时一空守恒元解元（CE/SE）方法简述*

刘凯欣[1]，王景焘[1]，张德良[2]
（1 北京大学工学院 北京；2 中国科学院力学研究所 北京）

摘　要：时一空守恒元解元方法是近年来兴起的一种全新的高分辨率守恒方程型方程计算方法。它具有物理概念清晰，计算精度高和格式构造简单等优点，是一种具有广阔发展前景的计算流体力学方法。本文介绍了 CE/SE 方法的基本理论、格式构造、发展历史、应用情况和最新进展，并指出了应解决的问题和发展方向。

关键词：CE/SE 方法 计算流体力学 守恒律方程组

1 引言

经过 40 多年的发展，计算流体力学的数值模拟方法已经成为研究流体力学中各种物理现象的重要工具，它已和实验、理论分析一起构成研究流体运动规律的三大基本方法。有限差分方法是计算流体力学问题的主要方法。人们为了追求计算结果的高精度和对间断的高分辨率而发展了许多相当成功的差分格式。其中 TVD、ENO、NND 等一批高分辨率差分方法能够有效抑制非物理振荡，对间断具有较高的分辨率；另外，以紧致格式为代表的格式在不减少格式精度的情况下，利用导数项有效地减少了适用的基点数。近年来，数值方法研究又有新的突破，一些新型算法已经出现。其中有代表性的算法有时空守恒的 CE/SE 方法[1]、由 Boltzmann 方程的思想出发的 BGK 格式[2]、基于有限元的间断 Galerkin 方法[3]以及基于摄动分析的摄动有限差分方法[4]。这些方法各有其自身的特点，在一定范围内能很好的模拟较为复杂的流场，为计算流体力学提供了有效工具。

时一空守恒元解元方法（Space-time conservation element and solution element method, CE/SE）是一种全新的守恒方程的计算方法。它最早是由 NASA Lewis 研究中心的 S. C. Chang[1]于 1995 年提出来的。这种方法从根本上区别于传统的方法：它将时间和空间统一起来同等对待；利用守恒型积分方程，通过定义解元和守恒元使得局部和整体都严格满足守恒律；只要恰当的定义守恒元和解元的便可以直接将格式推广到多维情况，而不需要采用算子分裂或者方向交替技术；在给出网格点物理量值的同时也给出了物理量的偏导数，同传统的差分格式相比，在相同的基点下可以提高格式精度；可以满意地求解间断流场，具有较高的分辨率；构造比较简单，除了简单的 Taylor 展开之外，没有采用其他的数值方法，尤其是不需要采用其他的特征分析数值方法（如 Riemann 求解器）来捕捉激波、抑制振荡等。

本文首先介绍了 CE/SE 方法的基本原理，然后介绍了这个方法的发展历史、应用现状，最后指出了当前需要解决的问题和发展方向。

2 CE/SE 方法的基本原理

本节首先以最实用的 $a-\alpha$ 格式[5]为例，简要推导一下一维守恒律方程组的 CE/SE 格式。考虑一维守恒律方程组

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}+\frac{\partial f_m}{\partial x}=0,\qquad m=1,2,3 \tag{1}$$

令 $x_1=x$，$x_2=t$ 表示 Euclidean 空间 E_2 中的两个坐标，利用散度定理式(1)可以表示为

*国家自然科学基金资助项目（10572002）

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\oint_{S(V)} \mathbf{h}_m \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0 \tag{2}$$

这里$S(V)$是求解的时空区域V的边界，$\mathrm{d}\mathbf{s}$是$S(V)$外法线单位矢量，向量$\mathbf{h}_m = (f_m, u_m)$，$m = 1,2,3$是空间流矢量。将要求解的区域划分成网格点集合$(j,n)$（如图1所示），这里，$n = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2 \ldots$对于每一个$n$，$j = n \pm 1/2, n \pm 3/2, n \pm 5/2 \ldots$。解元SE$(j,n)$是如图1中所示的虚线的内部，而与它相应的解元CE$(j,n)$如图1中矩形区域ABCD，其中$(j,n)$左侧的为CE-$(j,n)$，右侧的为CE+$(j,n)$。这样我们就利用解元把$E_2$空间划分为一些不重叠的矩形区域。假定在解元SE$(j,n)$中$u_m(x,t)$和$f_m(x,t)$分别由它们的Taylor展开$u_m^*(x,t;j,n)$和$f_m^*(x,t;j,n)$来近似，如果取到一阶则有

$$u_m^*(x,t;j,n) = (u_m)_j^n + (u_{mx})_j^n (x - x_j) + (u_{mt})_j^n (t - t^n) \tag{3}$$

$$f_m^*(x,t;j,n) = (f_m)_j^n + (f_{mx})_j^n (x - x_j) + (f_{mt})_j^n (t - t^n) \tag{4}$$

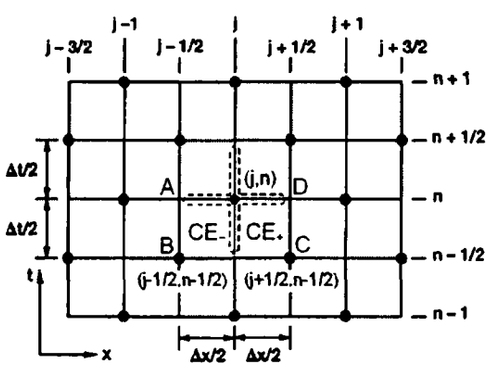

图1 SE和CE的相对位置

将式(3)、(4)代入式(1)可以得到

$$(u_{mt})_j^n = -(f_{mx})_j^n \tag{5}$$

由于f_m是u_m的函数，所以从式(5)可知我们要求解的变量有u_m和u_{mx}，然后我们就可以根据式(5)以及f_m和u_m之间的关系得到f_m和u_m任意的一阶导数。

引入势函数$\psi_m(x,t;j,n)$，$m = 1,2,3$满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_m}{\partial t} &= f_m^*(x,t;j,n) \\ -\frac{\partial \psi_m}{\partial x} &= u_m^*(x,t;j,n) \end{aligned} \tag{6}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

积分式(6)并忽略积分得到的任意常数，可以得到

$$\begin{aligned}\psi_m(x,t;j,n)=&(f_m)_j^n(t-t^n)-(u_m)_j^n(x-x_j)\\&+\frac{1}{2}(f_{mt})_j^n(t-t^n)^2+[(f_{mx})_j^n-(u_{mt})_j^n](t-t^n)(x-x_j)\\&-\frac{1}{2}(u_{mx})_j^n(x-x_j)^2\end{aligned}\tag{7}$$

这样由式(2)可以得到势函数在守恒元各网格点的关系

$$\begin{aligned}0=&\psi_m(x_j-\frac{\Delta x}{2},t^n;j,n)-\psi_m(x_j+\frac{\Delta x}{2},t^n;j,n)\\&+\psi_m\left(x_{j-1/2}+\frac{\Delta x}{2},t^{n-1/2};j-\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}\right)-\psi_m\left(x_{j-1/2},t^{n-1/2}+\frac{\Delta t}{2};j-\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}\right)\\&+\psi_m\left(x_{j+1/2},t^{n-1/2}+\frac{\Delta t}{2};j+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}\right)-\psi_m\left(x_{j+1/2}-\frac{\Delta x}{2},t^{n-1/2};j+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}\tag{8}$$

将式(7)代入式(8)可以得到

$$(u_m)_j^n=\frac{1}{2}\left\{(u_m)_{j-1/2}^{n-1/2}+(u_m)_{j+1/2}^{n-1/2}+(s_m)_{j-1/2}^{n-1/2}-(s_m)_{j+1/2}^{n-1/2}\right\}\tag{9}$$

其中

$$(s_m)_j^n=\frac{\Delta x}{4}(u_{mx})_j^n+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(f_m)_j^n+\frac{\Delta t}{4}(f_{mt})_j^n\right]\tag{10}$$

根据式(9)求得$(u_m)_j^n$后，利用连续关系，可得

$$\begin{aligned}(u_{mx})_j^n&=\frac{(u_{mx-})_j^n+(u_{mx+})_j^n}{2}\\(u_{mx\pm})_j^n&=\pm\frac{(u_m')_{j\pm1/2}^n-(u_m)_j^n}{\Delta x/2}\\(u_m')_{j\pm1/2}^n&=(u_m)_{j\pm1/2}^{n-1/2}+\frac{\Delta t}{2}(u_{mt})_{j\pm1/2}^{n-1/2}\end{aligned}\tag{11}$$

对于有间断的情况，为了抑制非物理振荡，可以把式(11)中第一式的算术平均变成如下的加权平均形式

$$\begin{aligned}(u_{mx})_j^n&=W[(u_{mx-})_j^n,(u_{mx+})_j^n,\alpha]\\W[x_-,x_+,\alpha]&=\frac{|x_+|^\alpha x_-+|x_-|^\alpha x_+}{|x_+|^\alpha+|x_-|^\alpha}\end{aligned}\tag{12}$$

其中$\alpha=1\sim2$，显然$\alpha=0$就是式(11)中的算术平均。

上面的格式中，为了处理强间断，在最后求导数的时候引入了一个加权平均函数W即相当与引入了一个人工粘性项。

二维 Euler 方程的 CE/SE 格式也可以类似得出，根据网格划分可以得到不同的格式[5-17]

3 CE/SE 方法的发展和应用

自从 CE/SE 方法提出之后，S. C. Chang 和他的同事就一直从事 CE/SE 方法的理论方面工作。S. C.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Chang 等[8]提出了一维对流扩散方程的 CE/SE 方法，扩大了这个方法的适用范围。X. Y. Wang 和 S. C. Chang 等[9]针对在有激波的情况，对 CE/SE 方法精度进行了分析，结果表明一阶 Taylor 展开的 CE/SE 方法计算精度与四阶精度的 ENO 方法相当。D. Yang 等[10]指出了 CE/SE 方法的相容性和收敛性，并且给出了具体的误差限。S. C. Chang[11]提出的一维局部细化的 CE/SE 方法为 CE/SE 方法推广到多重网格奠定了基础。S. C. Chang[12]指出虽然 CE/SE 方法的稳定性只要求 CFL 数小于 1，但是如果 CFL 数小于 0.1，原有的 CE/SE 方法会出现很大的数值耗散。针对这个问题他于 2002 年提出 Courant 数不敏感的 CE/SE 方法[12]，在小 CFL 数情况下格式自动减少粘性，从而可以使 CFL 数在 0.001～1.0 之间变化。他和 M. Zhang[13]等又提出了 CFL 数不敏感的“$c-\tau$”格式，引入参数τ使格式更灵活，并把它用在多维 Euler 方程中。S. C. Chang[14]同时也详细地进行了“$c-\tau$”格式的 von Neumann 稳定性分析。在边界处理方面，针对 CE/SE 方法网格的特殊排列 S. C. Chang 等分别提出了固壁反射边界处理方法[15]和无反射边界处理方法[16,17]，其中无反射边界条件并没有用到特征分析方法同时可以用于亚声速、跨声速和超声速情况。数值计算表明[17] 这两种边界条件都是稳定的。由于 CE/SE 方法最擅长求解守恒型方程，因此比较难以处理方程中的源项，尤其是刚性源项（刚性源项）。对于刚性源项一般处理是采用隐式方法或者采用双时间步长计算，前者通过时间迭代消除刚性，后者则是一种线性近似。S. T. Yu 等[18]通过改造 CE/SE 方法的解元定义使得时间导数中消除刚性源项的影响，从而消除了刚性。

最初，CE/SE 方法在解元中对物理量采用一阶 Taylor 展开，如果展开到高阶，就得到相应精度的格式。张增产[19]做了这方面的尝试，而刘凯欣和王景焘[20]则做了详细的格式构造和稳定性分析，同时指出二阶或更高阶精度的格式会大大增加计算时间，却对精度提高不大，对于 N-S 方程并不必须，只有求解含有三阶以上导数项的方程（如 KdV 方程）才必须采用高阶精度格式。王刚[21]等则推导并且验证了二维二阶精度的 CE/SE 格式。

二维 CE/SE 方法最早也是由 S. C. Chang 研究组[5,22-26]提出的，但是他们最早提出的守恒元和解元划分方案中，每个解元对应 3 个守恒元，导致空间网格编号方向不互相垂直且与 x 和 y 轴都不重合，这样就给格式推导过程和向三维推广造成很大困难。为此，刘海涛[7]和张德良[6]以及张增产[19,27-31]分别对二维格式构造方法进行了改造，提出六面体划分方案，使得在每个网格点上只设置一个守恒元，而利用相邻的不同时间半层的解元的公共点上流动变量连续条件来导出流动变量及其空间偏导数之间的关系。这样就克服了 Chang 的网格剖分的缺点，格式推导过程简洁明了，且容易推广到三维情况。根据这种网格划分方案，Z. C. Zhang 等[32,33]较顺利地推导了三维 Euler 方程和 N-S 方程的 CE/SE 格式。在实际工程应用中，X. Y. Wang 和 S. C. Chang[34,35]又提出了非结构网格下的 CE/SE 方法，但是，由于 CE/SE 方法时间方向推进的特殊性（半层时间推进），因此必须采用时间方向的交错网格，这就意味着并不是任意剖分的非结构网格都能用于 CE/SE 方法。因此只能说这种“非结构”网格是一种不规则网格，尚不能达到完全非结构化。从计算精度上来看，非结构网格也稍逊于结构网格。Z. C. Zhang 等[36]采用这种方法分别计算了高速和低速流动。对于多维复杂问题，CE/SE 方法还实现了并行化[37]。

当前 CE/SE 方法主要应用在高速流动领域，如航空航天，化学反应流动等等。S. C. Chang 的研究组主要从事喷管和射流的气动声学学方面的数值模拟[38-40]。最早从事模拟化学反应流动的是 Y. Wu[41]，张德良等[6]利用 CE/SE 方法和二步法 ZND 模型模拟了气相爆轰的胞格结构，翁春生等[42]模拟了二步法 ZND 模型的非定常爆轰，王刚等[43]采用考虑化学组分的二步法 ZND 模型模拟了气相爆轰的胞格结构，如温度等物理量的计算比文献[6]更加精确。国外的利用 CE/SE 方法进行化学反应流动也做了大量的工作。他们的工作主要分成两部分，一是不考虑胞格结构的气相爆轰不定常流动的数值模拟，早期采用二步法 ZND 模型[44]，后来就采用更加精确的基元反应模型[45]；二是脉冲爆轰发动机（PDE）工作过程的直接数值模拟[46]，该数值模拟中仍然采用二步法 ZND 模型。

CE/SE 方法是基于气体动力学方程提出的，是一种基于密度求解的方法，特别适用于可压缩高速流动。Z. C. Zhang 等[47]和 M. Zhang 等[48]通过数值实验指出，这种方法不但能够求解可压缩高速流动，也适用于不可压缩的低速流动。应当指出，Z. C. Zhang 等和 M. Zhang 等的方法是一种人工压缩法，这种方法不太适合不可压缩高 Renold 数情况。我们认为，计算低速不可压缩流动倒不如采用基于压力算法，即采用 CE/SE 方法离散动量方程和压力校正类（SIMPLE）方法或者求解压力 Poisson 方程

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的方法耦合速度和压力。

近年来，CE/SE 方法已经被成功地用来求解电磁学方程组和磁流体问题。X. Y. Wang 等[49]求解了含时 Maxwell 方程组。M. Zhang 等[50]推导了理想磁流体动力学方程组的 CE/SE 格式，由于 CE/SE 方法的优越性，他们的格式不需要对磁感应强度散度为零的限制条件做特殊处理。

最近，王景焘等[51]将 CE/SE 方法推广到流体弹塑性问题中去，他们推导了 Euler 描述下的流体弹塑性方程的格式，并且结合粒子水平集方法和 Ghost 流体方法，提出了相对完整的适用于大变形的流体弹塑性介质计算方案，通过数值结果可以发现该方案计算精度比较高。

此外，还有一些学者利用 CE/SE 方法解决了其他一些工程上的问题。例如 H. H. Tsuei 等[52]的涡轮叶片绕流；焦天民[53]的内燃机进气系统数值模拟；张永祥等[54]的二维溃坝洪水波

总之，CE/SE 方法经过了 10 多年的发展，理论框架基本成形，并且已经被应用到各种领域中。从 CE/SE 方法的应用效果来看，它的优越性已经显露出来，具有十分广阔的发展前景和应用空间。具体说来 CE/SE 方法具有物理意义清晰、格式构造简单、计算精度较高、对强间断分辨率很高、边界处理方便以及不需要特殊处理某些约束条件等优点。

4 存在的问题和发展方向

经过 10 多年的发展，CE/SE 方法的理论基础和格式本身已经基本成熟，但仍然有一些问题需要我们努力：1）从实际计算结果来看 CE/SE 格式的精度很高[9]，但是迄今为止没有对此有一个详细的分析，如果缺少这种分析我们就不能保证该方法在计算任何问题中都能取得高精度；2）从第二节的 CE/SE 格式来看，求导数的加权平均函数的引入并没有太多的数学含义，而只是一种人为的减少导数的方法，这种人工粘性的引入在理论上究竟是否合理，会不会引起非物理解，这些问题都没有得到详细地讨论；3）由于 CE/SE 格式特殊的网格设置以及时间推进，很难做到在真正的无结构网格上离散，如果只是在非正规网格上离散就会损失精度，我们推断采用多重网格方法进行局部加密可能是一个提高局部精度的有效方法；4）由于 CE/SE 方法最擅长求解守恒型方程，因此比较难以处理方程中的源项，尤其是源项与求解变量函数关系不是很明确的情况（如弹塑性流动情况）。虽然文献[51]给出了一种近似处理方法，但是这是不够的，需要一种更精确的源项处理方法。

接下来的工作就是如果将这个性能优良的数值方法应用到各种具体的实际问题中去，以及及时解决应用中出现的各种问题。我们认为 CE/SE 方法将在以下领域中发挥巨大作用：1）空气动力学领域，这里是 CE/SE 方法的传统领地，应该结合多重网格方法提高精度；2）化学反应流动迫切需要一种高精度，高分辨率和高效率的计算方法，CE/SE 方法恰好满足这种要求。当前的化学反应流模拟还很不成熟，气相爆轰以及多相爆轰的数值模拟和脉冲爆轰发动机工作过程模拟都是这个领域的热点问题；3）磁流体动力学模拟刚刚起步，尚有较大空间；4）高精度的 CE/SE 方法可应用于多相不可压缩粘性流动，并且取得较好的结果；5）应用于多物质流体弹塑性问题，尤其是需要物质界面处理的问题中。这个问题除了要求算法的高精度，高分辨率和高效率之外，由于要精确捕捉物质界面，还需要边界处理上的方便。CE/SE 方法只需要一个边界点，恰好能够满足要求；6）目前尚没有采用 CE/SE 方法的商用软件，在这方面仍然需要做大量的工作。

5 小结

在计算力学飞速发展的今天，随着计算机的计算速度和综合性能的不断提高，新的计算方法层出不穷。这一方面为我们提供了更多的解题工具和途径，许多以往不可想象的数值计算工作都得以实现；而另一方面要挑选和熟悉一种实用的计算方法要花费很大的精力。鉴于 CE/SE 方法的突出优点和巨大发展空间，本文对 CE/SE 方法的基本原理、基本方法、实际应用的现状和未来的发展趋势进行了简略的评述。希望本文能为读者了解和掌握 CE/SE 方法提供便利。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参考文献：

[1] Chang S. C. The Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element-A New Approach for Solving the Navier-Stokes and Euler Equations. Journal of Computational Physics, 1995, 119: 295-324.

[2] Xu K., Martinelli L., Jamson A. Gas-kinetic Finite Volume Methods, Fulx-vector Splitting, and Artificial Diffusion. Journal of Computational Physics, 1995, 120(1): 48-65.

[3] Cockburn B., Shu C. W. The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-dependent Convection-diffusion Systems. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998, 35: 2440-2463.

[4] Chen G. Q., Yang, Z. F. A Perturbational High Order Accurate Upwind Compact Difference Scheme for Convective Diffusion Equation. Journal of Hydrodynamics ser B, 1993, 5(1): 82-97.

[5] Chang S. C., Wang X. Y., Chow C. Y. The Space-Time Conservation Element and Solution Element Method- A New High Resolution and Genuinely Multidimensional Paradigm for Solving Conservation Laws I. The Two Dimensional Time Marching Schemes. NASA TM -1998-208843, 1998.

[6] 张德良，谢巍，郭长铭，胡湘渝. 气相爆轰胞格结构和马赫反射数值模拟. 爆炸与冲击, 2001, 21(3): 161-167.

[7] 刘海涛,徐建中. 求解 Euler 方程的空间一时间守恒格式. 工程热物理学报, 1997, 18(3): 294-299.

[8] Chang S. C., Wang X. Y., To W. M. Application of the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method to One-Dimension Convection-Diffusion Problems. Journal of Computational Physics, 2000, 165: 189-215.

[9] Wang X. Y., Chang S. C., Jorgenson P. C. E. Accuracy Study of the Space-Time CE/SE Method for Computational Aeroacoustics Problems Involving Shock Waves. AIAA Paper 2000-0475, 2000.

[10] Yang D., Yu S., Zhao J. Convergence and Error Bound Analysis for The Space-time CESE Method. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2001, 17: 64-78.

[11] Chang S. C., Wu Y., Wang X. Y., Yang V. Local Mesh Refinement in the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method. Proceedings of the First International Conference on Computational Fluid Dynamics, held July 9-14, 2000, Kyoto, Japan., 2000.

[12] Chang S. C., Courant Number Insensitve CE/SE Schemes. AIAA Paper 2002-3890, 2002.

[13] Zhang M., Yu S. T., Chang S. C. CFL Number Insensitive CE/SE Schemes for Two-dimensional Euler Equations. AIAA Paper 2003-3840, 2003.

[14] Chang S. C. Explicit von Neumann Stability Conditions for the c-tau Scheme-A Basic Scheme in the Development of the CE-SE Courant Number Insensitive Schemes. NASA/TM-2005-213556, 2005.

[15] Chang S. C., Zhang Z. C. Yu S. T., Jorgenson P. C. E. A Unified Wall Boundary Treatment for Viscous and Inviscid Flows in the Space-Time CE/SE Method. Proceedings of the First International Conference on Computational Fluid Dynamics, held July 9-14, 2000, Kyoto, Japan. , 2000.

[16] Wang X. Y.,. Chow C. Y, Chang S. C. Non-reflecting Boundary Conditions Based on the Space-Time CE/SE Method for Free Shear Flows. AIAA paper 98-3020, 1998.

[17] Chang S. C., Himansu A., Loh C. Y., Wang X. Y., Yu S. T. Robust and Simple Non-Reflecting Boundary Conditions for the Euler Equations-A New Approach Based on the Space-Time CE/SE Method. NASA/TM-2003-212495, 2003.

[18] Yu S. T., Chang S. C., Jorgenson P. C. E., Park S. J., Lai M. C. Treating Stiff Source Terms in Conservation Laws by the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method. Proceedings of the 16th International Conference on Numerical Method in Fluid Dynamics, Arcachon, France, July 6-July 10, 1998, 1998.

[19] 张增产，沈孟育. 改进的时一空守恒元和解元方法. 清华大学学报, 1997, 37(8): 65-68.

[20] Liu K., Wang, J. Analysis of High Accuracy Conservation-Element and Solution-Element Schemes. Chinese Physics etters, 2004, 21(11): 2085-2088.

[21] 王刚，张德良，刘凯欣，王景焘. 计算力学学报. 已投稿.

[22] Chang S. C., Wang X. Y., Chow C. Y. New Developments in the Method of Space-Time Conservation Element and

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Solution Element -- Applications to Two-Dimensional Time-Marching Problems. NASA TM 106758, 1994.

[23] Wang X. Y., Chow C. Y., Chang S. C. Application of the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method to Two-Dimensional Advection-Diffusion Problems. NASA TM 106946, 1995.

[24] Chang S. C., Wang X. Y., Chow C. Y. The Space-Time Conservation Element and Solution Element Method - A New High-Resolution and Genuinely Multidimensional Paradigm for Solving Conservation Laws I. The Two Dimensional Timing Marching Schemes. NASA/TM-1998-208843, 1998.

[25] Chang S. C., Wang X. Y., Chow C. Y. The Space-Time Conservation Element and Solution Element Method: A New High-Resolution and Genuinely Multidimensional Paradigm for Solving Conservation Laws. Journal of Computational Physics, 1999, 156: 89-136.

[26] Wang X. Y., Chow C. Y., Chang S. C. The Space-Time Conservation Element and Solution Element Method - A New High-Resolution and Genuinely Multidimensional Paradigm for Solving Conservation Laws II. Numerical Simulaion of Shock Waves and Contact Discontinuities. NASA/TM-1998-208844, 1998.

[27] 张增产, 沈孟育. 一种严格保证时一空守恒律的数值方法. 计算物理, 1997, 14(6): 835-840.

[28] 张增产, 沈孟育. 求解二维 Euler 方程的时一空守恒格式. 力学学报, 1999, 31(2): 152-158.

[29] Zhang Z. C., Yu S. T. J., Chang S. C. A Space-Time Conservation Element and Solution Element Method for Solving Two- and Three-Dimensional Unsteady Euler Equations Using Quadrilateral and Hexahedral Meshes. Journal of Computational Physics, 2002, 175: 168-199.

[30] 张增产, 沈孟育. 一般坐标系下的二维 Euler 方程时一空守恒格式. 应用力学学报, 1999, 16(1): 10-15.

[31] 张增产. 二维时一空守恒格式及其在激波传播计算中的应用, 爆炸与冲击, 1999, 19(1): 7-12.

[32] Zhang Z. C., Wang X. Y., Chang S. C., Jorgenson P. C. E. The Space-Time CE/SE Method for Navier-Stokes Equations in Three Spatial Dimensions. AIAA Paper 2000-2331, 2000.

[33] Z. C. Zhang,S. T. Yu, A Generalized Space-Time CESE Method for the Euler Equations on Quadrilateral and Hexagonal Meshes. AIAA 2001-2592, 2001.

[34] Wang X. Y. Chang,S. C. A 2D Non-Splitting Unstructured Triangular Mesh Euler Solver Based on the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method. Computational Fluid Dynamics Journal, 1999, 8(2): 309-325.

[35] Wang X. Y., Chang S. C. A 3-D Structured/Unstructured Euler Solver based on the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method. 14th AIAA CFD Conference June 28, 1999, Norfolk, VA.

[36] Zhang Z. C., Yu S. T., Wang X. Y., Chang S. C., Himansu A., Jorgenson P. C. E. The CE/SE Method for Navier-Stokes Equations Using Unstructured Meshes for Flows at All Speeds. AIAA Paper 2000-0393, 2000.

[37] Himansu A., Jorgenson P. C. E., Wang X. Y., Chang S. C. Parallel CE/SE Computations via Domain Decomposition. Proceedings of the First International Conference on Computational Fluid Dynamics, held July 9-14, 2000, Kyoto, Japan. , 2000.

[38] Wang X. Y., Chang S. C., Jorgenson P. C. E. Prediction of Sound Waves Propagating Through a Nozzle Without/With a Shock Wave using the Space-Time CE/SE Method. AIAA Paper 2000-0222, 2000.

[39] Jorgenson P. C. E., Loh C. Y. Computing Axisymmetric Jet Screech Tones using Unstructured Grids. AIAA Paper 2002-3889, 2002.

[40] Loh C. Y., Himansu A., Hultgren L. S. A 3-D CE/SE Navier-Stokes Solver with Unstructured Hexahedral Grid for Computation of Nearfield Jet Screech Noise. AIAA paper 2003-3207, 2003.

[41] Wu Y., Yang V., Chang S. C. Space-Time Method for Chemically Reacting Flows with Detailed Kinetics. Proceedings of the First International Conference on Computational Fluid Dynamics, held July 9-14, 2000, Kyoto, Japan., 2000.

[42] 翁春生, Gore T. P. CE/SE 方法在非定常爆轰计算中的应用, 空气动力学学报. 2003, 21(3): 301-310.

[43] 王刚, 张德良, 刘凯欣. 基于 ZND 模型的爆轰波胞格结构数值分析. 爆炸与冲击, 已投稿.

[44] Zhang Z. C., Yu S. T. Direct Calculations of Two- and Three- Dimensional Detonations by an Extended CESE Method. AIAA 2001-0476, 2001.

[45] Wang B., Hao H., Yu S. T. Direct Calculation of Wave Implosion for Detonation Initiation. AIAA Journal, 2005, 43(10):

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2157-2169.

[46] Hao H., Zhang Z. C., Yu S. T., Jorgenson P. C. E. Application of the CESE Method to PDE Plume Dynamics Using a Beowulf Cluster. AIAA 2002-0614, 2002.

[47] Zhang Z. C., Yu S. T., Chang S. C., Jorgenson P. C. E. Calculations of Low-Mach-Number Viscous Flows without Preconditioning by the Space-Time CESE Method. Computational Fluid Dynamics 2000, Edited by N. Satofuka, Springer-Verlag, 2001: 671-676.

[48] Zhang M., Yu S. T., Chang S. C. Solving the Navier-Stokes Equations by the CESE Method. AIAA 2004-0793, 2004.

[49] Wang X. Y., Chen C. L., Liu Y. The Space-Time CE/SE Method for Solving Maxwell's Equations in Time-Domain. 2002 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC/URSI National Radio Science Meeting, June 16-21, 2002, San Antonio, TX. , 2002.

[50] Zhang M., Yu S. T., Lin S. C. H., Chang S. C., Blankson I. Solving the MHD Equations by the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method. Journal of Computational Physics, 2006, 214(2): 599-617.

[51] Wang J. T.,. Zhang D. L, Liu K. X. An Extended CE/SE Scheme for Simulation of Multimaterial Elastic-Plastic Flow with Level-Set Interfaces Tracing Method. Journal of Computational Physics, Submitted.

[52] Tsuei H. H., Liou B. H., Yu S. T. Direct Calculation of Turbomachinery Flows Using the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method. AIAA 2001-0531, 2001.

[53] Jiao T. M., Zhou L. B. Applicaiton of CE/SE Method for Numerical Simulation of Intake System in Diesel Engines. Transactions of CSICE, 2002, 20(2): 137-140.

[54] 张永祥, 陈景秋. 用守恒元和解元法数值模拟二维溃坝洪水波. 水利学报, 2005, 36(10): 1224-1229.

A review on the CE/SE method

LIU Kaixin[1], WANG Jintao[1], ZHANG Deliang[2]

(1. *Department of Mechanics and Aerospace Technology, College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China*)

(2. *Institute of Mechanics, Chinese Academic of Science, Beijing, 100080, China*)

Abstract: Space-time conservation element and solution element method (CE/SE method) is a novel high-resolution computational method for equations of conservation law. It has many merits such as the clear physics concept, high accuracy and the simple process of constructing the scheme. This CFD method has a very great future. This paper summarizes the basic theories, the progress of constructing the scheme, the history, application fields and recent advances of CE/SE method. Then, the future research topics and development tendency of the CE/SE method are discussed.

Key words: CE/SE method; computational fluid dynamics; equations of conservation law

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net