壁面压力分布曲线。由图可以看出计算结果与实验结果[5]相当吻合,证明了所开发的程序的精确性和实用性。

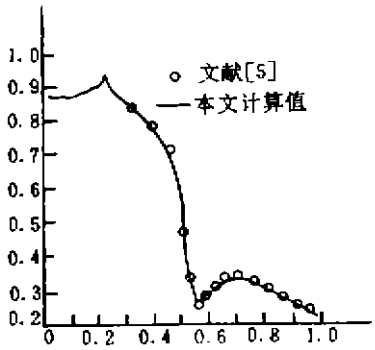
维普资讯 http://www.cqvip.com



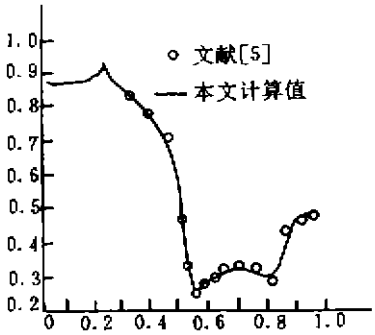
a 等马赫线(落压比为4)



b 等马赫线(落压比为2)



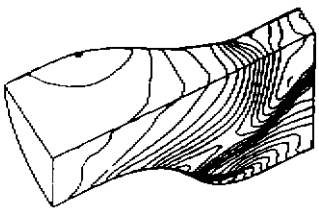
c 壁面压力分布曲线(落压比为4)



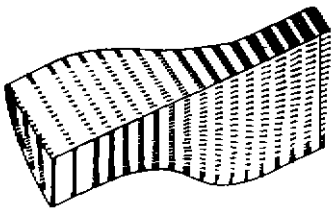
d 壁面压力分布曲线(落压比为2)

图2 收扩喷管计算结果

图3、图4分别为宽高比 B 为7和4的二元喷管及其圆转方转接段三维流场的计算结果。因为几何域、流动均对称，取1/4流场为计算域。图中给出了流场两个对称面上的等马赫线和矢量。在图3中，由等值线可以看出在 Z 方向的突扩处有较大的分离区，这一分离区使流通面积急剧减小，以致气流达到超音速，并产生一道斜压缩波。由横截面矢量图可以看出由粘性影响而产生的二次流及涡。

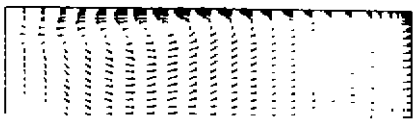


a 对称面上的等马赫线



b 对称面上的矢量图

c 第九十横截面的矢量图

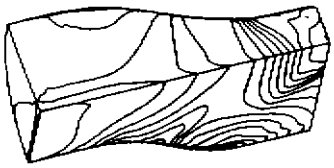


d 第九十八横截面的矢量图

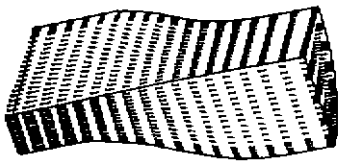
图3 宽高比 $B=7$ 的二元喷管计算结果

维普资讯 http://www.cqvip.com

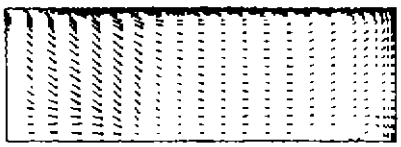
图 4 与图 3 相比分离区较小，而且分离后再附。在出口壁面附近有一微小分离区。由图 4c、4b 横截面矢量图，可以看出喷管内有二次流，在出口处有涡。出口处的涡正是减少红外辐射所需要的，它将周围的冷气迅速卷吸入射流，使射流温度迅速降低，从而降低红外辐射，增强飞行器的隐身性。



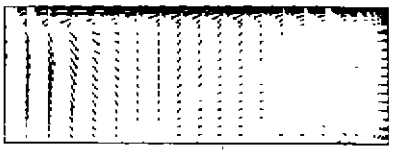
a　对称面上的等马赫线



b　对称面上的矢量图



c　第九十横截面的矢量图



d　第九十八横截面的矢量图

图 4　宽高比 $B=4$ 的二元喷管计算结果

3　结　论

本文给出了一种新的二元喷管三维粘性流场计算方法，发展了该方法的三维程序，并得到了较好的计算结果：

3.1　本方法能够较好地计算型面变化剧烈的内流流场，较准确地展现粘性影响所带来的细微结构。

3.2　扫描有限元素法有较广泛的适用范围，算法简捷且易于实现，有广泛的应用前景。

参 考 文 献

1　沈慧俐，纪名刚主编．流体有限元素法基础．西安：西北工业大学出版社，1988

2　黄志澄．高超声速飞行器空气动力学．北京：国防工业出版社，1995

3　郑小清．跨音速外部绕流扫描有限元计算：[硕士论文]．西安：西北工业大学，1986

4　Martinelli L, Jameson A. A Multigrid Method for the Navier-Stokes Equations. AIAA-86-0208

5　Wilmoth R G, Leavitt L D. Navier-Stokes Predictions of Multifunction Nozzle Flows. NASA-871753

维普资讯 http://www.cqvip.com

Numerical Analysis of Three - Dimensional Viscous Compressible Flowfields of Rectangular Nozzle

You Yingjiu *Zhao Guiping* *Shen Huili*
(Department of Aero - Engines
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

In this paper, an approach is advanced to simulate the inner turbulent folwfields of rectangular nozzle with the sweep finite element method. A new discretization method for the second derivatives in N - S (Navier - Stokes) equations is presented and the formulations of the sweep finite element equations, which are better and simpler than previous formulations, are derived. With this approach, some examples are calculated, including the flowfields of the 2 - D C - D (Convergent - Divergent) nozzle, the rectangular nozzle and the circular - to - rectangular transition duct with width to height ratio of 4 and 7. The results are in good agreement with experimental data and indicate the efficiency and accuracy of the method.

Key words sweep finite element method, rectangular nozzle, transition duct, N - S (Navier - Stokes) equations