

八种结构动力反应积分算法的对比分析

刘祥庆¹, 刘晶波^{1*}, 丁桦²

(1.清华大学土木工程系, 北京, 100084; 2.中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

摘要:本文主要介绍了结构动力反应分析中的四种显式积分算法和四种常规的时域逐步积分算法, 针对其精度与稳定性进行了对比分析。通过理论分析与算例对比清楚地了解了不同积分算法的特点, 为在实际计算中选择一种合适的积分算法提供了参考。

关键词: 显式积分; 稳定性; 精度; 振幅衰减率; 周期延长率

1 引言

时域逐步积分法分为隐式积分格式方法与显式积分格式方法, 与隐式方法相比, 尽管显式方法是条件稳定的, 其计算时间步长必须取的一定小, 但对于较为复杂体系的动力反应问题, 特别是需要考虑体系非线性时, 采用条件稳定的显式积分格式求解动力反应是非常有利的。并且对于隐式积分方法来说, 受计算的精度要求限制, 计算步长不可能选取太大。对于不断增长的大型复杂结构非线性动力反应分析, 精度、稳定性与耗时之间的矛盾日益突出, 影响和制约了结构动力反应分析的发展。如果能够建立具有更高精度和更好稳定性的显式方法, 或者节约存储空间和计算时间的更好的隐式方法, 对大型复杂结构的科学分析和设计将具有重要的理论和实际意义。

常用的时域逐步积分法包括中心差分法、线性加速度法、无条件稳定的 Newmark- β 法、Wilson- θ 法、文献[4]算法等, 近些年来国内学者提出了几种新的显式积分算法, 本文选取其中的三种方法, 分别见文献[1]、[2]、[3]。

2 时域逐步积分算法与理论精度

离散系统的动力微分方程可表示如下:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{p(t)\} \quad (1)$$

其中, $\ddot{u}(t)$ 、 $\dot{u}(t)$ 、 $u(t)$ 与 $p(t)$ 分别表示体系的加速度、速度、位移与外力矢量; $[M]$ 、 $[C]$ 与 $[K]$ 分别表示体系的质量阵、阻尼阵与刚度阵。

1 文献[1]算法

文献[1]给出了一种显式积分算法, 其表达式如下所示。该积分算法的理论精度为 2 阶。

$$u_{i+1} = \Delta t^2 M^{-1} p_i / 2 + ([I] - \Delta t^2 M^{-1} K / 2) u_i + (\Delta t [I] - \Delta t^2 M^{-1} C / 2) \dot{u}_i \quad (2)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + M^{-1} [\Delta t(p_{i+1} + p_i) / 2 - (\Delta t K / 2 + C) u_{i+1} - (\Delta t K / 2 - C) u_i] \quad (3)$$

$$\ddot{u}_i = 2(u_{i+1} - u_i) / \Delta t^2 - 2\dot{u}_i / \Delta t \quad (4)$$

2 文献[2]算法

文献[2]算法的计算公式如下所示。该积分算法的理论精度为 2 阶。

$$u_{i+1} = \Delta t^2 M^{-1} p_i / 2 - (\Delta t^2 M^{-1} K / 2 - [I] - \Delta t M^{-1} C / 2) u_i - \Delta t M^{-1} C u_{i-1} / 2 + (\Delta t [I] - \Delta t^2 M^{-1} C) \dot{u}_i \quad (5)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \Delta t M^{-1} p_{i+1} / 2 - ([I] / \Delta t - M^{-1} C / 2) u_i - (\Delta t M^{-1} K / 2 - [I] / \Delta t + M^{-1} C / 2) u_{i+1} \quad (6)$$

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50478014), 国家 973 项目(2002CB412706), 国家人防办项目(国家人防科学技术研究十五计划)

作者简介: 刘祥庆(1981), 男, 山东人, 博士生, 主要从事地下结构抗震研究(E-mail: liuxiangqing99@mails.tsinghua.edu.cn)

刘晶波(1956), 男, 辽宁人, 教授, 主要从事结构工程和防火减灾工程研究(E-mail: liujb@tsinghua.edu.cn)

3 文献[3]算法

在文献[3]中，作者采用如下假设：在积分步长 Δt 时间间隔内，离散系统节点位移向量的 3 阶导数恒为常量，利用泰勒公式与平衡方程可以推导得到：

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \Delta t^2 \ddot{u}_i / 2 + \Delta t^3 \dddot{u}_i / 6 \quad (7)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t \ddot{u}_i + \Delta t^2 \dddot{u}_i / 2 \quad (8)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = M^{-1}(p_{i+1} - C\dot{u}_{i+1} - Ku_{i+1}) \quad (9)$$

$$\dddot{u}_{i+1} = M^{-1}(\dot{p}_{i+1} - C\ddot{u}_{i+1} - Ku_{i+1}) \quad (10)$$

式(7)~式(10)构成了文献[3]算法的逐步积分格式，该算法的理论精度为 3 阶。

4 文献[4]算法

在文献[4]中曾给出一种速度递推计算格式。该积分算法的理论精度为 2 阶。

$$\dot{u}_{i+1} = 2(u_{i+1} - u_i) / \Delta t - \dot{u}_i \quad (11)$$

结合式(2)，式(4)和式(11)可以推导得到文献[4]算法。

中心差分法、线性加速度法、无条件稳定的 Newmark- β 法($\gamma=1/2$, $\beta=1/4$)和 Wilson- θ 法为四种常规的时域逐步积分算法，理论精度均为 2 阶，具体计算公式和推导过程可以参考文献[4]。

以上八种算法中，文献[1]至[4]算法为显式算法。当无阻尼时，中心差分法也为显式算法，而其余方法为隐式算法。

3 时域逐步积分算法的稳定性分析

对于多自由度线性结构体系，其振动可以采用振型叠加法将振型反应的求解等效成单自由度结构体系振型反应的求解。因此，仅需研究单自由度结构体系的稳定性。

对应于式(1)的单自由度结构在 $t=i\Delta t$ 时刻的振动方程可简写成：

$$\ddot{u}_i + 2\zeta\omega_n\dot{u}_i + \omega_n^2 u_i = p_i \quad (12)$$

上式中， ω_n 、 ζ 、 p_i 分别为结构的圆频率、阻尼比和作用荷载， $u_i=u(i\Delta t)$ 。对于时域逐步积分算法，用于求解式(12)的反应时，可以导出如下递推关系：

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1} \\ u_i \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} u_i \\ \Delta t \dot{u}_i \end{Bmatrix} + [L] p_i \quad (13)$$

其中， $[A]$ 为积分算子逼近矩阵。由模态法稳定性分析原理可知，任一积分方法的稳定性仅依赖于其积分算子矩阵 $[A]$ 的特征值。可以表示为：

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0 \quad (14)$$

式中 $[I]$ 为与 $[A]$ 阶数相等的单位方阵， λ 为矩阵 $[A]$ 的特征值。令 $\rho([A])$ 为矩阵 $[A]$ 的谱半径，即定义 $\rho([A]) = \max|\lambda_j|$ ，($j=1, 2$)，其中 λ_j 为矩阵 $[A]$ 的第 j 个特征值。设 $\Omega=\omega_n\Delta t$ ，可知 λ_j 与 $\rho([A])$ 均为 Ω 和 ζ 的函数。由模态法稳定性分析原理，当 $\rho([A]) \leq 1.0$ 时，积分格式是稳定的，从而可以求出 Ω 和 ζ 的关系式。

根据上述原理，对本文八种积分算法稳定性条件分析如下：

文献[1]算法

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1} \\ \Delta t \dot{u}_{i+1} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} u_i \\ \Delta t \dot{u}_i \end{Bmatrix} + [L] \begin{Bmatrix} p_i \\ p_{i+1} \end{Bmatrix}$$
$$[A] = \begin{bmatrix} -\Omega^2/2 + 1 & -\zeta\Omega + 1 \\ \Omega^4/4 + \zeta\Omega^3 - \Omega^2 & \zeta\Omega^3/2 + (2\zeta^2 - 1/2)\Omega^2 - 2\zeta\Omega + 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \Omega \leq 2(\sqrt{1-3\zeta^2} - \zeta) / (1-4\zeta^2) & 0 \leq \zeta < 0.5 \\ \Omega \leq 1/\zeta & 0.5 \leq \zeta \leq 1 \end{cases} \quad (16)$$

文献[2]算法

$$\begin{cases} \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} u_{i+1} \\ u_i \end{array} \right\} = [A] \left\{ \begin{array}{l} u_i \\ u_{i-1} \end{array} \right\} + [L] p_i \\ & [A] = \begin{bmatrix} \zeta \Omega^3 + (2\zeta^2 - 1)\Omega^2 - 2\zeta\Omega + 2 & -2\zeta^2\Omega^2 + 2\zeta\Omega - 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \end{cases} \quad (17)$$

可以推得该算法的稳定性条件由如下两式组成:

$$\begin{cases} \zeta \Omega^3 + (4\zeta^2 - 1)\Omega^2 - 4\zeta\Omega + 4 \geq 0 \\ \zeta\Omega \leq 1 \end{cases} \quad (18)$$

上式包含 Ω 的高阶项, 因此稳定性条件无解析表达式。

对于文献[3]算法, 积分算子逼近矩阵 $[A]$ 为

$$\begin{cases} \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} u_{i+1} \\ \Delta t \dot{u}_{i+1} \end{array} \right\} = [A] \left\{ \begin{array}{l} u_i \\ \Delta t \dot{u}_i \end{array} \right\} + [L] \left\{ \begin{array}{l} p_i \\ \Delta t \dot{p}_i \end{array} \right\} \\ & [A] = \begin{bmatrix} \zeta \Omega^3 / 3 - \Omega^2 / 2 + 1 & (4\zeta^2 - 1)\Omega^2 / 6 - \zeta\Omega + 1 \\ \zeta \Omega^3 - \Omega^2 & (4\zeta^2 - 1)\Omega^2 / 2 - 2\zeta\Omega + 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \end{cases} \quad (19)$$

代入稳定性条件, 可以推得文献[3]算法的稳定性条件由如下四式组成:

$$\begin{cases} \begin{aligned} & \Omega^3 - 8\zeta\Omega^2 + 24\zeta^2\Omega - 24\zeta \leq 0 \\ & \Omega^4 - 8\zeta\Omega^3 + 24\zeta^2\Omega^2 - 24\zeta\Omega + 24 \geq 0 \\ & \Omega^2 - 12\zeta\Omega + 12 \geq 0 \\ & \Omega^4 - 4\zeta\Omega^3 + (48\zeta^2 - 12)\Omega^2 - 48\zeta\Omega + 48 \geq 0 \end{aligned} \end{cases} \quad (20)$$

上式包含 Ω 和 ζ 的高阶项, 因此稳定性条件无解析表达式, 稳定性条件图如图 1 中所示。

文献[4]算法

$$\begin{cases} \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} u_{i+1} \\ \Delta t \dot{u}_{i+1} \end{array} \right\} = [A] \left\{ \begin{array}{l} u_i \\ \Delta t \dot{u}_i \end{array} \right\} + [L] p_i \\ & [A] = \begin{bmatrix} -\Omega^2 / 2 + 1 & -\zeta\Omega + 1 \\ -\Omega^2 & -2\zeta\Omega + 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \begin{aligned} & \Omega \leq 4\zeta \quad 0 \leq \zeta < 0.5 \\ & \Omega \leq 1/\zeta \quad 0.5 \leq \zeta \leq 1 \end{aligned} \end{cases} \quad (22)$$

中心差分法

$$\begin{cases} \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} u_{i+1} \\ u_i \end{array} \right\} = [A] \left\{ \begin{array}{l} u_i \\ u_{i-1} \end{array} \right\} + [L] p_i \\ & [A] = \begin{bmatrix} (2 - \Omega^2) / (1 + \zeta\Omega) & (\zeta\Omega - 1) / (1 + \zeta\Omega) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \end{cases} \quad (23)$$

$$\Omega \leq 2 \quad (24)$$

对于广义 Newmark- β 法, 由文献[6]和文献[10]可得:

$$\begin{cases} \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} u_{i+1} \\ \Delta t \dot{u}_{i+1} \\ \Delta t^2 \ddot{u}_{i+1} \end{array} \right\} = [A] \left\{ \begin{array}{l} u_i \\ \Delta t \dot{u}_i \\ \Delta t^2 \ddot{u}_i \end{array} \right\} + [L] p_{i+1} \\ & [A] = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\beta & 1 - \alpha\beta - 2\beta\kappa & 1/2 - \beta - (1/2 - \beta)\alpha\beta - 2(1 - \gamma)\beta\kappa \\ -\alpha\gamma & 1 - \alpha\gamma - 2\gamma\kappa & 1 - \gamma - (1/2 - \beta)\gamma\alpha - 2(1 - \gamma)\gamma\kappa \\ -\alpha & -\alpha - 2\kappa & -(1/2 - \beta)\alpha - 2(1 - \gamma)\kappa \end{bmatrix} \end{aligned} \end{cases} \quad (25)$$

其中, $\alpha = (1/\Omega^2 + 2\zeta\gamma/\Omega + \beta)^{-1}$, $\kappa = \zeta\alpha/\Omega$ 。

稳定性条件:

$$\Omega \leq \frac{\zeta(\gamma - 1/2) + [\gamma/2 - \beta + \zeta^2(\gamma - 1/2)^2]^{1/2}}{\gamma/2 - \beta} \quad (26)$$

将参数值分别代入可求得线性加速度法的稳定性条件为:

$$\Omega \leq 2\sqrt{3} \quad (27)$$

Newmark- β 法($\gamma=1/2$, $\beta=1/4$)和 Wilson- θ 法($\theta>1.37$)为无条件稳定算法。

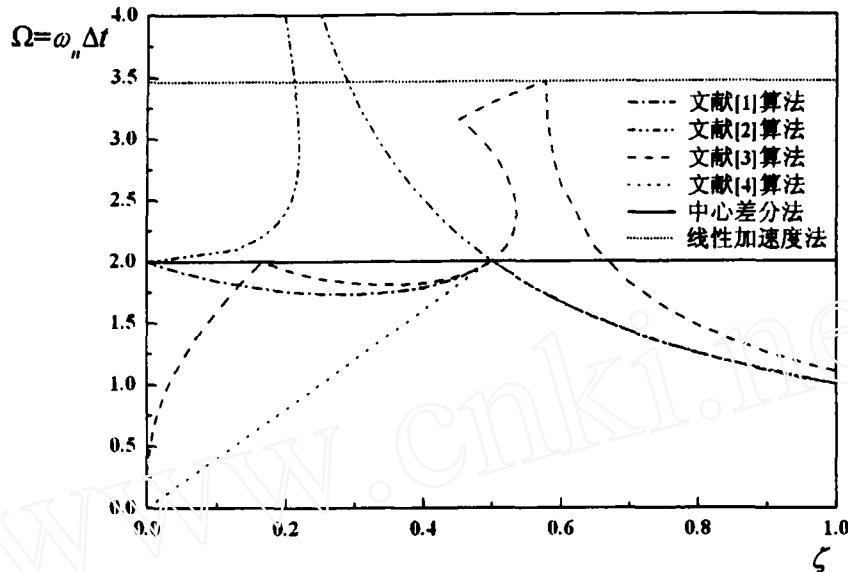


图 1 时域逐步积分算法稳定性对比分析

由所给出的各种方法的稳定性条件可知, 文献[3]算法与文献[4]算法在无阻尼时为无条件不稳定的, 这一点也从图 1 中可以清楚的看到; 在 $0.5 \leq \zeta \leq 1.0$ 范围内, 文献[1]算法、文献[2]算法与文献[4]算法的稳定性曲线重合。

4 时域逐步积分算法计算精度分析

本文从无阻尼情况下振幅衰减率(Amplitude Decay)和周期延长率(Period Elongation)两方面对以上八种积分算法的精度进行对比分析。振幅衰减率和周期延长率的定义如图 2 所示。初始速度为零, 振幅衰减率和周期延长率的计算公式如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} AD = \frac{u(T_n) - u(T)}{u(T_n)} \\ PE = \frac{T - T_n}{T_n} \end{array} \right. \quad (28)$$

其中, T_n 为结构的自振周期, T 为采用时域数值积分方法后体系的自振周期。

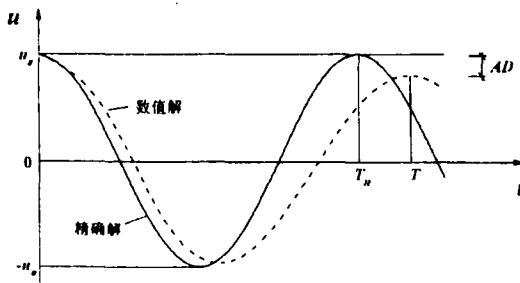


图 2 振幅衰减率和周期延长率的定义

下面以中心差分法为例介绍振幅衰减率和周期延长率的推导过程。中心差分法的位移递推公式为：

$$[M/\Delta t^2 + C/(2\Delta t)]u_{j+1} = p_j - (K - 2M/\Delta t^2)u_j - [M/\Delta t^2 - C/(2\Delta t)]u_{j-1} \quad (29)$$

由于算法的稳定性与外荷载无关，令外荷载 $p=0$ ，且设 $u_0=u(T_n)=1.0$ ，则式(29)可以写成如下形式：

$$u_{j+1} = (2 - \Omega^2)u_j - u_{j-1} \quad (30)$$

其中，

$$\Omega = \omega_n \Delta t = 2\pi \frac{\Delta t}{T_n} \quad (31)$$

令离散方程式(30)的解为

$$u_j = \lambda^j \quad (32)$$

将式(32)代入式(30)得到，

$$\lambda^2 + (\Omega^2 - 2)\lambda + 1 = 0 \quad (33)$$

求解式(33)可以得到，

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[(2 - \Omega^2) \pm \sqrt{\Omega^2(\Omega^2 - 4)} \right] \quad (34)$$

在满足稳定性条件下， λ 为虚数，可求得 $|\lambda|=1$ 。

设采用数值积分方法，单自由度体系运动方程为：

$$u(t) = Ae^{st} \quad (35)$$

取离散点 $t=k\Delta t$ ($k=1, 2, \dots$)，所以，

$$u(t) = u(k\Delta t) = |\lambda|^k (e^{s\Delta t})^k = (|\lambda| e^{s\Delta t})^k$$

结合式(32)得到，

$$|\lambda| e^{s\Delta t} = \lambda$$

令 $s=\pm i\omega$ ， i 为虚数标志， ω 为在数值积分算法下结构圆频率，所以，

$$e^{s\Delta t} = e^{\pm i\omega\Delta t} = \cos \omega\Delta t \pm i \sin \omega\Delta t \quad (36)$$

对于中心差分法， $|N|=1$ ，结合式(34)得到，

$$\cos \omega\Delta t = \frac{1}{2}(2 - \Omega^2) \quad (37)$$

所以，

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\arccos \left[1 - 2\pi^2 \left(\Delta t / T_n \right)^2 \right]} \quad (38)$$

所以周期延长率为：

$$AD = 1 - u(T) = 1 - |\lambda|^{\frac{T}{\Delta t}} = 0 \quad (39)$$

由式(37)最终可推得，

$$PE = \frac{T - T_n}{T_n} = \frac{2\pi \left(\Delta t / T_n \right) - \arccos \left[1 - 2\pi^2 \left(\Delta t / T_n \right)^2 \right]}{\arccos \left[1 - 2\pi^2 \left(\Delta t / T_n \right)^2 \right]}$$

令 $\Delta t / T_n = x$ ，则上式变为，

$$PE = \frac{2\pi x - \arccos \left[1 - 2(\pi x)^2 \right]}{\arccos \left[1 - 2(\pi x)^2 \right]} \quad (40)$$

同理，可以求得其它积分算法的 AD 与 PE 如下：

文献[1]算法

$$AD = 0, \quad PE = \frac{2\pi x - \arccos[1 - 2(\pi x)^2]}{\arccos[1 - 2(\pi x)^2]} \quad (41)$$

文献[2]算法

$$AD = 0, \quad PE = \frac{2\pi x - \arccos[1 - 2(\pi x)^2]}{\arccos[1 - 2(\pi x)^2]} \quad (42)$$

文献[3]算法

$$AD = 1 - \left(\sqrt{\Omega^4 / 12 + 1} \right)^{T/\Delta t} = 1 - \left[\sqrt{4(\pi x)^4 / 3 + 1} \right] \frac{2\pi}{\arccos[1 - 2(\pi x)^2] / \sqrt{4(\pi x)^4 / 3 + 1}} \quad (43)$$

$$PE = \frac{2\pi x - \arccos \left\{ [1 - 2(\pi x)^2] / \sqrt{4(\pi x)^4 / 3 + 1} \right\}}{\arccos \left\{ [1 - 2(\pi x)^2] / \sqrt{4(\pi x)^4 / 3 + 1} \right\}} \quad (44)$$

文献[4]算法

$$AD = 1 - \left(\sqrt{1 + \Omega^2 / 2} \right)^{T/\Delta t} = 1 - \left[\sqrt{1 + 2(\pi x)^2} \right] \frac{2\pi}{\arccos \left\{ [1 - (\pi x)^2] / \sqrt{1 + 2(\pi x)^2} \right\}} \quad (45)$$

$$PE = \frac{2\pi x - \arccos \left\{ [1 - (\pi x)^2] / \sqrt{1 + 2(\pi x)^2} \right\}}{\arccos \left\{ [1 - (\pi x)^2] / \sqrt{1 + 2(\pi x)^2} \right\}} \quad (46)$$

线性加速度法

$$AD = 0, \quad PE = \frac{2\pi x - \arccos \left\{ [3 - 4(\pi x)^2] / [3 + 2(\pi x)^2] \right\}}{\arccos \left\{ [3 - 4(\pi x)^2] / [3 + 2(\pi x)^2] \right\}} \quad (47)$$

Newmark- β 法

$$AD = 0, \quad PE = \frac{2\pi x - \arccos \left\{ [1 - (\pi x)^2] / [1 + (\pi x)^2] \right\}}{\arccos \left\{ [1 - (\pi x)^2] / [1 + (\pi x)^2] \right\}} \quad (48)$$

本文八种积分算法振幅衰减率图与周期延长率图如图 3 所示:

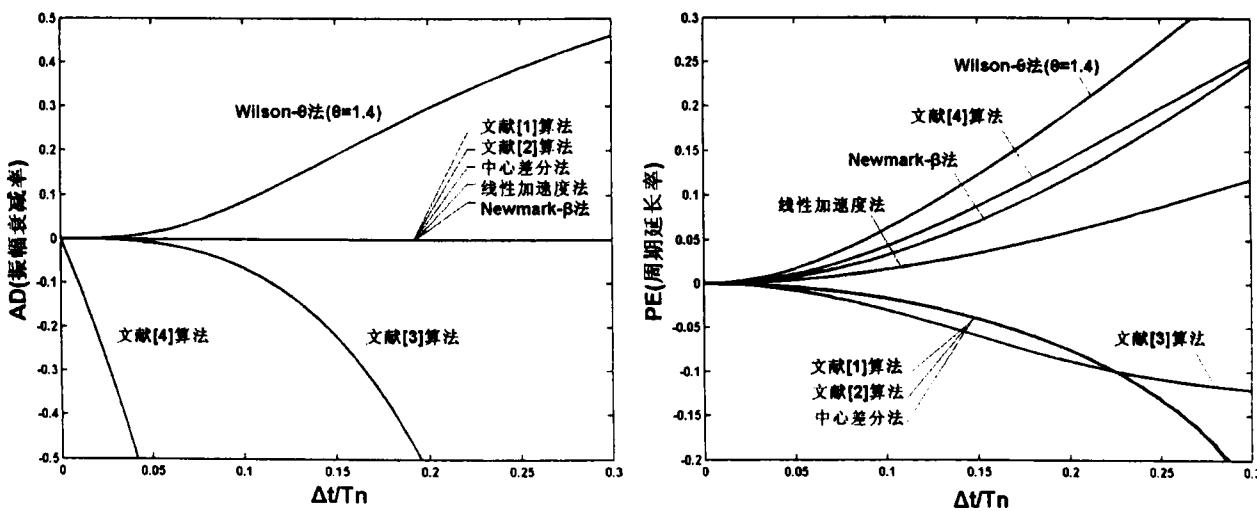


图 3 八种积分算法的振幅衰减率和周期延长率(无阻尼情况下)

在计算 AD 和 PE 时, 由于 Wilson- θ 法($\theta=1.4$)的 AD 与 PE 无法得到解析表达式, 本文采用 Matlab 求解其系数矩阵的特征值得到; 无阻尼情况下, 中心差分法、文献[1]算法和文献[2]算法的 PE 曲线重合。

5 不同算法精度的算例对比

1 无阻尼单自由度结构自由振动

对于无阻尼单自由度结构，取 $\zeta=0$, $k=1.0$, $m=1.0$, $u(0)=1.0$, $\dot{u}(0)=0$ 。计算步长分别为 $\Delta t/T_n=0.1$ 、 0.15 的位移—时间曲线如图 4、图 5 所示。

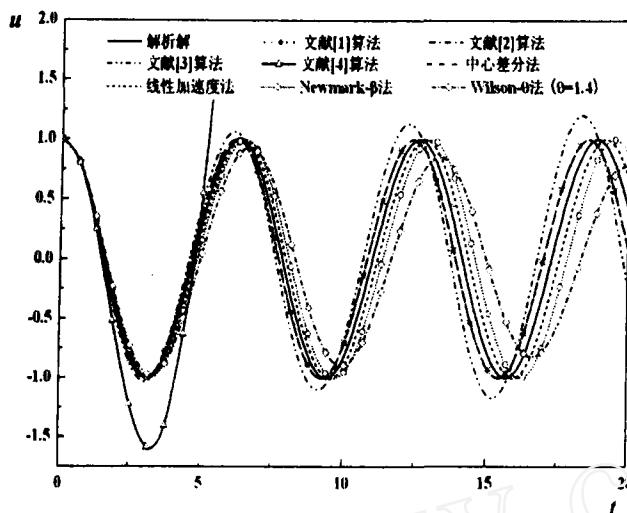


图 4 $\Delta t/T_n=0.1$ 时无阻尼单自由度结构算例

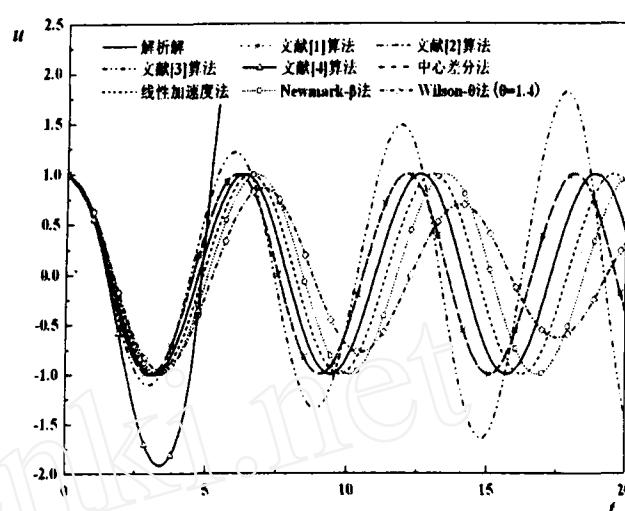


图 5 $\Delta t/T_n=0.15$ 时无阻尼单自由度结构算例

图 4、图 5 给出的计算结果与理论分析完全吻合，由图 4、图 5 可以发现：(1) 在无阻尼情况下，文献[3]算法和文献[4]算法是不稳定的；(2) 在第 4 节中求得无阻尼情况下中心差分法、文献[1]算法和文献[2]算法的 AD 与 PE 的表达式相同，本算例中，中心差分法、文献[1]算法和文献[2]算法的计算结果重合，验证了第 4 节中结果的正确性；(3) 中心差分法、文献[1]算法、文献[2]算法和线性加速度法的计算结果较优。

2 有阻尼单自由度结构自由振动

对于有阻尼单自由度结构，取 $\zeta=0.05$, $k=1.0$, $m=1.0$, $u(0)=1.0$, $\dot{u}(0)=0$ 。计算步长分别为 $\Delta t/T_n=0.1$ 、 0.15 的位移—时间曲线如图 6、图 7 所示。

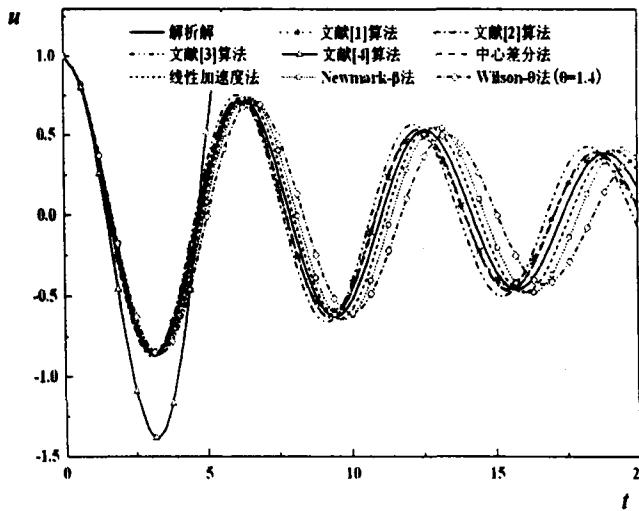


图 6 $\zeta=0.05$, $\Delta t/T_n=0.1$ 单自由度结构算例

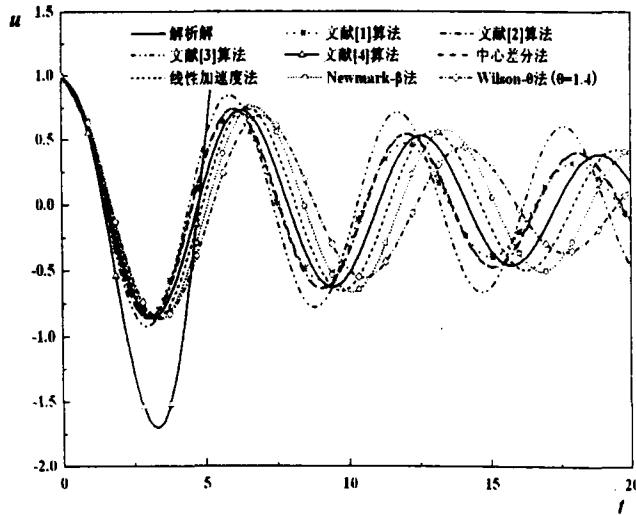


图 7 $\zeta=0.05$, $\Delta t/T_n=0.15$ 单自由度结构算例

观察图 6、图 7 可以发现：(1) 本算例中，文献[4]算法在两种计算步长下均发散，其在小阻尼情况下的稳定性较差；(2) 中心差分法和文献[2]算法的计算结果几乎完全重合；(3) 中心差分法、文献[1]算法、文献[2]算法和线性加速度法的计算结果较优。

6 结论

通过以上理论分析与算例比较，可以得到如下结论：

(1) 在无阻尼和有阻尼情况下，中心差分法、文献[1]算法、文献[2]算法与线性加速度法具有较高的数值精度，并且稳定性条件较好。

(2) 八种算法中，文献[1]至[4]算法为显式算法，在无阻尼时中心差分法也为显式算法，而其余方法为隐式算法。对于显式积分算法，尽管稳定性要求其计算步长必须取得一定小，但由此产生的计算量和计算时间的增加相对于隐式算法仍是小量，尤其是自由度数目较大的情况。从本文分析和算例可见，文献[1]算法和文献[2]算法稳定性条件和计算精度均较好，是较优的算法；文献[3]算法不适合于无阻尼和小阻尼情况，但可以用于较大阻尼比情况的计算。

(3) 算法的理论精度与其在实际计算中所表现出来的计算精度之间是有差异的。理论精度对应的是时间步长 Δt 趋向于零时的情况，而在实际计算中一般选取在满足稳定性条件下尽可能大的时间步长。由无阻尼情况的算例可见，算法在实际计算中表现出来的精度与其振幅衰减率(AD)、周期延长率(PE)相符。

以上分析对比限于结构为线弹性或粘弹性范围，显式积分算法在弹塑性条件下的表现还需要进一步研究。

参考文献：

- [1] 李小军, 廖振鹏, 杜修力. 有阻尼体系动力问题的一种显式差分解法[A]. 工程力学[C]. 北京: 科学技术出版社, 1992.
- [2] 杜修力, 王进廷. 阻尼弹性结构动力计算的显式差分法[J]. 工程力学, 2000, 17(5):37-43.
- [3] 张晓志 等. 结构动力反应分析的三阶显式方法[J]. 地震工程与工程振动, 2002, 22(3):1-8.
- [4] R.W.Clough, J.Penzien. Dynamics of Structures[M]. McGraw-Hill Inc., 1995.
- [5] Liu J B , Sharan S K. Analysis of dynamic contact of cracks in viscoelastic method[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1995, 121:187-200.
- [6] Bathe Klaus-Jurgen, Wilson Edward L. Numerical Methods in Finite Element Analysis[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1976.
- [7] 周正华, 周扣华. 有阻尼振动方程常用显式积分格式稳定性分析[J]. 地震工程与工程振动, 2001, 21(3):22-28.
- [8] 李小军, 刘爱文. 动力方程求解的显式积分格式及其稳定性与适用性[J]. 世界地震工程, 2000, 16(2):8-12.
- [9] 王进廷, 杜修力, 张楚汉. 瑞利阻尼介质有限元离散模型动力分析的数值稳定性[J]. 地震工程与工程振动, 2002, 22(6):18-24.
- [10] Subbaraj K., Dokainish M.A., A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics. I. Explicit Methods[J]. Computers & Structures. 1989, 32(6):1371-1386.