

# 阿基米德原型桥的动力响应<sup>1)</sup>

张双寅

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘要:**以防涡激振动(VIV)为目的, 围绕阿基米德原型桥的初步设计, 讨论了SFT的动力响应问题。参照现有文献简要介绍了VIV的相关参数, 以及轴向力作用下梁振动特性; 分析了局部缺陷对连续梁振动特性的影响, 并以现有阿基米德原型桥设计参数计算了振动频率。

**关键词:**阿基米德桥, 涡激振动, 梁的自由振动

## 1 前言

阿基米德桥即悬浮在水中的管道(submerged floating tunnel-SFT), 是一种全新的跨越水域的交通形式<sup>[1]</sup>。它是利用阿基米德浮力定律使桥体浮于水中, 并借助浮力承受载荷, 即过往行人与车辆, 所以又称水中悬浮隧道。虽然 SFT具有很多优点, 但是迄今世界上还没有一座阿基米德桥建成。主要原因是人们对此结构没有经验, 尚有大量科学技术与工程问题需要解决<sup>[2]</sup>; 其中结构的静动力响应(例如地震和海浪作用下的响应)以及在偶发载荷安全问题是令人关注的问题。本文对SFT自由跨长, 以及相关的涡激振动(VIV)的主要参数进行了综述, 针对文献[3]的结果对轴向力作用下的管道振动性能及允许长度进行了讨论。对带裂纹及局部损伤连续梁的自由振动进行了分析, 并根据阿基米德原型桥的初步设计计算了其自振频率。

## 2 水下管道(SFT)自由跨长分析

水中悬浮隧道SFT 的允许跨长依赖管道的涡激振动(vortex induced vibration-VIV)<sup>[3]</sup>, 水下管道可能遭受涡激振动发生振动与疲劳破坏; 当涡脱(vortex-shedding)频率为结构自由振动频率的三分之一时将发生涡激振动。当涡脱(vortex-shedding)频率为结构自由振动频率的二分之一时将发生涡激振动频率的锁定(lock-in)。随着流体速度的进一步提高, 涡脱(vortex-shedding)频率将接近结构的自由振动频率, 由于共振发生, 结构振动的振幅将趋于很大, 引起振动破坏。设计规范必须计及这个因素。文献[3]对此问题进行了系统研究。

### 2.1 与 VIV 相关的涡脱参数(Vortex-shedding parameters)有如下几个

斯托哈数Strouhal Number  $S_t = \frac{f_s D}{U}$  是一个表示涡脱频率  $f_s$ 、管道直径  $D$ 、与流体速度关系的无量纲参数。

雷诺数是一个确定涡脱现象范围的无量纲参数:  $Re = \frac{UD}{\nu}$ , 其中  $\nu$  是流体的动黏性。当雷诺数处于亚临界( $300 < Re < 3 \times 10^5$ )及跨临界( $3.5 \times 10^5 < Re$ )范围时, 将出现涡脱现象。

<sup>1)</sup> 谨以此文恭贺李敏华院士90岁寿诞

稳定性参数是确定振动振幅的参数, 定义为:  $K_s = \frac{2m_e \delta}{\rho D^2}$ , 其中  $\delta$ : 阻尼的对数衰减,  $m_e$  是单位长度的有效质量, 包括结构质量、附加质量、管道内的负载质量。  $\rho$  是管道外的水的密度。

折减速度是确定VIV发生的速度范围的参数:  $v_r = \frac{U}{f_n D}$ , 其中  $f_n$ : 自振频率。按照1981,1991,1998的DNV (Det Norske Veritas) 规范, 平行涡(in-line vortex)释放发生在  $v_r = 1.0 \sim 3.5$ ; 当流速提高时, 垂流向(cross-flow)的振动将发生; 涡脱锁死(Lock-in)发生在  $v_r \approx 5.0$ 。表1 给出涡脱频率的一个计算算例。

表1 涡脱频率(Hz), 计算参数: 管长为324mm, 厚度为16mm<sup>[3]</sup>

流速(m/s)	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
In-line	0.48	0.961	1.441	1.922	2.402
Cross-flow	0.190	0.390	0.600	0.820	1.046

允许自由跨长依赖于流体速度、管道直径、结构自然频率。

## 2.2 水下管道可允许管道长度<sup>[3]</sup>

$$L = \left( \frac{EI}{M_e} \right)^{0.25} \left( \frac{CV_r D}{2\pi U} \right)^{0.5} \quad (1)$$

其中,  $V_r = \frac{U}{f_n D}$  是流体的折减数度,  $U$  是流体速度,  $f_n$  是结构的自然频率,  $D$  是管道直径。对有轴向力作用的情况下, 式(1)应有所修改。再者, 由于顺向(in-line)涡脱频率与横向(cross-flow)涡脱频率不同, 允许跨长的计算结果也不同。

## 3 连续梁振动的频率与振型

### 3.1 伯努力-欧拉梁的振动方程

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + A\rho \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad (2)$$

其中,  $y(x,t)$  是管道的挠度函数,  $E, I$  分别是杨氏模量和弯曲惯性矩, 这里假定沿长度不变;  $A$  是横截面积,  $\rho$  是结构质量密度, 应计及流体的附加质量, 基本公式可参见文献[4]。

用分离变量法求解(2)式:

令

$$y(x,t) = Y(x) \cos(\omega t + \alpha) \quad (3)$$

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \beta^4 Y = 0 \quad (4)$$

$$\beta^4 = \frac{A\rho\omega^2}{EI} = \frac{m_e\omega^2}{EI} \quad Y(x) = C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x \quad (5)$$

### 3.2 边界条件:

$$\text{固支条件:} \quad Y = 0; \quad \frac{dY}{dx} = 0 \quad (6a)$$

$$\text{简支条件:} \quad Y = 0; \quad \frac{d^2Y}{dx^2} = 0 \quad (6b)$$

$$\text{自由条件:} \quad \frac{d^3Y}{dx^3} = 0; \quad \frac{d^2Y}{dx^2} = 0 \quad (6c)$$

由此可解得自振频率和振型函数。对于两端简支梁, 振型函数为:  $Y(x) = C \sin \beta x$ ; 自振频率方程为:  $\beta L = k\pi$ ,  $k$  代表振动阶次。则

$$\omega_n = C \sqrt{\frac{EI}{m_e L^4}} = (k\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_e L^4}} \quad (7)$$

对于两端固支, 前5阶固有频率为:

$$\beta L = 4.730, 7.853, 10.996, 14.137, 17.279$$

### 3.3 连续性条件

#### 3.3.1 对于带裂纹和局部损伤的情况, 可用连续梁的办法处理:

设裂纹或局部损伤位于梁中点, 裂纹处连续性条件为:

$$x = 0, \quad \bar{V}(0) = V(0); \quad (8a)$$

$$x = 0, \quad \bar{V}''(0) = V''(0); \quad (8b)$$

$$x = 0, \quad \bar{V}'''(0) = V'''(0) \quad (8c)$$

$$x = 0, \quad \bar{V}'(0) + \bar{V}''(0)fEI = V'(0) \quad (8d)$$

式中  $f$  为裂纹或局部损伤处的局部弯曲柔度

对于局部损伤,  $C = \left( \frac{EB_D h_D^3}{12l_D} \right)^{-1}$ , 无量纲柔度为:

$$f = C \times \frac{EWb^2}{1-\nu^2} \quad (9)$$

$h_D, B_D, l_D$  是局部损伤区的高度、宽度与长度; 由于它与梁的总长度相比很小, 可以假定它对总长度影响很小。

对于有单边裂纹的情况<sup>[5]</sup>

$$C = \frac{\partial u}{\partial M} = \frac{\partial^2}{\partial M^2} \int_b^a \frac{1-\nu^2}{E} WK_1^2 da \quad (10)$$

由文献[6]可知,

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi a} \left[ 1.22 - 1.40 \left( \frac{a}{b} \right) + 7.33 \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 13.08 \left( \frac{a}{b} \right)^3 + 14.0 \left( \frac{a}{b} \right)^4 \right]$$

其中,  $\sigma = \frac{6M}{Wb^2}$ ,  $W$  是梁的宽度; 无量纲柔度:

$$f = CWb^2 \frac{E}{1-\nu^2} \quad (11)$$

利用公式(5), (6b), (8)和(9)或(11), 得到带裂纹或局部损伤的两端简支梁的频率方程:

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha}{2} \sinh(\lambda l) & 2 \cosh(\lambda l) - \frac{\alpha}{2} \sinh(\lambda l) \\ 2 \cos(\lambda l) + \frac{\alpha}{2} \sin(\lambda l) & -\frac{\alpha}{2} \sin(\lambda l) \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

其中,  $\alpha = fEI\lambda$  为裂纹处弯曲刚度比; 无量纲频率  $\lambda l = \bar{\Omega}$  的计算结果列于表2。

表2 带裂纹弹性梁的自振频率

$\alpha = 0.0001$	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$
$\bar{\Omega} = 1.5705$	$\bar{\Omega} = 1.5697$	$\bar{\Omega} = 1.5464$	$\bar{\Omega} = 1.5008$	$\bar{\Omega} = 1.4585$	$\bar{\Omega} = 1.4390$
$\alpha = 1.0$	$\alpha = 3.0$	$\alpha = 5.0$	$\alpha = 10.0$	$\alpha = 100.0$	$\alpha = 10000.0$
$\bar{\Omega} = 1.3697$	$\bar{\Omega} = 1.1339$	$\bar{\Omega} = 1.0004$	$\bar{\Omega} = 0.8272$	$\bar{\Omega} = 0.3919$	$\bar{\Omega} = 0.0836$

其中,  $\bar{\Omega} = \lambda l$ , 是无量纲频率; 可见, 当  $\alpha \rightarrow \infty$  时  $\bar{\Omega} \rightarrow 0$ , 即当梁从裂纹处断开时, 出现刚体运动; 而当  $\alpha \rightarrow 0$  时  $\bar{\Omega} \rightarrow \pi/2$ , 这是长度为  $2l$  两端简支梁的自振频率。

振型函数为:

$$V(x) = \frac{-\frac{\alpha}{2} \sinh \lambda l}{2 \cosh \lambda l - \frac{\alpha}{2} \sinh \lambda l} (\cosh \lambda x - \cot \operatorname{anh} \lambda l \sinh \lambda x) - (\cos \lambda x - \cot \operatorname{anh} \lambda l \sin \lambda x)$$

$$\bar{V}(x) = \frac{2 \cos \lambda l + \frac{\alpha}{2} \sin \lambda l}{\frac{\alpha}{2} \sin \lambda l} (\cosh \lambda x + \cot \operatorname{anh} \lambda l \sinh \lambda x) + (\cos \lambda x + \cot \operatorname{anh} \lambda l \sin \lambda x)$$

同理, 可得两端固支或其他边界条件的带裂纹或局部损伤连续梁的振动频率与振型函数。

**3.3.2 弹性支撑对动力性能的影响, 例如对于有锚索的情况, 在  $x=0$  加锚索; 取坐标原点为  $x=0$ , 则**

$$x=0, \quad \bar{V}(0) = V(0); \quad (13a)$$

$$x=0, \quad \bar{V}''(0) = V''(0); \quad (13b)$$

$$x=0, \quad EI\bar{V}'''(0) + \bar{V}(0)K_{te} = EIV'''(0) \quad (13c)$$

$$x=0, \quad \bar{V}'(0) = V'(0) \quad (13d)$$

(13c)中  $K_{te}$  为锚索的弹性刚度; 相当于加一个弹簧。处理方法与带裂纹的情况相似。

## 4 轴向力对梁柱振动频率的影响

在有温度升高时,会产生轴向压力,自振频率会大大下降必须予以考虑。此节主要参考文献[3]。

带轴向力的梁的动力学控制方程:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + N_x \frac{d^2 y}{dx^2} = w(x) \quad (14)$$

$w(x)$  为横向作用力;式(13)的解为:

$$N_x < 0 \quad y(x) = C_1 \sinh \lambda x + C_2 \cosh \lambda x + C_3 + C_4 x + \frac{w(x)x^2}{2N_x} \quad (15a)$$

$$N_x > 0 \quad y(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 x + C_4 + \frac{w(x)x^2}{2N_x} \quad (15b)$$

$$N_x = 0, \dots, y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 + \frac{w(x)x^2}{2N_x} \quad (15c)$$

其中,  $\lambda = \sqrt{\frac{|N_x|}{EI}}$ , 系数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  可由边界条件确定。当  $\lambda$  达到临界值时,梁即发生屈曲,  $N_x$  为欧拉载荷(其值取决于边界条件)。

边界条件:

$$\text{固支条件:} \quad Y = 0; \quad \frac{dY}{dx} = 0 \quad (16a)$$

$$\text{简支条件:} \quad Y = 0; \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0 \quad (16b)$$

$$\text{自由端条件:} \quad EI \frac{d^3 Y}{dx^3} + N_x \frac{dY}{dx} = 0; \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0 \quad (16c)$$

可见,由于存在轴力,自由端边界条件与无轴力的情况不同。存在轴力作用下的振动问题,控制方程为:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + N_x \frac{d^2 y}{dx^2} + A \rho \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad (17)$$

为了求解轴压力作用下的梁的振动频率,可用瑞雷商方法(令位能与动能相等):

$$\omega_n^2 = \frac{g \sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i y_i} \quad (18)$$

或用Lloyd 近似方法:

$$\omega_n = \frac{C}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_e}} \left( 1 - \frac{N_x}{P_E} \right)^{0.5} \quad (19)$$

注:以往的DNV 规范计算结构振动频率时,使用式(7),其实,应该用(18)。

为了说明轴向力对振动频率的影响,表3表示了一个算例。

表3 两端固支梁在轴向力作用下的自由振动频率<sup>[3]</sup>

$\hat{N}_x = \text{Rad/sec}$	-20	-10	0	10	20
$\hat{\omega} = N_x / (W_x \times L)$	10.83	11.12	10.22	9.77	9.35

其中,  $W_x$ : 单位英尺的结构重量。

## 5 阿基米德原型桥的结构分析

根据初步设计, 原型桥截面为三层: 由里至外依次为0.02m钢壳、0.3m混凝土, 以及厚度为0.1m的铝桁架结构(请见图2)。三层结构构成理想的复合结构, 具有高性能低成本的优点; 外层铝桁架层除了承载功能外, 还具有吸收冲击变性能的作用。根据复合材料力学, 复合结构的等效刚度参数可由各层参数计算。

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k [z_k - z_{k-1}] = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k t_k = \sum_{k=1}^n A_{ij}^k \quad (20a)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k [z_k^2 - z_{k-1}^2] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (\bar{Q}_{ij})_k t_k (\bar{z}_k) = \sum_{k=1}^n B_{ij}^k \quad (20b)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k [z_k^3 - z_{k-1}^3] = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (t_k \bar{z}_k^2 + \frac{t_k^3}{12}) = \sum_{k=1}^n (A_{ij}^k z_k^2 + I_{ij}^k) \quad (20c)$$

其中,  $\bar{Q}_{ij}$  是各层材料的弹性矩阵;  $t_k = z_k - z_{k-1}$  为第  $k$  层的厚度;  $\bar{z}_k = \frac{1}{2}(z_k + z_{k-1})$  是第  $k$  层的中面的  $z$  轴坐标。  $A_{ij}, D_{ij}$  分别为拉伸和弯曲刚度,  $B_{ij}$  为拉弯耦合刚度矩阵。

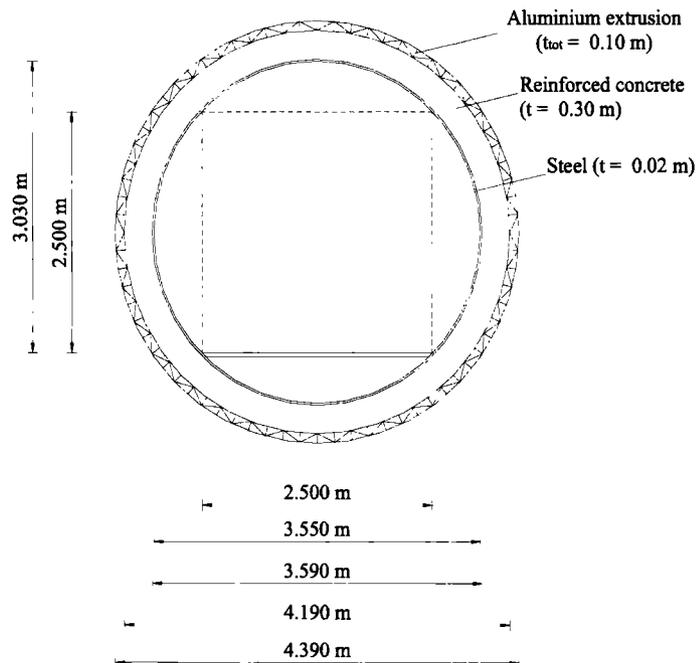


图1 阿基米德原型桥示意图

首先, 研究铝桁架层的等效刚度性能。按2维情况, 很易处理。等效拉伸刚度:

$$A_{al} = E_{al} \times \sum_{i=1}^3 S_i \quad (21)$$

$$D_{al} = \sum_{i=1}^3 (I_i + S_i \times z_i^2) \quad (22)$$

将(21), (22)代入(20)式, 并考虑混凝土层与钢层, 可得圆截面复合结构的弯曲刚度参数。

$$J_T = \sum_{i=1}^3 (J_{al} + J_{con} + J_{st}) = E_{al} F_{al} \times \frac{R_{al}^2}{2} + E_{con} F_{con} \times \frac{R_{con}^2}{2} + E_{st} F_{st} \times \frac{R_{st}^2}{2} \quad (23)$$

管道的等效密度为<sup>[4]</sup>:  $\bar{\rho} = 3341 \text{ kg/m}^3$ , 所以单位长度质量为:

$$m_e = \hat{A} \times \bar{\rho} \quad (24)$$

$\hat{A}$  是管道的截面面积:

$$\hat{A} = \pi \times (4.39)^2 \text{ m}^2 \quad (25)$$

将(23), (24)代入(19)可得管道的振动频率。对于千岛湖的原型桥初步设计, 长度为100m(假若跨中无任何支撑); 若两端为简支, 其最低频率(基频)等于

$$\omega_1 |_{\text{simply-simply}} = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m_e L^4}} = 2.08 \text{ Hz}$$

对于两端固支情况:

$$\omega_1 |_{\text{fixed-fixed}} = (4.370)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_e L^4}} = 4.02 \text{ Hz}$$

可见, 100m长的阿基米德桥自振频率已接近高流速下的VIV频率, 应该在中间加支撑。事实上, 初步设计已决定, 把整个桥分成5段, 每段20m, 在各段连接处由柳索与水底连接。

## 6 结束语

对阿基米德原型桥的振动响应进行了粗浅讨论, 主要从固体力学方面做了分析。其实, 这方面问题还很多。流固耦合问题, 地震相应问题, 乃至偶发载荷问题等亟待研究解决。这方面的科研及工程技术人员任重而道远。

### 参考文献

1. Ahrens D. Submerged floating tunnels—A concept whose time has arrived. *Tunneling and Underground Space Technology*, 1997, 12(2): 317~336
2. 黄国君, 吴应湘, 洪友士. 跨越水域交通的阿基米德桥. *中国造船*, 2002, 43(增): 13~18
3. Choi HS. Free spanning analysis of offshore pipelines. *Ocean Engineering*, 2001, 28: 1325~1338
4. 惠磊. 水中悬浮隧道在偶发载荷作用下的动力响应. 中国科学院研究生院硕士论文, 2007
5. Dimarogonas AD, Papadopoulos CA. Vibration of cracked shaft in bending. *J Sound & Vibration*, 1983, 91(3): 583~593
6. Hiroshi T, Paris PC, Irwin GR. The stress analysis of cracks handbook. Hellertown, Pennsylvania, Del Research Corporation, 1973

## Dynamic response of prototype Archimedes bridge

Zhang Shuangyin

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** Based on the conceptual design of the prototype Archimedes bridge, its dynamic response characteristic is analyzed to avoid occurrence of vortex induced vibration (VIV). According to the published work, the parameters of VIV and effect of axial force on the free vibration are reviewed. Then, the vibration frequency and modal function of the continuance beam with local defects (such as crack or local damage) are calculated. Finally vibration frequency of the prototype bridge is given.

**Key words:** Archimedes bridge, vortex induced vibration, beam vibration

www.cnki.net