

# 颗粒增强复合材料的残余热应力分析和增韧效应

吴永礼

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘要:** 用两相复合球模型推导了颗粒增强复合材料的等效热膨胀系数, 再用三相复合球模型得到了复合材料中颗粒和基体中的残余热应力的计算公式, 所得的公式能较好地反映颗粒周围基体的不均匀应力分布, 从而能较精确地计算颗粒复合材料中热残余应力的增韧效应。

## 1 前言

多年来人们一直在寻找提高陶瓷材料断裂韧性的方法, 颗粒增韧法最为简单, 并具有同时提高强度和韧性等许多优点, 所以对于颗粒增强陶瓷复合材料的强化和韧化机理进行了不少研究。Faber和Evans<sup>[1]</sup>提出: 颗粒增强陶瓷复合材料中裂纹扩展时, 在颗粒前的裂纹偏转模型被认为是颗粒增强陶瓷的韧性得到提高原因之一。陶瓷复合材料加工温度一般在1600°C左右, 在冷却到室温时, 由于颗粒和基体二种材料的热膨胀系数和弹性常数的差异, 将在颗粒和基体中产生残余热应力。Wei和Becher<sup>[2]</sup>认为, 在颗粒增强复合材料中裂纹尖端和颗粒周围的残余热应力相互作用, 裂纹扩展时在颗粒前将发生偏转, 因而提高了材料的断裂韧性。文中应用Selsing<sup>[3]</sup>给出的残余热应力计算公式

$$\sigma_0 = \frac{2E_m E_p \Delta\alpha \Delta T}{(1+\nu_m)E_p + 2(1-2\nu_p)E_m} = \frac{12G_m K_p \Delta\alpha \Delta T}{3K_p + 4G_m} \quad (1)$$

公式(1)中  $\Delta\alpha = \alpha_m - \alpha_p$ ,  $\alpha$ 为材料的热膨胀系数, 下标 $m$ 和 $p$ 分别指基体和颗粒,  $E, \nu, G, K$ 分别为材料的弹性模量、泊松比、剪切模量和体积模量,  $\Delta T = T_R - T_p$ ,  $T_R$ 为室温,  $T_p$ 为复合材料的加工温度。此公式是根据无限大的各向同性材料中有一个球型颗粒的模型下得到的。因此无法考虑基体中颗粒大小的影响。徐利华等<sup>[4]</sup>在假设颗粒增强复合材料中颗粒体积比较小的条件下, 对公式(1)提出了一个简单的修正公式

$$\sigma_1 = \sigma_0(1 - f_p) \quad (2)$$

其中  $f_p$ 为颗粒的体积比分数, 但是公式(2)适用多大的颗粒比值得探讨, 它的精确度也不好估计。

在文献[5-7]中对颗粒复合材料中的残余热应力提出了另一种增韧机理。Virkar 和 Johnson<sup>[5]</sup>提出在陶瓷-金属复合材料中, 微观的残余热应力能够提高断裂韧性, 但是, 残余应力的周期性不能完全包括在分析中, 因为, 只能考虑作用在半波长上的内应力。在ZrO<sub>2</sub>-Zr复合材料中, Culter 和Virkar<sup>[6]</sup>建议使用周期性的拉-压残余热应力场。这个周期的残余应力模型用来解释ZrO<sub>2</sub>-Zr复合材料中所观察到的韧性增加。Cutler 和Virkar<sup>[6]</sup>证实了Evans 等<sup>[7]</sup>提出的模型, 周期应力场中颗粒的断裂韧度  $K_{IC}$  为:

$$K_{IC} = K_{I0} + 2q\sqrt{2D/\pi} \quad (3)$$

其中  $K_{I0}$ 为基体的临界应力强度因子,  $q$ 为局部残余压应力,  $D$ 为压应力区的长度, 在颗粒复合材料中, 这个长度为颗粒的平均间距。

方程(3)是基于Tada等<sup>[8]</sup>对半无限二维裂纹在的长度  $D$  上受压应力作用的应力强度因子解。当颗粒的热胀系数比基体大时, 在复合材料的颗粒周围产生残余压应力。显然,  $q$ 与两

相粒子的体积分数比有较大的关系,  $q$  值越大,  $K_{IC}$  也越大。

Taya 等<sup>[9]</sup>应用Mori 和Tanaks<sup>[10]</sup>提出的考虑颗粒体积比的修正Eshelby 模型给出了计算颗粒和基体中平均残余热应力的公式。

本文从热弹性理论的基本方程出发, 先用两相复合球模型推导了颗粒增强复合材料的等效热膨胀系数, 再用三相复合球模型得到了颗粒复合材料中颗粒和基体中的残余热应力的计算公式, 用二种陶瓷复合材料为例, 计算了颗粒和基体中的应力分布, 并与公式(1), (2) 和 [9]的结果进行了比较。本文的公式表明在颗粒外的基体中的残余热应力是不均的, 这与Virkar和Johnson<sup>[6]</sup>考虑的一致。而Taya等[9]给出的应力只是均布应力部分, 是不完全的, 本文的残余热应力公式是较精确的。最后用文中的残余热应力公式分析了颗粒复合陶瓷的增韧效应。

## 2 残余热应力的计算公式推导

对于颗粒复合材料, 可以看作无限个图(1)所示的二相球组成。颗粒是半径为  $a$  的球, 外面是基体材料, 外径为  $b$ , 现分析该二相球的等效热膨胀系数。

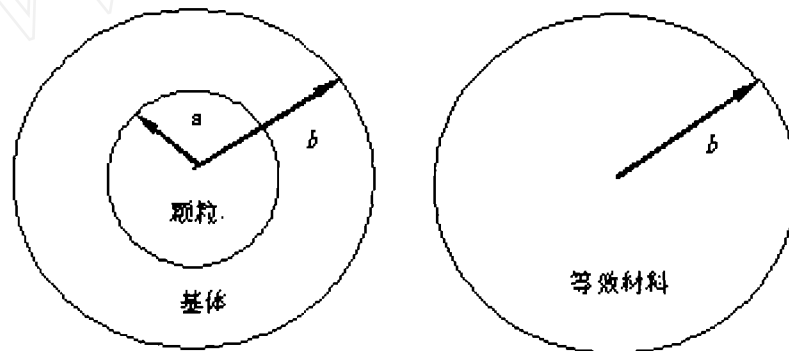


图1 两相球模型

首先将该二相球等价成外径为  $b$  的等效单相均匀材料球。从弹性力学<sup>[5]</sup>的热应力理论可知, 均匀材料球体在温度变化时的径向位移、径向应力和周向应力计算公式为

$$u = \frac{(1+\nu)r\alpha\Delta T}{3(1+\nu)} \left( 1 - \frac{r_1^3}{r^3} \right) + C_1 r + \frac{C_2}{r^3} \quad (4)$$

$$\sigma_r = -\frac{2\alpha E\Delta T}{3(1-\nu)} \left( 1 - \frac{r_1^3}{r^3} \right) + \frac{C_1 E}{(1-2\nu)} - \frac{2EC_2}{(1+\nu)r^3} \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\phi = \frac{\alpha E\Delta T}{3(1-\nu)} \left( 1 - \frac{r_1^3}{r^3} \right) + \frac{C_1 E}{(1-2\nu)} + \frac{EC_2}{(1+\nu)r^3} - \frac{\alpha E\Delta T}{1-\nu} \quad (6)$$

公式(4)~(6)中  $C_1, C_2$  为积分常数, 由球的内外径处的边界条件来确定。由于是球对称问题, 所以只有径向位移、径向应力和周向应力,  $r_1$  为球的内径, 在实心球的情况下  $r_1 = 0$ , 为使位移保持有限, 则有  $C_2 = 0$ 。将公式(4)~(6)先用于图1的二相球的颗粒和基体, 则有

$$u_p = \frac{3\alpha_p K_p r \Delta T}{3K_p + 4G_p} + C_1 r \quad 0 \leq r \leq a \quad (7)$$

$$\sigma_{rp} = \sigma_{\theta p} = 3K_p C_1 - \frac{12\alpha_p K_p G_p \Delta T}{3K_p + 4G_p}$$

$$u_m = \frac{3\alpha_m K_m \Delta T}{3K_m + 4G_m} \frac{(r^3 - a^3)}{r^2} + C_3 r + \frac{C_4}{r^2}$$

$$\sigma_{rm} = -\frac{12\alpha_m K_m G_m \Delta T}{3K_m + 4G_m} \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + 3K_m C_3 - 4G_m \frac{C_4}{r^3} \quad a \leq r \leq b \quad (8)$$

$$\sigma_{\theta m} = \frac{6\alpha_m K_m G_m \Delta T}{3K_m + 4G_m} \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + 3K_m C_3 + 4G_m \frac{C_4}{r^3} - \frac{18\alpha_m K_m G_m \Delta T}{3K_m + 4G_m}$$

公式(7), (8)中  $C_1, C_3, C_4$  为积分常数, 由二种材料界面处( $r=a$ )的位移和径向应力连续条件及外边界条件( $r=b$ )可求出它的解,

$$u_p = u_m, \quad \sigma_{rp} = \sigma_{rm}, \quad \text{在 } r = a \quad (9)$$

$$\sigma_{rm} = 0, \quad \text{在 } r = b \quad (10)$$

再将公式(4)~(6)的解用于图1中的等效材料球, 求得相应的解,

$$u_e = \frac{3\alpha_e K_e r \Delta T}{3K_e + 4G_e} + C_5 r \quad 0 \leq r \leq b \quad (11)$$

$$\sigma_{re} = \sigma_{\theta e} = 3K_e C_5 - \frac{12\alpha_e K_e G_e \Delta T}{3K_e + 4G_e}$$

其中  $C_5$  由  $r=b$  边界条件来确定

$$\sigma_{re} = 0, \quad \text{at } r = b \quad (12)$$

式(11)中的  $K_e$  和  $G_e$  为颗粒复合材料的等效体积模量和剪切模量, 等效体积模量由下式计算得到[12]:

$$K_e = K_m + \frac{f_p}{\frac{1}{K_p - K_m} + \frac{3f_m}{3K_m + 4G_m}} \quad (13)$$

而等效剪切模量由下式计算得到[13]:

$$A(G_e / G_m)^2 + B(G_e / G_m) + D = 0 \quad (14)$$

式中

$$A = 8(G_p / G_m - 1)(4 - 5\nu_m)\eta_1 c^{10/3} - 2[63(G_p / G_m - 1)\eta_2 + 2\eta_1 \eta_3]c^{7/3} + 252(G_p / G_m - 1)\eta_2 c^{5/3} - 25(G_p / G_m - 1)(7 - 12\nu_m + 8\nu_m^2)\eta_2 c + 4(7 - 10\nu_m)\eta_2 \eta_3 \quad (15a)$$

$$B = -4(G_p / G_m - 1)(1 - 5\nu_m)\eta_1 c^{10/3} + 4[63(G_p / G_m - 1)\eta_2 + 2\eta_1 \eta_3]c^{7/3} - 504(G_p / G_m - 1)\eta_2 c^{5/3} + 150(G_p / G_m - 1)(3 - \nu_m)\nu_m \eta_2 c - 3(7 - 15\nu_m)\eta_2 \eta_3 \quad (15b)$$

$$D = 4(G_p/G_m - 1)(5\nu_m - 7)\eta_1 c^{10/3} - 2[63(G_p/G_m - 1)\eta_2 + 2\eta_1\eta_3]c^{7/3} + 252(G_p/G_m - 1)\eta_2 c^{5/3} + 25(G_p/G_m - 1)(\nu_m^2 - 7)\eta_2 c - 4(7 + 5\nu_m)\eta_2\eta_3 \quad (15c)$$

$$\eta_1 = (G_p/G_m - 1)(49 - 50\nu_p\nu_m) + 35(G_p/G_m)(\nu_p - 2\nu_m) + 35(2\nu_p - \nu_m) \quad (15d)$$

$$\eta_2 = 5\nu_m(G_p/G_m - 8) + 7(G_p/G_m + 4) \quad (15e)$$

$$\eta_3 = (G_p/G_m)(8 - 10\nu_m) + (7 - \nu_m) \quad (15f)$$

式(15)中的 $\nu_p, \nu_m$ 为颗粒和基体材料的泊松比,  $c$ 就是复合材料中颗粒的体积比 $f_p$ 。

在图1中两种情况中, 令两者的 $\Delta T$ 相同, 则两者解的外边界位移相等, 即可求得图1中等效材料的热膨胀系数计算公式

$$\alpha_e = \frac{\alpha_m K_m (3K_p + 4G_m) + [4G_m (\alpha_p K_p - \alpha_m K_m) + 3K_p K_m (\alpha_p - \alpha_m)] f_p}{K_p (3K_m + 4G_m) + 4G_m (K_m - K_p) (1 - f_p)} \quad (16)$$

现在把颗粒复合材料看作图2所示的三相材料复合球, 颗粒材料是半径为 $a$ 的球, 中间为基体材料, 外面是等效材料。等效材料的热膨胀系数已由公式(16)给出。将热应力的解(4)~(6)分别用于这个三相球的三个区间, 再根据三相球的内外边界条件和中间二个界面的位移和径向应力连续条件可得到所有的积分常数。

$$u_e = \frac{3\alpha_e K_e \Delta T}{3K_e + 4G_e} \frac{(r^3 - b^3)}{r^2} + C_5 r + \frac{C_6}{r^2}$$

$$\sigma_{re} = -\frac{12\alpha_e K_e G_e \Delta T}{3K_e + 4G_e} \left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right) + 3K_e C_5 - 4G_e \frac{C_6}{r^3} \quad b \leq r \leq \infty \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta e} = \frac{6\alpha_e K_e G_e \Delta T}{3K_e + 4G_e} \left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right) + 3K_e C_5 + 4G_e \frac{C_6}{r^3} - \frac{18\alpha_e K_e G_e \Delta T}{3K_e + 4G_e}$$

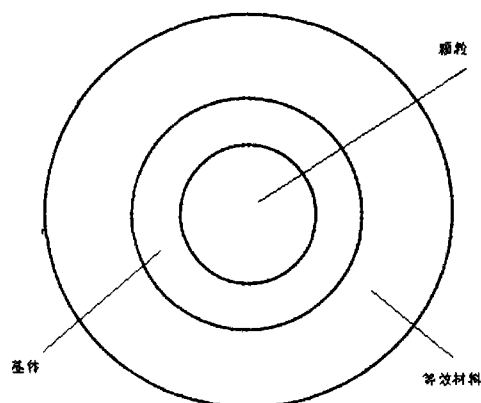


图2 三相球模型

公式(7), (8)和(17)中的待定常数 $C_1, C_3, C_4, C_5, C_6$ 可从界面 $r = a$ 和 $r = b$ 处的连续条件和 $r \rightarrow \infty$ 处的边界条件来确定:

$$u_p = u_m, \quad \sigma_{rp} = \sigma_{rm}, \quad \text{at} \quad r = a \quad (18)$$

$$u_m = u_e, \quad \sigma_{rm} = \sigma_{re}, \quad \text{at } r = b \quad (19)$$

$$\sigma_{re} = 0, \quad \text{at } r \rightarrow \infty \quad (20)$$

在确定待定常数后, 即可得到颗粒和基体中的热应力

$$\sigma_{rp} = \sigma_{\theta p} = -p \quad r \leq a \quad (21)$$

$$\sigma_{rm} = \left( f_p - \frac{a^3}{r^3} \right) \frac{p}{f_m} \quad a \leq r \leq b \quad (22)$$

$$\sigma_{\theta m} = \left( f_p + \frac{a^3}{2r^3} \right) \frac{p}{f_m}$$

其中

$$p = \frac{12K_p K_m G_m (\alpha_p - \alpha_m) \Delta T}{3K_p K_m + 4f_p K_p G_p + 4f_m K_m G_m} \quad (23)$$

在  $f_p = 0$  和  $f_m = 1$  的情况下, 基体中的残余热应力(22)与公式(1)相同。因此, 公式(1)只是颗粒有限体积比复合材料中残余热应力的初级近似。Taya等<sup>[9]</sup>应用Mori和Tanaks<sup>[10]</sup>提出的考虑颗粒体积比的修正Eshelby模型给出了计算颗粒和基体中平均残余热应力的公式<sup>[8]</sup>

$$\langle \sigma \rangle_p = -p, \quad \langle \sigma \rangle_m = (f_p/f_m)p \quad (24)$$

由此可以看出, 颗粒中的平均残余应力与公式(21)相同, 而基体中的平均应力只是公式(22)的第一部分, 它们是与半径无关的, 公式(22)给出的应力既有周向应力, 又有径向应力, 它们均随半径的变化而变化。

下面以实际例子说明颗粒复合材料中残余热应力的分布情况。对二种颗粒增强复合陶瓷材料的残余热应力进行了计算, 一种是SiC颗粒增强的Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>基复合材料, 另一种是ZrO<sub>2</sub>颗粒增强的Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>基复合材料。基体和颗粒的材料性能列于表1。计算中设  $T_p = 1650^\circ\text{C}$ ,  $T_R = 20^\circ\text{C}$ 。根据公式(1)计算颗粒中的应力时, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/SiC体系  $\sigma_0 = -2207\text{MPa}$ , Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub>体系  $\sigma_0 = 501\text{MPa}$ , 图3中给出了颗粒中无量纲应力随颗粒体积比的变化, 纵坐标为无量纲应力  $\sigma^* = \sigma/\sigma_0$ , 其中  $\sigma_0$  为公式(1)的结果, 公式(2)的计算应力与  $f_p$  为线性关系, 对二种复合材料体系的变化情况是一样的, 本文的结果对二种复合材料体系是不同的。图4和图5分别给出了二种复合材料体系中应力  $\sigma_r, \sigma_\theta$  和随半径的变化, 颗粒体积比为0.10, 在颗粒中应力  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  相同且与半径无关, 在颗粒和基体的界面处, 应力  $\sigma_r$  是连续变化的, 而应力  $\sigma_\theta$  则有一个突变。  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  的符号正好相反, 在  $r/a=1.0$  处  $\sigma_r$  等于零, 而  $\sigma_\theta$  仍有一定的值。

表1 材料的物理性能

	SiC	ZrO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
$\alpha(\times 10^{-6})/^\circ\text{C}$	4.0	10.0	8.6
E/GPa	414	207	380
$\nu$	0.14	0.2	0.26

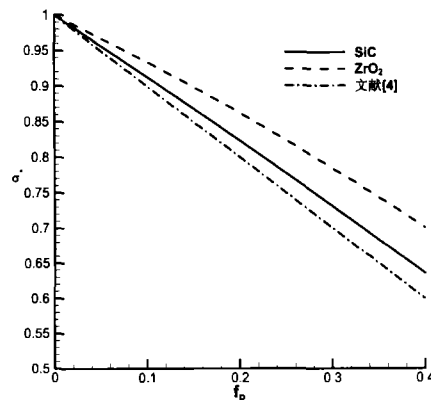


图3 颗粒中应力随体积比的变化

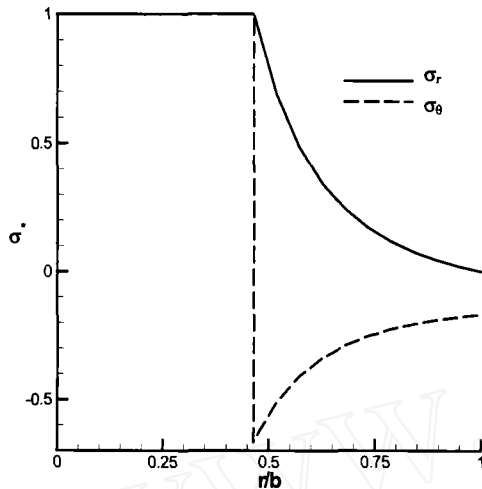


图4 颗粒和基体中的应力随半径的变化

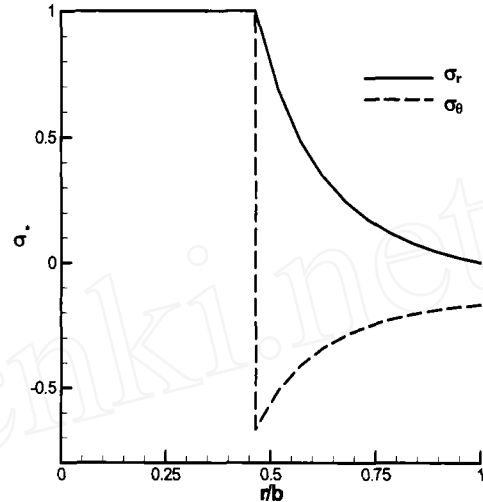


图5 颗粒和基体中的应力随半径的变化

### 3 残余热应力的增韧效应

Taya等<sup>[9]</sup>对TiB<sub>2</sub>颗粒和SiC基体组成的复合材料测量了断裂韧度的增加为 $\Delta K_R = 2.3 \text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ 。而用他们给出的残余热应力公式(24)和增韧计算公式(3)给出的断裂韧度的增加为 $1.56 \text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ 。Evans等<sup>[7]</sup>对颗粒周围有不均匀应力场所产生的韧度增加的公式为

$$K_{IC} = K_{I0} + \int_a^{a+x} \frac{\sigma_{\theta m}}{\sqrt{a+d-x}} dx \quad (25)$$

将本文给出的基体残余热应力公式(22)代入上式后得到 $\Delta K_R = 1.94 \text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ 。

### 4 结论

本文在热弹性理论基础上,用两相等效模型得到了颗粒复合材料的等效热膨胀系数,再用三相球模型得到颗粒复合材料中颗粒和颗粒周围基体中的残余热应力计算公式,此公式要比已有的结果更为合理和精确。

#### 参考文献

1. Faber KT, Evans AG. Crack deflection processes - I theory. *Acta Metall*, 1983, 31: 565~576
2. Wei GC, Becher., Improvements in mechanical properties in SiC by the addition of TiC particles. *J Am Ceram Soc*, 1984, 67: 571~574
3. Selsing J. Internal stresses in ceramics. *J Am Ceram Soc*, 1961, 44: 459~463
4. 徐利华, 鲁阳, 吕荣坤, 丁子上. 颗粒弥散陶瓷的内应力分布及光弹性分析. *浙江大学学报(自然科学版)*, 1996, 30(6): 713~719
5. Virkar AV, Johnson DL. Fracture behavior of ZrO<sub>2</sub>-Zr composites. *J Am Ceram Soc*, 1977, 60(11-12): 514~519
6. Cutler RA, Virkar AV. The effect of binden thickness and residual stresses on the fracture toughness of

- cemented carbides. *J Mater Soc*, 1985, 20: 3557~3573
7. Evans AG, Houser AH, Porter DL. The fracture toughness of ceramics. *Proc Int Conf Fract*, 1977, 4: 529~556
  8. Tada H, Paris PC, Irwin GR. The Stress Analysis of Cracks Handbook. Del. Research Corp, Hellertown, PA, 1973
  9. Minoru Taya, Hayashi S, Albert S Kobayashi, Yoon HS. Toughening of a particulate-reinforced ceramic-matrix composite by thermal residual stress. *J Am Ceram Soc*, 1990, 73(5): 1382~1391
  10. Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with mismatching inclusions. *Acta Metall*, 1973, 21: 571~574
  11. Timoshenko S, Goodier JW. Theory of elasticity. McGraw Hill, Second edition, New York, 1951
  12. Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J Appl Mech*, 1962, 29: 143~150
  13. Christensen RM, Lo KH. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J Mech Phys Solids*, 1979, 27: 315~330

## Analysis of the thermal residual stresses in particulate-reinforced composites and its toughening effect

Wu Yongli

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** The two phase sphere model is used to obtain the effective thermal expansion coefficient of the particulate-reinforced composites. The thermal residual stresses in particle and matrix of the particulate-reinforced composites are analyzed by three phase sphere model. The numerical examples are given, the results show that the present formulas of the thermal residual stresses are more rational and more accurate than the existing ones.