

一种新的随机减量函数的构造及分析

聂雪媛¹, 郭杏林², 刘彬¹, 时忠民³, 丁桦^{*1}

(1. 中国科学院力学研究所, 北京 100190; 2. 大连理工大学, 大连 116023;
3. 中国海洋石油总公司研究中心, 北京 100027)

摘要: 当外激励为均值为零的平稳随机过程时, 系统输出响应的随机减量函数代表了系统的自由衰减振动。但当外激励不是零均值的平稳随机过程时, 这种传统的随机减量函数在某些情况下, 将不再具有上述性质。为进一步拓宽随机减量函数的应用范围, 本文从分析 Brown 运动的随机过程的表征中得到启发, 在传统的随机减量函数的基础上, 提出一种新的随机减量函数的构造形式, 并对同一系统在相同触发条件下, 受不同外激励作用时的传统随机减量函数与新构造的随机减量函数进行了对比。数值计算和实验结果表明, 当外激励为零均值的随机过程时, 新旧随机减量函数在反映系统自由振荡的效果上基本相同, 但在外激励为其他情况下, 新构造的随机减量函数在性态和稳定性上明显优于传统随机减量函数。

关键词: 随机减量函数; 自由响应信号; 随机激励; Brown 运动
中图分类号: O327; TH113.1 **文献标识码:** A

1 引言

在结构振动分析中, 随机减量技术 (Random Decrement Technique) 是从结构随机响应信号获取结构自由衰减信号的一种非常方便有效的方法。由于很多结构, 特别是现代的大型复杂结构, 如高层建筑、桥梁及海洋平台等, 处于复杂的环境载荷作用下, 这些环境载荷经常是无法测量的, 而且要实现对这些结构的人工瞬态激振是难以实现的或者花费太大。而随机减量技术的最主要的特点就是它对外激励只有定性要求, 仅仅对响应的信息做数据处理。

振动特征分析的随机减量技术是由 Cole^[1,2] 在七十年代首先提出的。随机减量技术的基本思想^[3] 是建立在线性系统的叠加原理基础上的, 利用测量的响应信号构造出表征结构自由振动的响应信号, 即表征结构特性的一个自由衰减信号。由于随机减量技术的实现简单, 同时在实际工况下可以实现数据实时分析, 现在已经成为一项提取结构自由衰减信号非常成熟的技术, 并且在振动模态分析^[4]、结构损伤检测等^[5] 领域中得到广泛的应用。

随机减量技术的核心是通过随机减量函数给出具有系统自由振动特征的系统近似齐次解。但当随机外激励的均值不为零时, 传统的随机减量函数在某些情况下将不再具备这一特征。

在实际应用中, 很多时候受环境、测量等条件的限制, 信号中夹杂着很多非线性噪音 (如海洋波浪的形状是比 Gauss 分布更复杂的分维 Brown 运动分布, 这就导致海洋结构所受波浪力统计特征也具有分维特征; 复杂机械运转中由于碰撞、摩擦的存在使得系统噪音也具有一定的分维特征等), 且这些噪音不一定满足均值为零的条件, 使得传统的随机减量技术的应用受到一定的限制。

与通常在对传统随机减量技术的研究和改进时集中考虑触发条件的选取的不同, 本文根据作者在对 Brown 运动和分维 Brown 运动 (这是由于, 很多随机外激励可以用 Brown 运动和分维 Brown 近似的表征分析中得到的启发, 从随机减量函数的构造形式入手, 提出一种新的随机减量函数的构造形式, 希望通过这种构造给出的随机减量函数能适应更广的应用范围和得到更可靠的结果。

2 随机减量技术介绍

随机减量技术的核心是利用在随机激励下的系统的响应信号构造一个系统的自由振荡信号, 即

收稿日期: 2007-04-23; 修改稿收到日期: 2008-07-03.
作者简介: 聂雪媛 (1978-), 女, 博士, 助研;
丁桦* (1960-), 男, 博士, 研究员.

系统的一个齐次解。在随机激励满足零均值的 Gauss 分布的情况下,这种构造非常简单。

对于线性系统 $Lx(t) = f(t)$, $x(t)$ 为随机激励下的系统响应信号。定义

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i + \tau) \quad (1)$$

式中 $\{t_i\}$ 为按某种条件给出的采样点序列,式(1)即为传统的随机减量函数的定义。此时,随机减量函数 $\bar{x}(t)$ 将满足方程:

$$L \bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(t_i + \tau) = F(t) \quad (2)$$

当随机外激励 $f(t)$ 是均值为零的 Gauss 分布时,外激励在采样点序列 $\{t_i\}$ 上的统计平均值在一定条件下(采样点序列 $\{t_i\}$ 满足水平触发,零穿越触发等)可近似为零。也就是说,函数 $\bar{x}(t)$ 可看作系统的齐次解,即代表了系统的自由衰减振动响应。

一般地,对于两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$,自随机减量函数和互随机减量函数可分别定义为

$$D_{XX}(\tau) = E[X(t + \tau) | T_{X(t)}] \quad (3a)$$

$$D_{XY}(\tau) = E[X(t + \tau) | T_{Y(t)}] \quad (3b)$$

式中 $D_{XX}(\tau)$ 为自随机减量函数, $D_{XY}(\tau)$ 为互随机减量函数, $T_{X(t)}$ 和 $T_{Y(t)}$ 为随机减量函数触发条件。

对于随机减量函数的严格的数学描述,由 Vandiver 等^[6] 首先明确提出:在满足高斯分布、均值为零的随机过程这一个特定的情况下,随机减量函数正比于相应随机信号的自相关函数。随后很多学者又进一步得到了互随机减量函数与响应相关函数的关系^[7,8]。但这些推导都是基于水平穿越触发条件,即触发条件为常数值 $T_{X(t)} = C$ 。而根据一般形式的触发条件,Asmussen^[9] 和 Brincker 等^[10] 推导出了随机减量函数与响应相关函数之间更一般性的数学关系,即对于一般的触发条件可表示为

$$T_{X(t)} = \{ X(t) = x \mid a_1 \leq x < a_2 \}$$

$$\dot{X}(t) = \dot{x} \mid b_1 \leq \dot{x} < b_2 \}$$

有

$$D_{XX}(\tau) = \frac{R_{XX}(\tau)}{\bar{x}} \cdot \bar{a} - \frac{R_{XX}(\tau)}{\dot{\bar{x}}} \cdot \bar{b} \quad (4a)$$

$$D_{YX}(\tau) = \frac{R_{YX}(\tau)}{\bar{x}} \cdot \bar{a} - \frac{R_{YX}(\tau)}{\dot{\bar{x}}} \cdot \bar{b} \quad (4b)$$

式中 $R_{XX}(\tau)$, $R_{XX}(\tau)$, $R_{YX}(\tau)$ 和 $R_{YX}(\tau)$ 为随机响

应的自相关函数和互相关函数及其导数, \bar{x} 和 $\dot{\bar{x}}$ 为随机响应的方差及其导数, $\bar{x} = R_{XX}(0)$ 和 $\dot{\bar{x}} = R_{\dot{X}\dot{X}}(0)$, 其中

$$\bar{a} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} x p_X(x) dx}{\int_{a_1}^{a_2} p_X(x) dx}, \quad \bar{b} = \frac{\int_{b_1}^{b_2} \dot{x} p_{\dot{X}}(\dot{x}) d\dot{x}}{\int_{b_1}^{b_2} p_{\dot{X}}(\dot{x}) d\dot{x}}$$

式中 $p_X(x)$ 和 $p_{\dot{X}}(\dot{x})$ 为概率分布密度函数。

对于随机减量信号的基于触发条件的条件方差,Brincker 和 Chiu Jen Ku^[5] 给出了相应的结论。

可以看出,随机减量函数触发条件的选择对于随机减量技术的应用是一个非常重要的研究环节。另一方面,外激励是否满足零均值 Gauss 分布的特征(尽管它只是充分条件而非必要条件)也是制约随机减量技术更广泛应用的障碍。

3 新的随机减量函数的构造

前面说到,随机减量技术的核心是通过随机减量函数(1)得到一个系统的自由振动响应,即系统的一个(近似的)齐次解。但在随机外激励的均值不为零时传统的随机减量函数并不总是具备这一特征,这样就可能无法通过它进行系统的参数估计。作者从 Brown 和分维 Brown 运动(很多实际的随机外激励可以用它们很好的近似)的表征中得到启发,尝试着构造一种新的随机减量函数,希望它在较一般的情况下都能够较好的给出系统的自由振动特征。

对于 Brown 运动 $B(t)$, 概率分布函数为

$$P\{ [B(t+s) - B(t)] \leq x \} = \frac{1}{\sqrt{2s}} e^{-\frac{x^2}{2s}} \quad (5)$$

该过程是一个自相似数 - Hurst 数为 1/2 的自相似过程。

Brown 运动 $B(t)$ 不是一个时间可微的函数,但仍可用以下符号记作^[11]:

$$B(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau \quad (6)$$

式中 $w(\tau)$ 为一稳态 Gauss 白噪声。

在下面的讨论中,对于任意离散信号 X , 记 $X_i = X(t_i)$ 。考虑到 $B(t+s) - B(t) \sim \sqrt{s}$, 对于一个离散的 Brown 运动序列 $B_i = B(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$; $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 近似地有

$$B_i = \prod_{j=1}^i w(\tilde{t}_j) (t_j - t_{j-1})^{1/2} \quad (7)$$

$i = 1, \dots, n; \tilde{t}_j \in [t_{j-1}, t_j]$

对于等间距的时间序列 t_i , 任意 i 都有 $t_i - t_{i-1} = t_0$. 此时, t 可看作作用到 $w(\cdot)$ 上的一个比例系数, 仅仅影响 $w(\cdot)$ 的幅值, 所以上式可写为

$$B_i = \prod_{j=1}^i w(\tilde{t}_j) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (8)$$

$$\text{或} \quad w_i = B_i - B_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (9)$$

由式(9)可看出, 对于给定的 Brown 运动随机变量, 可构造出一个具有 Gauss 分布的随机变量, 这样就有可能构造一个新的随机减量函数, 使得它的均值为零。

对于随机响应信号 $x(t)$, 定义新的随机减量函数:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\cdot) &= \mathcal{D}_{x_i - x_{i-1}, x_i - x_{i-1}}(\cdot) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x(t_i + \cdot) - x(t_{i-1} + \cdot)) / T_{x_i} \quad (10) \end{aligned}$$

$$\text{令 } y(t_i + t) = x(t_i + t) - x(t_{i-1} + t)$$

将其代入式(10)得

$$\mathcal{D}(\cdot) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(t_i + \cdot) \Big| T_{y_i} = \mathcal{D}_{yy}(\cdot) \quad (11)$$

即 $\mathcal{D}(\cdot)$ 为新的随机响应信号 $y(t)$ 的传统的随机减量函数, 它满足

$$\begin{aligned} L(\cdot) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Lx(t_i + \cdot) - Lx(t_{i-1} + \cdot)) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(t_i + \cdot) - f(t_{i-1} + \cdot)) \quad (12) \end{aligned}$$

若外激励函数 $f(t)$ 是一 Brown 运动的随机过程, 由式(9)可知

$$f(t_i + \cdot) - f(t_{i-1} + \cdot) = w(t_i + \cdot)$$

将其代入式(10)得

$$L(\cdot) = L\mathcal{D}_{yy}(\cdot) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w(t_i + \cdot) \quad (13)$$

当 N 足够大时, $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w(t_i + \cdot) \sim 0$, $\mathcal{D}_{yy}(\cdot)$ 是系统式(12)的近似齐次解, 即代表了系统自由衰减振动。

当 $f(t)$ 本身为均值为零的 Gauss 过程时, $(f(t_i + \cdot) - f(t_{i-1} + \cdot))$ 的均值也将为零, 只是有可能多了一些高频成分。因此, 式(11)所给出的随机减量函数与传统的随机减量函数相比, 具有更广的应用范围。

定性地, $y(t_i + t) = x(t_i + t) - x(t_{i-1} + t)$ 所对应的随机过程应该比 $x(t_i + t)$ 对应的随机过程

更平稳, 因而能够期待更好的结果。同样的过程可以重复下去, 但是当次数多后, 计算误差带来的噪音将掩盖信号的本质。

在下一小节中, 将通过具体算例将新构造随机减量函数与传统的随机减量函数进行比较。

4 算 例

为了比较本文构造的新的随机减量函数与传统的随机减量函数的效果, 引入三个算例来进行说明(限于篇幅, 文中仅给出了使用水平穿越触发条件产生的随机减量函数, 对于其他触发条件产生的随机减量函数可得到类似的结果)。

算例 1 为一外激励为 Brown 运动的随机过程的单自由度系统, 系统特征参数: 刚度 $K = 4 \times 10^7$ N/s, 质量 $M = 1 \times 10^6$ kg, 阻尼 $C = 1.04 \times 10^6$ N · s/m。图 1(a) 为外载荷时程曲线, 图 1(b) 为响应时程, 图 1(c) 为归一化的随机减量函数(新旧对比), 图 1(d) 为对应随机减量函数的载荷时程(新旧对比)。从图 1(c) 的对比中可以看出, 新构造的随机减量函数比传统的具有非常显著的优势, 其性态要远好于传统的随机减量函数。另外, 从图 1(d) 的对比中可以看出, 新构造的随机减量函数对应的载荷时程曲线的幅值要远小于传统随机减量函数对应的载荷时程的幅值, 性态也较稳定, 即新的随机减量函数所包含的自由振荡信息远大于传统随机减量函数所包含的系统的自由振荡信息。也就是说, 当外激励为 Brown 运动的随机过程时, 新构造的随机减量函数具有明显的优势。

算例 2 为载荷是零均值、高斯平稳随机分布的单自由度系统, 系统特征参数同算例 1。图 2(a) 为响应时程, 图 2(b) 为随机减量函数(新旧对比), 图 2(c) 为滤波后的载荷时程。从经过滤波后的载荷幅频图 2(d) 看, 对系统起作用的频段内的载荷时程对于新构造的和传统的随机减量函数基本是一致的。也就是说对于零均值的 Gauss 激励, 新构造的随机减量函数可以替代传统的随机减量函数。

算例 3 为对一平台模型结构的实验室实测数据。实验对象为一海洋平台模型, 模型设计为八腿导管架平台的缩尺模型, 具有四层水平甲板, 总质量约为 1.5 千克, 模型结构高 4.643 米。在平台结构的 2.845 米处, 进行水平单点加载, 施加零均值、高斯平稳随机分布的载荷 $F(t)$ 。应该指出的是, 由于生成的随机分布载荷受算法限制、误差及

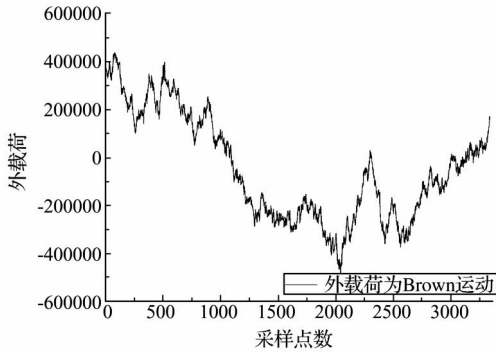


图 1(a) 外载荷时程曲线
Fig. 1(a) Curve of excitation

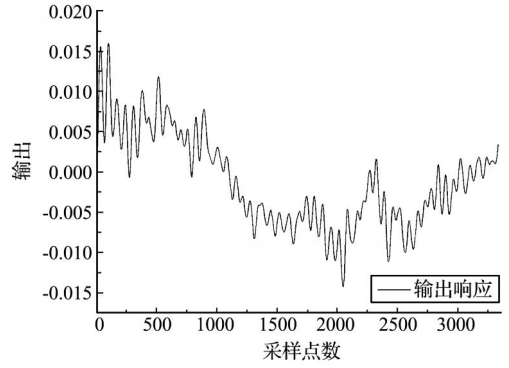


图 1(b) 响应时程曲线
Fig. 1(b) Curve of response signature

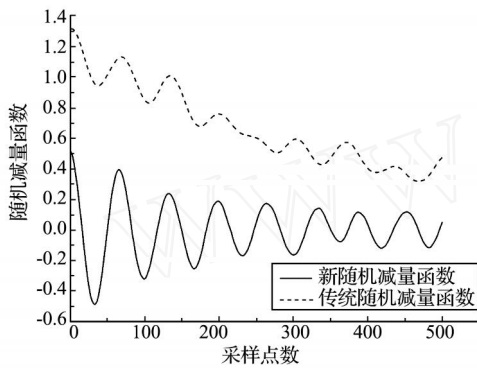


图 1(c) 归一化的随机减量函数
Fig. 1(c) Two normalized RD signatures

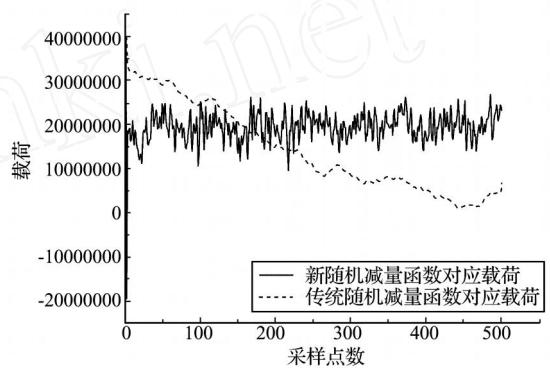


图 1(d) 随机减量函数对应载荷
Fig. 1(d) Corresponding loads of two RD signatures

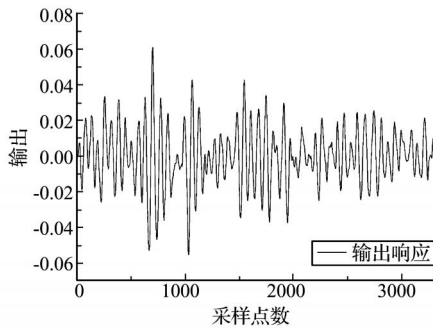


图 2(a) 响应时程曲线
Fig. 2(a) Curve of response

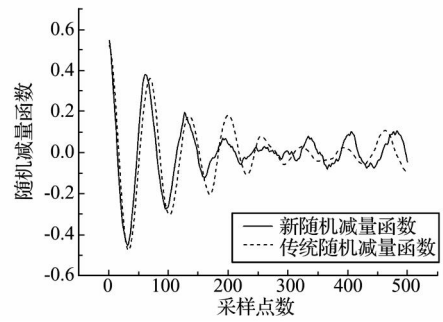


图 2(b) 归一化的随机减量函数
Fig. 2(b) Two normalized RD signatures

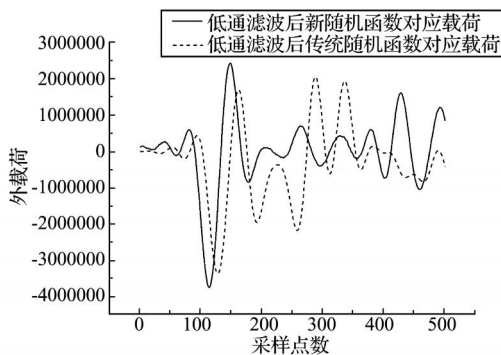


图 2(c) 滤波后的载荷时程曲线
Fig. 2(c) Curves of filtered loads

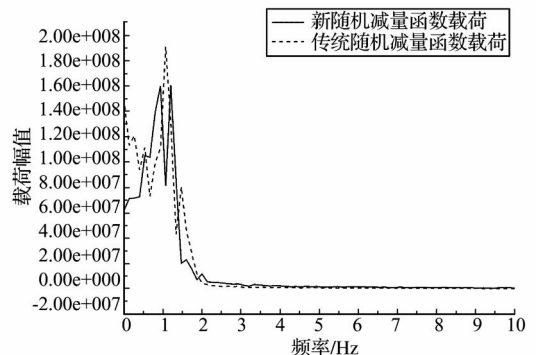


图 2(d) 滤波后载荷幅频曲线
Fig. 2(d) Frequency responses of filtered loads

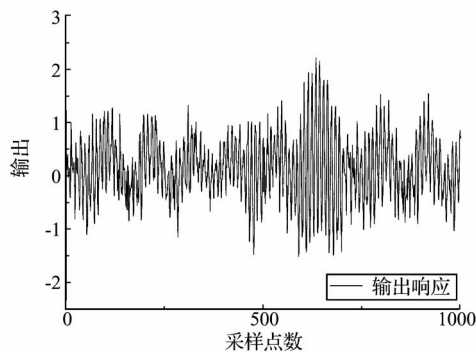


图 3(a) 响应曲线

Fig. 3(a) Curve of response

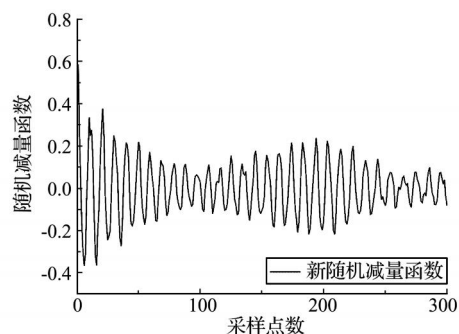


图 3(b) 新随机减量函数

Fig. 3(b) New RD signature

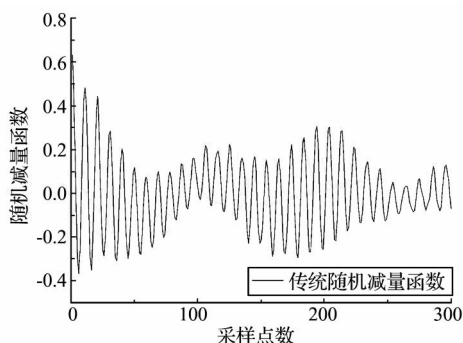


图 3(c) 传统随机减量函数

Fig. 3(c) Traditional RD signature

执行机构带来的噪声,并不严格服从零均值的高斯平稳随机分布。图 3(a) 为响应信号,图 3(b) 为新随机减量函数,图 3(c) 为传统随机减量函数。从图中可以看出,对于实测信号,新构造的随机减量函数较之传统的也具有较好的特性。这有可能源于实测信号对应的载荷,并不是理想的零均值、高斯平稳随机分布的载荷,这样新的随机减量函数就显出了优势。

5 结 论

本文从基于 Brown 运动随机变量可以表征为 Gauss 随机变量函数的特征出发,构造出一种新的随机减量函数,并对其进行了分析说明。通过数值算例验证了新的随机减量函数的有效性。从本文的分析和讨论可以得到以下几点结论:

(1) 随机减量技术在实际应用中,新构造的随机减量函数在任意一种触发条件下提高了有限信号长度中样本的个数,很好的增加了子信号的平均次数,改善平均效果。

(2) 新构造的随机减量函数对外激励的限制有所放松,同时有着较好的抑止各种噪音的特性。

(3) 新构造的随机减量函数,对于能够由传统

随机减量技术处理的问题有着与传统方法几乎一致的效果,但同时它能够处理一些传统方法无法很好处理的问题,因而在较广泛应用中能够给出较可靠的结果。

本文的工作是一种新的尝试,相信其后续的工作将会更有助于随机减量技术地改进和发展,使之更有效、可靠。

参考文献(References):

- [1] COLE H A. On-the-line analysis of random vibration [A]. AIAA/ASME 9 th Structure, Structural Dynamics and Materials Conference [C], 1968. AIAA Paper. 268-288.
- [2] COLE H A. Method and apparatus for measuring the damping characteristic of a structure [P]. United State: 3,620,069, 1971.
- [3] 陈德成, 姜节胜. 随机减量技术的方法与理论[J]. 振动与冲击, 1984, 3(4): 31-39. (CHEN De-cheng, JIANG Jie-sheng. Method and theory of random decrement technique [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 1984, 3(4): 31-39. (in Chinese))
- [4] IBRAHIM S R, MIKULCIK E C. A method for the direct identification of vibration parameters from free

- responses. Shock and Vibration Bulletin, Bulletin 47, 1977.
- [5] CHIU J K. Random decrement based method for parameter identification of wind-excited building models using acceleration responses [D]. U. S. A. : Department of Civil Engineering, Colorado State University, 2004.
- [6] VANDIVER J K, Dunwoody A B, Campbell R B, Cook M F. A mathematical basis for the random decrement vibration signature analysis technique [J]. *Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design*, 1982, **104**:307-313.
- [7] BEDEWI N E. The mathematical foundation of the auto and cross-random decrement techniques and the development of a system identification technique for the detection of structural deterioration[D]. U. S. A : Department of Mechanical Engineering, University of Maryland, 1986.
- [8] 吴家驹. 随机减量特征矩阵和相关函数矩阵的关系 [J]. *应用力学学报*, 1987, **4** (3) : 1-10. (WU Jia-ju. The relationship between eigenvalue matrix and correlation function of random decrement [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1987, **4** (3) :1-10. (in Chinese))
- [9] ASMUSSEN J C. Modal analysis based on the random decrement technique application to civil engineering structures[D]. Denmark: Department of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg, 1997.
- [10] BRINCKER R, KRINK S, KIRKEGAARD P H, RYTTER A. *Identification of Dynamical Properties from Correlation Function Estimates*[M]. Bygningstatiske Meddelelser, 1992, **63**(1) :1-38.
- [11] GAO J B, CAO Y H, TUNG W W, et al. *Multi-scale Analysis of Complex time Series Integration of Chaos and Random Fractal Theory, and Beyond* [M]. Canada: John Wiley & Sons, Inc., 2007.

Development of a new random decrement function

NIE Xue-yuan¹, GUO Xing-lin², LIU Bin¹, SHI Zhong-min³, DING Hua^{*1}

(1. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. Dalian University of Technology, Dalian 116023, China;

3. Research Centre, China Ocean Oil Co., Beijing 100027, China)

Abstract: The random decrement (RD) signature of a system random response can represent the free decay vibration response of the system when the excitation force is a stationary stochastic process with zero mean. This traditional RD function cannot always possess the above characteristics for arbitrary random inputs. In order to extend RD technique to wider application area, motivated by the analysis of Brown motion, the construction of a new RD function was proposed. The traditional RD signatures and the new RD ones resulted from the same triggering condition were compared in three examples in which the response signals were obtained numerically and experimentally. The results indicate that the new RD signatures and the old ones can represent the free vibration response of the system while inputs are zero-mean stochastic process, and the former shows the better modality and stability than the latter while the other excitation forces are induced.

Key words: random decrement function; free response signature; stochastic excitation forces; Brown motion