

# 不可压和可压缩湍流的多尺度方程组

高智<sup>1</sup> 庄逢甘<sup>2</sup>

(1 中国科学院力学研究所,北京 100080;  
2 中国航天科技集团总公司,北京 100830)

**摘要** 基于湍流尺度间相互作用的近程特征<sup>[1~5]</sup>,作者们曾建议湍流平均分析的多尺度方法<sup>[6~12]</sup>。本文进一步研讨这一问题。从空间平均不可压 Navier Stokes 方程组,动量和能量湍流交换定义式出发,论证了尺度间相互作用的近程特征,给出近程尺度范围估计,获得近程涡应力,近程涡热传导等的积分和微分近似式;引入尺度间共振相互作用的概念,获得共振涡应力,共振涡热传导等的微分近似式;给出二尺度和三尺度方程组,它们都是不包含经验常数的近似封闭方程组,讨论了多尺度方程组的性质及其与传统大涡模拟方程组的区别;考察了二尺度方程组计算不可压槽道和平面混合层流动三维时间演化的数值结果。对可压缩湍流,通过类似于不可压湍流多尺度方法的处理,给出了可压湍流多尺度(二尺度和三尺度)方程组。可压湍流多尺度方程也含有 Favre 平均量( $\bar{\rho}u_i, \bar{\rho}e_t$ )和物理平均量( $\bar{\rho}, \bar{u}_i, \bar{e}_t$ )之间的一组非线性关系式。这些关系式体现了湍流的可压缩效应。

**关键词** 湍流 湍流多尺度方程组 不可压缩流 可压缩流

## 1 引言

湍流是一种不规则的流动状态,它的所有量(速度、温度、密度和压力)均随时间和空间坐标而随机变化,而且它包含了宽广的时间-空间尺度范围,因此湍流研究的平均方法(包含时间平均、空间平均和系统平均方法)具有重要的理论意义和应用价值。在雷诺时均 Navier-Stokes(RANS)方程、大涡模拟(LES)方程以及湍流重整化群理论中对湍流尺度间相互作用的处理,均采用了 J. Boussinesq 一百多年前提出,后经 G. Taylor 和 L. Prandtl 发展的涡黏性概念,涡黏性概念用分子黏性比拟湍流黏性,也就是说假定了尺度间相互作用主要是尺度彼此可以分得很开的尺度间的远程(Long-range)相互作用<sup>[1~5]</sup>。涡黏性概念在湍流理论及工程应用计算中得到了广泛应用。然而,人们普遍认为湍流不同尺度间的相互作用主要是相近尺度间的近程(Short-range)相互作用<sup>[1~4]</sup>。R. Kraichnan 的直接相互作用理论<sup>[4]</sup>,近年来处理槽道湍流直接数值模拟(DNS)数据库的数值分析结语<sup>[4,5]</sup>,都证实了湍流不同波数之间的交换主要是相近波数间的交换。本文综述作者们从 1992 年开始的湍流多尺度模型研究<sup>[6~12]</sup>,并简要评述利用大小尺度(LSS)方程组计算不可压槽道流和平面混合层流动三维时间演化的数值结果。

## 2 不可压缩湍流的多尺度问题

本节从不可压 NS 方程组的空间平均方程组和涡应力定义式出发,顺序论证了湍流尺度

间相互作用的近程性质,给出近程尺度范围估计,求得近程涡应力、涡热传导、涡应力功的积分和微分近似式;引入尺度间共振相互作用的概念,求得共振涡应力、共振热传导、共振涡应力功的微分近似式;给出不可压湍流多尺度(包括二尺度和三尺度)方程组,讨论了多尺度方程组的一些性质;最后给出二尺度方程组计算不可压槽道流动和平面混合层流动的三维时间演化的一些数值结果。空间平均不可压缩 Navier-Stokes(NS)方程组为

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial t} + U_{cj} \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} = - \frac{\partial p_c}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial F_{ci}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{ct}}{\partial t} + U_{cj} \frac{\partial e_{ct}}{\partial x_j} + U_{cj} \frac{\partial p_c}{\partial x_j} &= - \frac{\partial E_c}{\partial x_j} - \frac{\partial P_c}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} [U_{ci} \tau_{ji}(U_{cj})] + \\ &\quad \frac{1}{Re} \frac{\partial \Pi_c}{\partial x_j} + \frac{1}{Re Pr (\gamma - 1) M_\infty^2} \frac{\partial^2 T_c}{\partial x_j \partial x_i} \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中

$$(U_{ci}, p_c, T_c, e_{ct}) = V_c^{-1} \int (u_i, p, T, e_t) dv \quad V_c = \Delta x_c \Delta y_c \Delta z_c \quad (2.1)$$

$$\tau_{ji}(u_j) = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \tau_{ji}(U_{ci}) = \mu \left( \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

$$F_{ci} = F_{ci}(u_i, U_{ci}) = V_c^{-1} \int (u_j - U_{cj})(u_i - U_{ci}) dv \quad (2.3)$$

$$E_c = E_c(u_j, e_{ct}) = V_c^{-1} \int (u_j - U_{cj})(e_t - e_{ct}) dv \quad (2.4)$$

$$P_c = P_c(u_j, p_c) = V_c^{-1} \int (u_j - U_{cj})(p - p_c) dv \quad (2.5)$$

$$\Pi_c = \Pi_c(u_i, \tau_{ji}(U_{cj})) = V_c^{-1} \int (u_i - U_{ci}) [\tau_{ji}(u_j) - \tau_{ji}(U_{cj})] dv \quad (2.6)$$

$Re = \rho U_\infty L / \mu$ ,  $Pr = \mu C_p / k$ ,  $\gamma = C_p / C_v$ ,  $M_\infty = U_\infty / a_\infty$ , 坐标变量  $x_i (i = 1, 2, 3)$ , 时间  $t$ , 流速分量  $u_i$ , 压力  $p$ , 温度  $T$ , 总能  $e_t$  分别用特征边界长度  $L$ ,  $L/U_\infty$ ,  $U_\infty$ ,  $\rho U_\infty^2$ ,  $T_\infty$  和  $U_\infty^2$  归一化; 足标  $\infty$  表示自由流条件。 $\tau_{ij}$  是黏性应力分量, 总能  $e_t = C_v T + \frac{1}{2} u_i u_i$ 。 $F_{ci}$ ,  $E_c$ ,  $P_c$  和  $\Pi_c$  分别是尺度  $\Delta x > \Delta x_c$ ,  $\Delta y > \Delta y_c$ ,  $\Delta z > \Delta z_c$ , (简记为  $\Delta x > \Delta x_c$ , 下同) 的大尺度与尺度  $\Delta x < \Delta x_c$  的小尺度之间的湍流应力(亦称涡应力), 湍热传导, 湍压力功和湍应力功。

## 2.1 尺度间互作用的近程特点

下面简略证明相互作用的近程性质。由于 NS 方程组解  $u_i$ ,  $p$ ,  $e_t$  和  $T$  以及空间平均 NS 方程组(1.1)~(1.3)解  $U_{ci}$ ,  $p_c$ ,  $e_{ct}$  和  $T_c$  连续可微, 因此可从  $F_{ci}$  的原始定义式(2.3)导出它的微分式

$$F_{ci} = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial u_j}{\partial y} \frac{\partial u_i}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial u_j}{\partial z} \frac{\partial u_i}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) + O(\Delta x_c^4) \quad (3.1)$$

$$F_{ci}(u_i, U_{ci}) = F_{fi}(u_i, U_{fi}) + F_{cfi}(U_{fi}, U_{ci}) + O(\Delta x_f^2 \Delta x_c^2) \quad (3.2)$$

其中

$$F_{fi} = F_{fi}(u_i, U_{fi}) = V_f^{-1} \int (u_j - U_{fj})(u_i - U_{fi}) dv \quad (3.3)$$

$$(U_{fi}, p_f, e_{ft}, T_f) = V_f^{-1} \int (u_i, p, e_t, T) dv \quad (3.4)$$

$$V_f = \Delta x_f \Delta y_f \Delta z_f \quad (\Delta x_f < \Delta x_c, \Delta y_f < \Delta y_c, \Delta z_f < \Delta z_c) \quad (3.5)$$

$$F_{cfi} = F_{cfi}(U_{fi}, U_{ci}) = V_c^{-1} \int (U_{fi} - U_{ci})(U_{fi} - U_{ci}) dv \quad (3.6)$$

$F_{fi}$  表示尺度  $\Delta x < \Delta x_f$  的所有小尺度作用于尺度  $\Delta x > \Delta x_f$  的涡应力,  $F_{ci}$  表示尺度介于  $\Delta x_c > \Delta x > \Delta x_f$  的相邻小尺度作用于尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  的涡应力, 称近程涡应力。类似于式(3.1)的导出, 不难推出涡应力  $F_{fi}$  的微分式

$$F_{fi}^d = F_{fi}^d(u_i, U_{fi}) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial u_i}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{\partial u_i}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) + O(\Delta x_f^4) \quad (4)$$

不失一般性, 进一步假定  $V_f$  和  $V_c$  为相似长方体, 且  $\Delta x_f / \Delta x_c = \Delta y_f / \Delta y_c = \Delta z_f / \Delta z_c$ , 则由式(3.1), (3.2)和(3.6)推出

$$F_{fi} = F_{fi}(u_i, U_{fi}) = V_f^{-1} \int (u_i - U_{fi})(u_i - U_{fi}) dv \approx \frac{\Delta x_f^2}{\Delta x_c^2} F_{ci}(u_i, U_{ci}) \quad (5.1)$$

$$F_{ci}(U_{fi}, U_{ci}) \approx \left( 1 - \frac{\Delta x_f^2}{\Delta x_c^2} \right) F_{ci} \quad (5.2)$$

根据式(5.1)和(5.2)可算出  $|F_{cfi}| / |F_{ci}|$ ,  $|F_{fi}| / |F_{ci}|$  和  $|F_{fi}| / |F_{cfi}|$  的近似值, 参见表 1。

表 1  $|F_{cfi}| / |F_{ci}|$ ,  $|F_{fi}| / |F_{ci}|$  和  $|F_{fi}| / |F_{cfi}|$  随  $\Delta x_f / \Delta x_c$  的变化

$\Delta x_f / \Delta x_c$	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$ F_{cfi}  /  F_{ci} $	0.36	0.51	0.64	0.75	0.84	0.91	0.96	0.99
$ F_{fi}  /  F_{ci} $	0.64	0.49	0.36	0.25	0.16	0.09	0.04	0.01
$ F_{fi}  /  F_{cfi} $				0.33	0.19	0.10	0.04	0.01

由表 1 数据可知, 不同尺度间的相互作用主要是近程作用, 近程尺度范围的估计为: 对尺度  $\Delta x_c$  来说, 近程尺度范围应从  $\Delta x_c$  到  $\Delta x_f \approx \frac{1}{2} \Delta x_c \sim \frac{1}{5} \Delta x_c$ , 此时近程涡应力  $F_{cfi}$  分别约为尺度  $\Delta x < \Delta x_c$  的整个小尺度范围作用于大尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  范围涡应力  $F_{ci}$  的 75% ~ 96%; 尺度  $\Delta x < \Delta x_f$  的整个小尺度范围作用于尺度  $\Delta x > \Delta x_f$  的涡应力  $F_{fi}$  约为  $F_{ci}$  的 25% ~ 4%;  $F_{fi}$  约为近程涡应力  $F_{cfi}$  的 33% ~ 4%。

利用  $U_{fi}$  和  $U_{ci}$  的连续可微性, 由近程涡应力  $F_{cfi}$  的原始定义式(4)导出它的微分式

$$F_{cfi}^d(U_{fi}, U_{ci}) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) + O(\Delta x_c^4) \quad (6)$$

## 2.2 尺度间共振互作用的概念

下面我们引入湍流尺度间共振相互作用的概念, 考虑尺度彼此十分靠近的尺度间的涡应力。当  $V_f$  十分靠近  $V_c$ , 即当  $\Delta x_f \rightarrow \Delta x_c, \Delta y_f \rightarrow \Delta y_c, \Delta z_f \rightarrow \Delta z_c, V_f \rightarrow V_c$ ; 必有  $U_{fi} \rightarrow U_{ci}$ ; 在近程涡应力微分式(6)中令  $U_{fi} \rightarrow U_{ci}$ , 得到尺度彼此十分靠近的尺度间的共振涡应力微分式

$$F_{ci}^d(U_{ci}, U_{ci}) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{ci}}{\partial x} \frac{\partial U_{ci}}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{ci}}{\partial y} \frac{\partial U_{ci}}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{ci}}{\partial z} \frac{\partial U_{ci}}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) + O(\Delta x_c^4) \quad (7.1)$$

对尺度  $\Delta x_f$ , 共振涡应力微分式为

$$F_{ff}^d(U_{fi}, U_{fi}) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \Delta x_f^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \Delta y_f^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \Delta z_f^2 \right) \quad (7.2)$$

## 2.3 湍能交换的近程和共振特性

通过与导出近程和共振涡应力的类似考虑和推导,不难导出近程和共振涡热传导,共振涡应力功和涡压力功的积分或微分表达式。近程涡热传导,近程涡压力功,近程涡应力功的积分和微分表达式分别为

$$E_{cf}(U_{fi}, e_{ct}) = V_c^{-1} \int (U_{fi} - U_{ci})(e_{ft} - e_{ct}) dv + O(\Delta x_f^2 \Delta x_c^2) \quad (8.1)$$

$$E_{cf}^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial e_{fi}}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial e_{fi}}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial e_{fi}}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) + O(\Delta x_c^4) \quad (8.2)$$

$$P_{cf}(U_{fi}, p_c) = V_c^{-1} \int (U_{fi} - U_{ci})(p_f - p_c) dv + O(\Delta x_f^2 \Delta x_c^2) \quad (8.3)$$

$$P_{cf}^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial p_f}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial p_f}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial p_f}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) + O(\Delta x_c^4) \quad (8.4)$$

$$\Pi_{cf}(U_{fi}, \tau_{ji}(U_{cj})) = \frac{1}{V_c} \int (U_{fi} - U_{ci}) [\tau_{ji}(U_{fi}) - \tau_{ji}(U_{cj})] dv + O(\Delta x_f^2 \Delta x_c^2) \quad (8.5)$$

$$\Pi_{cf}^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial \tau_{ji}(U_{fi})}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial \tau_{ji}(U_{fi})}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial \tau_{ji}(U_{fi})}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (8.6)$$

假定导出关系式(5.1)和(5.2)时所作的假设成立,同样可以导得

$$E_c(u_j, e_{ct}) \approx E_f(u_j, e_{ft}) + E_{cf}(U_{fi}, e_{ct}) \quad (9.1)$$

$$E_{cf}(U_{fi}, e_{ct}) \approx \left(1 - \frac{\Delta x_f^2}{\Delta x_c^2}\right) E_c(u_j, e_{ct}) \quad (9.2)$$

$$P_c(u_j, p_c) \approx P_f(u_j, p_f) + P_{cf}(u_{fi} + p_c) \quad (9.3)$$

$$P_{cf}(U_{fi}, p_c) \approx \left(1 - \frac{\Delta x_f^2}{\Delta x_c^2}\right) P_c(u_j, p_c) \quad (9.4)$$

$$\Pi_c(u_j, \tau_{ji}(U_{cj})) = \Pi_f(u_j, \tau_{ji}(U_{fi})) + \Pi_{cf}(U_{fi}, \tau_{ji}(U_{cj})) \quad (9.5)$$

$$\Pi_{cf}(U_{fi}, \tau_{ji}(U_{cj})) = \left(1 - \frac{\Delta x_f^2}{\Delta x_c^2}\right) \Pi_c(u_j, \tau_{ji}(U_{cj})) \quad (9.6)$$

以上(9.1)~(9.6)诸式表明:不同尺度间的湍能交换主要发生在相近尺度之间,对湍能交换,近程小尺度范围估计与湍流动量交换近程小尺度范围估计一致,并有

$$|E_{cf}| / |E_c| \approx |P_{cf}| / |P_c| \approx |\Pi_{cf}| / |\Pi_c| \approx |F_{cfi}| / |F_{ci}| \quad (10.1)$$

$$|E_f| / |E_{cf}| \approx |P_f| / |P_{cf}| \approx |\Pi_f| / |\Pi_{cf}| \approx |F_{fi}| / |F_{cfi}| \quad (10.2)$$

$|F_{cfi}| / |F_{ci}|$  和  $|F_{fi}| / |F_{cfi}|$  比值的估计见表 1。

上述湍流尺度间动量共振交换的概念,同样适用于湍能交换。由湍能共振交换概念,即由尺度彼此十分靠近的尺度间湍能交换的概念,同样可以导出如下的共振涡热传导、共振涡压力功和共振涡应力功的微分表达式,对尺度  $\Delta x_f$  为

$$E_{ff}^d = E_{ff}^d(U_{fi}, e_{fi}) \approx \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial e_{fi}}{\partial x} \Delta x_f^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial e_{fi}}{\partial y} \Delta y_f^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial e_{fi}}{\partial z} \Delta z_f^2 \right) \quad (11.1)$$

$$P_{ff}^d = P_{ff}^d(U_{fi}, p_f) \approx \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial p_f}{\partial x} \Delta x_f^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial p_f}{\partial y} \Delta y_f^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial p_f}{\partial z} \Delta z_f^2 \right) \quad (11.2)$$

$$\Pi_{ff}^d = \Pi_{ff}^d(U_{fi}, \tau_{ji}(U_{fi})) \approx \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial \tau_{ji}(U_{fi})}{\partial x} \Delta x_f^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial \tau_{ji}(U_{fi})}{\partial y} \Delta y_f^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial \tau_{ji}(U_{fi})}{\partial z} \Delta z_f^2 \right) \quad (11.3)$$

有关湍流动量、能量近程和共振交换的进一步分析,将在下节给出。

## 2.4 不可压缩湍流的两尺度方程组

湍流尺度间动量、能量交换的近程性质,必然导致湍流空间平均分析的多尺度模型,即应事先把计算尺度范围分成几个(至少二个)尺度范围,且对每个尺度范围都需要给出它的运动方程组,这些方程组通过湍流动量、能量近程交换规律(公式)彼此相关联。考虑尺度被分为 $\Delta x > \Delta x_c$ 的大尺度范围和尺度介于 $\Delta x_f < \Delta x < \Delta x_c$ ( $\approx (\frac{1}{2} \sim \frac{1}{5})\Delta x_c$ )近程小尺度范围之两尺度模型,基本方程组包括控制大尺度平均量的大尺度方程组和支配近程小尺度涨落运动的小尺度方程组。利用节 2.1~2.3 中给出的结果,容易写出大尺度和小尺度方程组分别为

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial x_i} = 0 \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial t} + U_{ci} \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} = - \frac{\partial p_c}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial F_{cfi}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (12.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{ci}}{\partial x_i} + U_{ci} \frac{\partial e_{ci}}{\partial x_j} = & - U_{ci} \frac{\partial p_c}{\partial x_j} - \frac{\partial E_{cf}}{\partial x_j} - \frac{\partial P_{cf}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} [U_{ci} \tau_{ji}(U_{ij})] + \\ & \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_{cf}}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{1}{Re Pr(\gamma - 1) M_\infty^2} \frac{\partial^2 T_c}{\partial x_j \partial x_i} \end{aligned} \quad (12.3)$$

和

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (U_{fi} - U_{cj}) = 0 \quad (13.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (U_{fi} - U_{ci}) + (U_{fi} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{fi} - U_{ci}) = & - \frac{\partial}{\partial x_i} (p_f - p_c) - U_{cj} \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{fi} - U_{ci}) - \\ & (U_{fi} - U_{cj}) \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 (U_{fi} - U_{ci})}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial F_{cfi}}{\partial x_j} - \frac{\partial F_{ff}^d}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (13.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (e_{fi} - e_{ct}) + (U_{fi} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{fi} - e_{ct}) = & - U_{cj} \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{fi} - e_{ct}) - (U_{fi} - U_{cj}) \frac{\partial e_{ct}}{\partial x_j} - \\ & (U_{fi} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (p_f - p_c) - (U_{fi} - U_{cj}) \frac{\partial p_c}{\partial x_j} - U_{cj} \frac{\partial}{\partial x_j} (p_f - p_c) + \\ & \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} [U_{fi} \tau_{ji}(U_{fi}) - U_{ci} \tau_{ji}(U_{cj})] + \frac{\partial E_{cf}}{\partial x_j} - \frac{\partial P_{cf}^d}{\partial x_j} + \frac{\partial P_{ff}^d}{\partial x_j} - \frac{\partial \Pi_{cf}}{\partial x_j} + \\ & \frac{\partial \Pi_{ff}^d}{\partial x_j} + \frac{1}{Re Pr(\gamma - 1) M_\infty^2} \frac{\partial^2 (T_f - T_c)}{\partial x_j \partial x_i} \end{aligned} \quad (13.3)$$

其中 $(U_{ci}, p_c, T_c, e_{ct})$ 和 $(U_{fi}, p_f, T_f, e_{ft})$ 的定义见式(2.1)和(3.4);近程涡应力 $F_{cfi}$ 、涡热传导 $E_{cf}$ 、涡压力功 $P_{cf}$ 和近程涡应力功 $\Pi_{cf}$ 见(4)式和(8)式,它们均可代之以它们的相应微分式 $F_{cfi}^d$ 、 $E_{cf}^d$ 、 $P_{cf}^d$ 和 $\Pi_{cf}^d$ ,参见(6)式和(8)式;共振涡应力 $F_{ff}^d$ 、共振涡热传导 $E_{ff}^d$ 、共振涡压力功 $P_{ff}^d$ 和共振涡应力功 $\Pi_{ff}^d$ 见(7)式和(8)式。小尺度 $\Delta x_f$ 与常见 LES 中的滤波尺度一致,大尺度 $\Delta x_c \approx (2 \sim 5)\Delta x_f$ 。大小尺度(LSS)方程组包含 10 个方程和 10 个未知量 $U_{ci}, U_{fi} (i = 1, 2, 3), p_c, p_f, e_{ct}$ (或 $T_c$ )和 $e_{ft}$ (或 $T_f$ );因此 LSS 方程组近似封闭,且不包含任何经验常数和经验关系。

由 LSS 方程组(12)、(13)和湍流动量、能量近程和共振交换的结果(参见节 2.1~2.3)可

知:1)支配大尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  运动的湍流动量、能量交换主要发生在大尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  和尺度介于  $\Delta x_c$  和  $\Delta x_f$  ( $\approx (\frac{1}{2} \sim \frac{1}{5})\Delta x_c$ ) 的近程小尺度之间,更小尺度  $\Delta x < \Delta x_f$  对大尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  近似无影响;2)支配近程小尺度涨落运动的湍流动量和能量传输主要来自于大尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  的贡献,更小尺度  $\Delta x < \Delta x_f$  的贡献比较次要,更小尺度  $\Delta x < \Delta x_f$  的贡献在方程(13)中已用尺度  $\Delta x_f$  处的共振涡应力、共振涡热传导来近似。上述结语显然与 Domaradzki 等分析槽道湍流直接数值模拟(DNS)数据库获得的结语<sup>[4,5]</sup>相一致。文献[4,5]的主要结语是:1)波数  $k < k_1$  的非线性动力学主要为它们与波数  $k$  介于  $k_1$  和  $2k_1$  之间近程波数范围的非线性相互作用所支配,更高波数  $k > 2k_1$  的影响比较次要;2)近程波数范围  $k_1 < k < 2k_1$  的亚格子尺度动力学主要为它们与波数  $k < k_1$  的低波数范围的非线性相互作用所支配,更高波数对近程波数范围的影响比较次要。文献[4,5]和本文的结语表明:尺度介于  $\Delta x_c$  和  $\Delta x_f$  之间近程小尺度的涨落运动主要为大尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  所支配。近程小尺度范围的大小,文献[4,5]的估计为  $\Delta x_c$  到  $\frac{1}{2}\Delta x_c$  (即波数由  $k_c$  到  $2k_c$ )。本文的估计为  $\Delta x_c$  到  $\Delta x_f$  ( $\approx (\frac{1}{2} \sim \frac{1}{5})\Delta x_c$ ) (即波数由  $k_c$  到  $k_f \approx (2 \sim 5)k_c$ );前者的估计针对不可压槽道湍流,后者针对不可压湍流的所有情况。

LSS 方程组(12)和(13)与传统大涡模拟(LES)方程组的一些比较:在 LSS 方程组中不可分辨小尺度  $\Delta x < \Delta x_f$  的影响只波及可分辨尺度的近程小尺度范围  $\Delta x_f < \Delta x < \Delta x_c$ ,对大尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  无作用;而在 LES 方程组中不可分辨小尺度的影响能够波及尺度  $\Delta x > \Delta x_f$  的全部可分辨尺度范围。因此与 LES 方程组相比,LSS 方程组能够更好的反映湍流尺度间相互作用的近程性质。

应当指出,尺度  $\Delta x < \Delta x_f$  的不可分辨尺度同样包含了宽广的时间-空间尺度范围,因此反映不可分辨小尺度对可分辨尺度影响的任何公式表示(例如亚格子尺度(SGS)应力模式,共振涡应力公式等),都具有近似性质,都含有未知的不确定因素,因此利用已有很好研究的 SGS 应力模式取代 LSS 方程组(13)中的共振涡应力诸公式也是可取的一种方案。文<sup>[13]</sup>在湍流两波数模型中,为了反映不可分辨高波数  $k > k_f$  对波数介于  $k_f$  和  $k_c (< k_f)$  之间可分辨波数范围的影响,使用了 SGS 应力模式。

## 2.5 不可压缩湍流的多尺度模型问题

由大小尺度(LSS)方程组(12)、(13)可知,大尺度“涡”从主流中获取动能(即提供脉动动能),近程小尺度从大尺度获取湍能的同时也消耗湍能(并转化为热能)。湍流 LSS 方程组成立的一个必要条件是:近程小尺度从大尺度获取湍能的速率等于湍能耗散的速率。若湍能耗散率小于或大于获取(或称产生)率,则湍能将在近程小尺度积累导致数值计算发散或近程小尺度涨落运动不能维持。对湍能耗散率小于产生率的情况,一种解决办法是在两尺度,即 LSS 方程组中适当增大共振耗散项;另一个合理的解决办法是采用尺度多于两个的多尺度模型,例如把计算的尺度范围预先划分为三个尺度范围。三尺度模型的基本方程组包括支配尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  大尺度平均运动的大尺度方程组,支配尺度介于  $\Delta x_c$  和  $\Delta x_m$  之间近程中尺度涨落运动的中尺度方程组和支配尺度介于  $\Delta x_m$  和  $\Delta x_f$  之间小尺度涨落运动的小尺度方程组。大尺度方程组为

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (14.1)$$

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial t} + U_{cj} \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} = - \frac{\partial p_c}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial F_{cfi}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (14.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{ct}}{\partial t} + U_{cj} \frac{\partial e_{ct}}{\partial x_j} &= - U_{cj} \frac{\partial p_c}{\partial x_j} - \frac{\partial E_{cf}}{\partial x_j} - \frac{\partial P_{cf}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} [U_{ci} \tau_{ji}(U_{cj})] + \\ &\quad \frac{1}{Re} \frac{\partial \Pi_{cf}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re Pr(\gamma - 1) M_\infty^2} \frac{\partial^2 T_c}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (14.3)$$

中尺度方程组为

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (U_{mj} - U_{cj}) = 0 \quad (15.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (U_{mi} - U_{ci}) + (U_{mj} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{mi} - U_{ci}) &= - \frac{\partial}{\partial x_i} (p_m - p_c) - U_{cj} \frac{\partial}{\partial x_i} (U_{mi} - U_{ci}) - \\ (U_{mj} - U_{cj}) \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 (U_{mi} - U_{ci})}{\partial x_j \partial x_j} &+ \frac{\partial F_{cmi}}{\partial x_j} - \frac{\partial F_{mf}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (15.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (e_{mt} - e_{ct}) + (U_{mj} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{mt} - e_{ct}) &= - U_{cj} \frac{\partial}{\partial x_i} (e_{mt} - e_{ct}) - \\ (U_{mj} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (p_m - p_c) - (U_{mj} - U_{cj}) \frac{\partial p_c}{\partial x_j} &- U_{cj} \frac{\partial}{\partial x_j} (p_m - p_c) + \\ \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} [U_{mi} \tau_{ji}(U_{mj}) - U_{ci} \tau_{ji}(U_{cj})] + \frac{\partial E_{cm}}{\partial x_j} &- \frac{\partial E_{mf}}{\partial x_j} + \frac{\partial P_{cm}}{\partial x_j} - \frac{\partial P_{mf}}{\partial x_j} + \\ \frac{\partial \Pi_{cm}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Pi_{mf}}{\partial x_j} &+ \frac{1}{Re Pr(\gamma - 1) M_\infty^2} \frac{\partial^2 (T_m - T_c)}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (15.3)$$

小尺度方程组为

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (U_{fi} - U_{mj}) = 0 \quad (16.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (U_{fi} - U_{mi}) + (U_{fi} - U_{mj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{fi} - U_{mi}) &= - \frac{\partial}{\partial x_i} (p_f - p_m) - U_{mj} \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{fi} - U_{mi}) - \\ (U_{fi} - U_{mj}) \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 (U_{fi} - U_{mi})}{\partial x_j \partial x_j} &+ \frac{\partial F_{mfi}}{\partial x_j} - \frac{\partial F_{ff}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (16.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (e_{ft} - e_{mt}) + (U_{fi} - U_{mj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{ft} - e_{mt}) &= - U_{mj} \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{ft} - e_{mt}) - \\ (U_{fi} - U_{mj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (p_f - p_m) - (U_{fi} - U_{mj}) \frac{\partial p_m}{\partial x_j} &- U_{mj} \frac{\partial}{\partial x_j} (p_f - p_m) + \\ \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} [U_{fi} \tau_{jt}(U_{fi}) - U_{mi} \tau_{ji}(U_{mj})] + \frac{\partial E_{mf}}{\partial x_j} &- \frac{\partial F_{ff}}{\partial x_j} + \\ \frac{\partial P_{mf}}{\partial x_j} - \frac{\partial P_{ff}^d}{\partial x_j} &+ \frac{\partial \Pi_{mf}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Pi_{ff}^d}{\partial x_j} + \frac{1}{Re Pr(\gamma - 1) M_\infty^2} \frac{\partial^2 (T_f - T_m)}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (16.3)$$

其中

$$(U_{mi}, P_m, e_{mt}, T_m) = V_m^{-1} \int (u_i, p, e_t, T) dv \quad (17)$$

$$V_m = \Delta x_m \Delta y_m \Delta z_m, \Delta x_c > \Delta x_m > \Delta x_f,$$

$$\Delta y_c > \Delta y_m > \Delta y_f, \Delta z_c > \Delta z_m > \Delta z_f$$

$$F_{mfi} = F_{mfi}(U_{fi}, U_{mi}) = V_m^{-1} \int (U_{fi} - U_{mj})(U_{fi} - U_{mi}) dv \quad (18.1)$$

$$F_{cmi} = F_{cmi}(U_{mi}, U_{ci}) = V_c^{-1} \int (U_{mj} - U_{cj})(U_{mi} - U_{ci}) dv \quad (18.2)$$

$$E_{mf} = E_{mf}(U_{fi}, e_{mt}) = V_m^{-1} \int (U_{fi} - U_{mj})(e_{fi} - e_{mt}) dv \quad (18.3)$$

$$\cdot \\ E_{cm} = E_{cm}(U_{mj}, e_{ct}) = V_c^{-1} \int (U_{mj} - U_{cj})(e_{mt} - e_{ct}) dv \quad (18.4)$$

$$P_{mf} = P_{mf}(U_{fi}, p_m) = V_m^{-1} \int (U_{fi} - U_{mj})(p_f - p_m) dv \quad (18.5)$$

$$P_{cm} = P_{cm}(U_{mj}, p_c) = V_c^{-1} \int (U_{mj} - U_{cj})(p_m - p_c) dv \quad (18.6)$$

$$\Pi_{mf} = \Pi_{mf}(U_{fi}, \tau_{ji}(U_{mj})) = V_m^{-1} \int (U_{fi} - U_{mj})[\tau_{ji}(u_{fi}) - \tau_{ji}(U_{mj})] dv \quad (18.7)$$

$$\Pi_{cm} = \Pi_{cm}(U_{mj}, \tau_{ji}(U_{ci})) = V_c^{-1} \int (U_{mj} - U_{cj})[\tau_{ji}(u_{mj}) - \tau_{ji}(U_{cj})] dv \quad (18.8)$$

$U_{ci}$ ,  $p_c$ ,  $e_{ct}$  和  $T_c$ ,  $U_{fi}$ ,  $p_f$ ,  $e_{ft}$  和  $T_f$  的定义分别见(2.1)和(3.4)式,  $F_{ff}^d$ ,  $E_{ff}^d$ ,  $P_{ff}^d$  和  $\Pi_{ff}^d$  的微分式见式(7.2)和式(8)。三尺度方程组(14)、(15)共包含 15 个方程, 给定合理的初始和边界条件, 由它们可求得 15 个未知量  $U_{ci}$ ,  $U_{mi}$ ,  $U_{fi}$  ( $i=1, 2, 3$ ),  $p_c$ ,  $p_m$ ,  $p_f$ ,  $e_{tc}$ ,  $e_{tm}$  和  $e_{tf}$ 。因此三尺度方程组(14)~(16)为近似封闭方程组, 且不包含经验常数和经验关系。当计算的整个尺度范围  $(1, \Delta x_f)$  被划分为更多的尺度范围, 例如被划分为  $n$  个尺度范围时,  $n$  尺度方程组的形式显然与三尺度方程组的形式一致, 节省篇幅起见这里不再写出它们的具体形式, 仅对  $n$  尺度方程组作如下的一般性讨论。 $n$  尺度方程组同样包含了大尺度方程组, 支配诸中间尺度涨落运动的  $(n-2)$  个中尺度方程组和支配可分辨小尺度涨落运动的小尺度方程组, 总共包含  $5n$  个方程, 由它们可求得  $5n$  个未知数  $U_{ci}$ ,  $U_{mi}$ ,  $U_{fi}$  ( $i=1, 2, 3; m=1, 2, \dots, (n-2)$ ),  $p_c$ ,  $e_{tc}$ ,  $p_m$ ,  $e_{tm}$  ( $m=1, 2, \dots, (n-2)$ ),  $p_f$ , 和  $e_{tf}$ 。因此  $n$  尺度方程组同样为近似封闭方程组, 且不包含任何经验常数和经验关系。应当指出, 影响任一  $m$  中尺度 ( $m=1, 2, \dots, (n-2)$ ) 涨落运动的动量和能量湍流交换, 主要是它与  $(m-1)$  中尺度的湍流交换, 它与  $(m+1)$  中尺度的湍流交换比较次要, 该次要贡献在  $n$  尺度方程组中已经忽略; 即  $m$  中尺度的涨落运动为  $(m-1)$  中尺度所激励。不可分辨小尺度 ( $\Delta x < \Delta x_f$ ) 与可分辨小尺度 ( $\Delta x_{n-1} > \Delta x > \Delta x_f$ ) 之间的动量和能量交换, 在  $n$  尺度方程组中用尺度  $\Delta x_f$  处的湍流共振交换诸公式(7)和(11)来近似。与两尺度模型类似, 当然可取常用的亚格子尺度(SGS)交换模型来替代共振交换诸公式。此外, 由多尺度方程组解同样可获得湍流能谱和耗散谱等资料。

## 2.6 二尺度方程组求解湍流的两个算例

文献[11,12]利用二尺度, 即大小尺度(LSS)方程组计算了不可压二维槽道流和平面混合层流动的三维时间演化, 得到与 NS 方程组解相一致的数值结果, 也获得了 NS 解未获得的一些新结果。对这两种流动, 在动量方程组中无需记及重力、浮力等与温度有关的项, 因此, LSS 方程组的连续性和动量方程组可与能量方程解耦, 只需求解 LSS 方程组(12)和(13)的连续和动量方程组。对不可压槽道流动, 选取如下初始条件

$$(U_c, V_c) = (1 - y^2, 0) \quad U_f - U_c = \tilde{\epsilon} \hat{u}, V_f - V_c = \tilde{\epsilon} \hat{v} \quad (19)$$

其中  $\hat{u}, \hat{v}$  为线性理论给出的对应于扰动波数  $\alpha=1.0$  的最不稳定模,  $\epsilon=10^{-4}$ , 图 1 给出应力

分布曲线,其中实线为涡应力,虚线为总应力。LSS 方程的应力结果与对 NS 方程数值解作事后数值处理得到的结果一致。

对平面混合层流动的三维演化,初始条件如下

$$(U_c, V_c, W_c) = (U_0 \tanh(2z), 0, 0) \quad (20.1)$$

$$U_f - U_c = A_2 \sin z \cos y + A_3 \sin x \cos y \cos z \quad (20.2)$$

$$V_f - V_c = -A_2 \cos z \sin y - A_3 \cos x \sin y \cos z \quad (20.3)$$

$$W_f - W_c = 0, (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\delta_w^0} (x, y, z) \quad (20.4)$$

其中  $A_2, A_3 = 10^{-4}$  分别是二维和三维初始扰动的振幅,  $U_0$  为两股来流的平均速度。流速、时间  $t$ 、坐标变量和压力分别用  $U_0, T_0 = \delta_w^0/U_0, \delta_w^0$  和  $\rho U_0^2$  归一化,  $\delta_w^0$  为初始湍量厚度,  $Re = U_0 \delta_w^0 / \gamma$ ,  $\gamma$  为运动学黏性系数, 为更好的分析大小尺度(LSS)方程组(20)和(21)解的性质, 并与 NS 方程组数值解进行全面

的比较, 对 LSS 方程组和 NS 方程组的求解, 采用了同样的网格体系, 例如对  $Re = 10^2 \delta_w^2 / \gamma$ , 网格点数在  $x, y$  和  $z$  方向分别为  $32 \times 64 \times 128$ 。一些典型结果如下: 平均速度、平均脉动速度、平均剪切黏性应力与 NS 解的数值处理结果一致, 参见图 2~图 3。LSS 方程组计算同样提供了一些新结果, 例如给出最大脉动速度、最大剪切黏性应力的变化与各自平均值的变化有明显不同, 特别是最大脉动速度和最大剪切黏性应力几乎同时出现了两次陡增; 出现陡增的时间和大小尺度运动之间能量的反传递时间段一致, 也与大尺度展向涡和肋涡卷起的时间段一致, 上述事实说明大小尺度运动之间的动量、能量交换是大尺度运动变化的主要物理起因。最大脉动速度和最大剪切黏性应力的突增显然与转捩流中的猝发(burst)现象相对应。应该指出, 相应 NS 计算结果的数值处理并未得到最大脉动速度和最大剪切黏性应力及其两次突增, 参见图 2 和图 3。

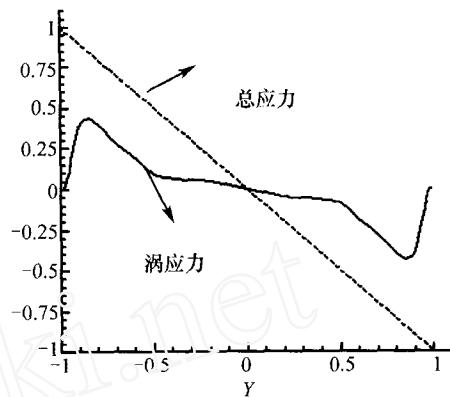


图 1 应力分布

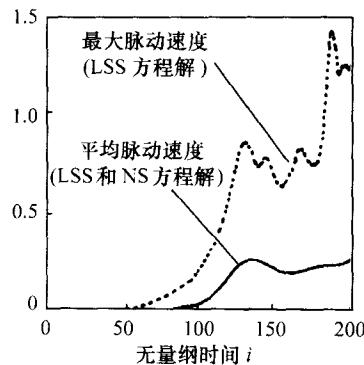


图 2 平面混合层流动平均和最大脉动速度

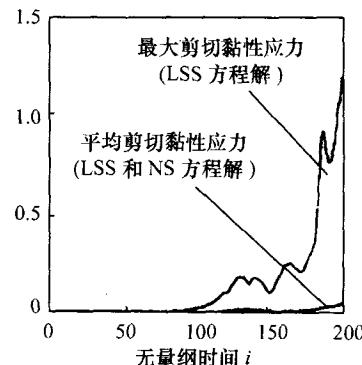


图 3 平面混合层流动平均和最大剪切黏性应力

### 3 可压缩湍流多尺度方程组

可压缩湍流与不可压缩湍流的显著差别是它的可压缩效应<sup>[14,15]</sup>, 例如可压缩湍流中可能有激波, 可压缩湍流的混合层流动呈现复杂的三维形态而相应不可压平面混合层流动以相干

结构(Brown-Roshko 涡旋)为主要特征;可压缩效应导致湍流(如雷诺应力)各向异性特性的增强等。可压缩湍流区别与不可压缩湍流的这些重要特征如何在可压缩湍流多尺度方程组中得到反映和体现,在导出可压湍流多尺度方程组时必须加以考虑。在非定常可压缩 NS 方程组可以描述可压缩湍流的前提下,可压缩湍流的多尺度方程组、尺度间相互作用的近程特性、远程涡应力以及共振涡应力诸公式的论述和推导,可类似于不可压湍流做出。可压和不可压缩湍流多尺度模型的主要区别是:前者需引入 Favre 平均量为中间量。因此可压缩湍流多尺度方程组除连续性、动量、能量和状态方程外,还应包含 Favre 平均量与物理平均量之间满足的诸非线性关系式,这些关系式提供了可压缩效应的合理数学表述。

### 3.1 可压缩空间平均 NS 方程组

对空间尺度的尺度范围,参见图 1,可压缩气体 NS 方程组的空间平均方程组可写为

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial U_{xi}}{\partial x_j} = 0 \quad (21.1)$$

$$\frac{\partial U_{xi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(U_{ci}U_{pj}) = -\frac{\partial p_c}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial \tau_{ij}(U_{ci})}{\partial x_j} - \frac{\partial F_{ci}}{\partial x_j} \quad (i=1,2,3) \quad (21.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{t\infty}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(U_{cj}, e_{t\infty}) &= -\frac{\partial}{\partial x_j}(U_{cj}p_c) + \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\partial x_j}[U_{ci}\tau_{ij}(U_{ci})] - \frac{\partial E_c}{\partial x_j} - \frac{\partial P_c}{\partial x_j} + \\ &\quad \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial \Pi_c}{\partial x_j} + \frac{\mu}{Re_\infty Pr(\gamma-1)M_\infty^2} \frac{\partial^2 T_c}{\partial x_j \partial x_i} \end{aligned} \quad (21.3)$$

$$p_c M_\infty^2 = \rho_c T_c + \Phi_{TC} \quad (21.4)$$

其中  $(\rho_c, U_{ci}, U_{\rho xi}, p_c, T_c, e_{t\infty}, e_{t\infty}) = V_c^{-1} \int (\rho, u_i, \rho u_i, p, T, e_t, \rho e_t) dv$  (22)

$$(V_c = \Delta x_c \Delta y_c \Delta z_c)$$

$$\tau_{ij}(U_{ci}) = \mu \left( \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \quad (23)$$

$$F_{fi} = F_{fi}(u_i, U_{\rho xi}) = V_c^{-1} \int (u_i - U_{ci})(\rho u_j - U_{\rho xi}) dv \quad (24)$$

$$E_c = E_c(u_j, e_{t\infty}) = V_c^{-1} \int (u_j - U_{cj})(\rho e_t - e_{t\infty}) dv \quad (25)$$

$$P_c = P_c(u_j, p_c) = V_c^{-1} \int (u_j - U_{cj})(p - p_c) dv \quad (26)$$

$$\Pi_c = \Pi_c(u_i, \tau_{ij}(U_{ci})) = V_c^{-1} \int (u_i - U_{ci})[\tau_{ij}(u_i) - \tau_{ij}(U_{ci})] dv \quad (27)$$

$$\Phi_{TC} = \Phi_{TC}(\rho, T_c) = V_c^{-1} \int (\rho - \rho_c)(T - T_c) dv \quad (28)$$

其中  $Re_\infty = \rho_\infty U_\infty L / \mu_\infty$ ,  $Pr = \mu C_p / k$ ,  $\gamma = C_p / C_v$ ,  $M_\infty = U_\infty / a_\infty$ ;时间  $t$ ,坐标变量  $x_j$  流速分量  $u_j$ ,密度  $\rho$ ,压力  $p$ ,温度  $T$ ,总能  $e_t$ ,定容比热  $C_v$  和动力学黏性系数  $\mu$  分别用  $L/U_\infty$ ,  $L$ ,  $U_\infty$ ,  $\rho_\infty$ ,  $\rho_\infty U_\infty^2$ ,  $T_\infty$ ,  $U_\infty^2$ ,  $R$  和  $\mu_\infty$  无量纲化。下角标  $\infty$  指来流条件,总能  $e_t = C_v T + \frac{1}{2} u_i u_i$ ,  $\tau_{ij}$  为黏性应力分量;  $F_{fi}$ ,  $E_c$ ,  $P_c$  和  $\Pi_c$  分别是尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  与尺度  $\Delta x < \Delta x_c$  之间的湍流应力(亦称涡应力),涡热传导、涡压力功和涡应力功。 $U_{\rho xi}/\rho_c$  ( $i=1,2,3$ ),  $U_{t\infty}/\rho_c$  是 Favre 空间平均( $\Phi_{TC}$ )。

均量。因此,空间平均 NS 方程组(2.1)~(2.4)共有 6 个方程,它们包含 10 个未知量;Favre 平均变量与物理平均变量之间的 4 个非线性关系式提供 4 个补充方程(这些关系式见下文)。

### 3.2 可压缩湍流尺度间相互作用的近程特性

类似于节 1 对不可压缩湍流的讨论,由于 NS 方程组解连续可微,空间平均 NS 方程组(2.1)~(2.4)的解连续可微,因此可从涡应力的定义式导出如下关系式

$$F_{ci}^d = F_{ci}^d(u_i, U_{\rho ci}) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial \rho u_i}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{\partial \rho u_i}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) + O(\Delta x_c^4) \quad (29)$$

$$F_{ci} = F_{ci}(u_i, U_{\rho ci}) + F_{cfi}(U_{fi}, U_{\rho ci}) + O(\Delta x_c^2 \Delta x_f^2) \quad (30)$$

其中

$$F_{fi}(u_i, U_{\rho fi}) = V_f^{-1} \int (u_i - U_{ci})(\rho u_j - U_{\rho f j}) dv \quad (31.1)$$

$$F_{cfi}(U_{fi}, U_{\rho ci}) = V_c^{-1} \int (U_{fi} - U_{ci})(U_{\rho f j} - U_{\rho ci}) dv \quad (31.2)$$

$$(\rho_f, U_{fi}, U_{\rho fi}, p_f, T_f, e_{tf}, e_{tbf}) = V_f^{-1} \int (\rho, u_i, \rho u_i, p_f, T, e_t, \rho e_i) dv \quad (31.3)$$

$$V_f = \Delta x_f \Delta y_f \Delta z_f \quad \Delta x_f < \Delta x_c, \Delta y_f < \Delta y_c, \Delta z_f < \Delta z_c$$

假设(不失一般性)体积元  $V_f$  和  $V_c$  为相似长方体,且满足  $\Delta x_f/\Delta x_c = \Delta y_f/\Delta y_c = \Delta z_f/\Delta z_c$ ,可以推出

$$F_{fi}(u_i, U_{\rho fi}) \approx \frac{\Delta x_f^2}{\Delta x_c^2} F_{ci}(u_i, U_{\rho ci}) \quad (32.1)$$

$$F_{cfi}(U_{fi}, U_{\rho ci}) \approx \left( 1 - \frac{\Delta x_f^2}{\Delta x_c^2} \right) F_{ci}(u_i, U_{\rho ci}) \quad (32.2)$$

$F_{fi}(F_{ci})$  表示尺度  $\Delta x < \Delta x_f$  ( $\Delta x < \Delta x_c$ ) 的整个尺度范围作用于尺度  $\Delta x > \Delta x_f$  ( $\Delta x > \Delta x_c$ ) 的涡应力,  $F_{cfi}$  表示尺度介于  $\Delta x_f$  和  $\Delta x_c$  ( $\Delta x_c > \Delta x_f$ ) 之间近程小尺度作用于尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  的涡应力。由式(32)可知,当  $\Delta x_f/\Delta x_c = 1/2, 1/3$  和  $1/5$  时,  $F_{fi}/F_{ci}$  分别约为 0.25, 0.11 和 0.04;  $F_{cfi}/F_{ci}$  分别约为 0.75, 0.89 和 0.96。因此,尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  和尺度  $\Delta x < \Delta x_c$  之间的相互作用主要是尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  与尺度介于  $\Delta x_c$  和  $\Delta x_f$  之间的近程小尺度之间的相互作用,尺度  $\Delta x < \Delta x_c$  作用于尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  的涡应力主要是近程小尺度  $\Delta x_c > \Delta x > \Delta x_f$  的贡献,因此称  $F_{cfi}$  为近程涡应力。近程小尺度范围应从  $\Delta x_c$  到  $\Delta x_f = (0.2 \sim 0.5) \Delta x_c$ 。由于空间平均速度  $U_{fi}$ ,  $U_{ci}$  和 Favre 平均速度  $U_{\rho fi}$ ,  $U_{\rho ci}$  连续可微,故可由近程涡应力的积分定义式(31.2)导出它的微分近似式

$$F_{cfi}^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial U_{\rho fi}}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial U_{\rho fi}}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial U_{\rho fi}}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) + O(\Delta x_c^4) \quad (33)$$

### 3.3 可压缩湍流尺度间湍能交换的近程特性

通过与导出近程涡应力的类似考虑和推导,不难证实尺度间湍能交换的近程特性,给出近程尺度范围估计,获得近程涡热传导、近程涡压力功、近程涡应力功以及密度-温度近程关联的积分和微分表达式,

$$E_{cf} = E_{cf}(U_{fi}, e_{tfc}) = V_c^{-1} \int (U_{fi} - U_{ci})(e_{tbf} - e_{tfc}) dv \quad (34.1)$$

$$E_c = E_c(u_j, e_{t\infty}) = V_c^{-1} \int (u_j - U_{cj})(\rho e_t - e_{t\infty}) dv \quad (34.2)$$

$$E_{cf}^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial e_{t\infty}}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial e_{t\infty}}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial e_{t\infty}}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (34.3)$$

$$P_{cf} = P_{cf}(U_{fi}, p_c) = V_c^{-1} \int (U_{fi} - U_{ci})(p_f - p_c) dv \quad (35.1)$$

$$P_c = P_c(u_j, p_c) = V_c^{-1} \int (u_j - U_{cj})(p - p_c) dv \quad (35.2)$$

$$P_{cf}^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial p_f}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial p_f}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial p_f}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (35.3)$$

$$\Pi_{cf} = \Pi_{cf}(U_{fi}, \tau_{ij}(U_{ci})) = V_c^{-1} \int (U_{fi} - U_{ci}) [\tau_{ij}(U_{fi}) - \tau_{ij}(U_{ci})] dv \quad (36.1)$$

$$\Pi_c = \Pi_c(u_i, \tau_{ij}(U_{ci})) = V_c^{-1} \int (u_i - U_{ci}) [\tau_{ij}(u_i) - \tau_{ij}(U_{ci})] dv \quad (36.2)$$

$$\Pi_{cf}^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial \tau_{ij}(U_{ci})}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial \tau_{ij}(U_{ci})}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial \tau_{ij}(U_{ci})}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (36.3)$$

$$\Phi_{Tcf} = \Phi_{Tcf}(\rho_f, T_c) = V_c^{-1} \int (\rho_f - \rho_c)(T_f - T_c) dv \quad (37.1)$$

$$\Phi_{Tc} = \Phi_{Tc}(\rho, T_c) = V_c^{-1} \int (\rho - \rho_c)(T - T_c) dv \quad (37.2)$$

$$\Phi_{Tcf}^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial \rho_f}{\partial x} \frac{\partial T_f}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial \rho_f}{\partial y} \frac{\partial T_f}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial \rho_f}{\partial z} \frac{\partial T_f}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (37.3)$$

在体积元  $V_f$  和  $V_c$  为相似长方体,且  $\Delta x_f/\Delta x_c = \Delta y_f/\Delta y_c = \Delta z_f/\Delta z_c$  的条件下,可以证明

$$\frac{E_f}{E_c} \approx \frac{P_f}{P_c} \approx \frac{\Pi_f}{\Pi_c} \approx \frac{F_{fi}}{F_{ci}} \approx \frac{\Delta x_f^2}{\Delta x_c^2} \quad (38.1)$$

$$\frac{E_{cf}}{E_c} \approx \frac{P_{cf}}{P_c} \approx \frac{\Pi_{cf}}{\Pi_c} \approx \frac{F_{cfi}}{F_{ci}} \approx \left(1 - \frac{\Delta x_f^2}{\Delta x_c^2}\right) \quad (38.2)$$

可压湍流与不可压湍流类似, $E_{cf}$ , $P_{cf}$ 和 $\Pi_{cf}$ 分别表示尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  与尺度  $\Delta x < \Delta x_c$  之间的涡热传导、涡压力功和涡应力功。类似于近程涡应力的分析,参见式(32),由式(38)可知,尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  与尺度  $\Delta x < \Delta x_c$  之间的湍能交换主要是尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  与尺度介于  $\Delta x_f$  和  $\Delta x_c$  ( $\Delta x_f < \Delta x_c$ )之间的湍能交换,因此涡热传导、涡压力功和涡应力功主要是近程小尺度  $\Delta x_c > \Delta x > \Delta x_f$  的贡献,参见表1,因此称为近程涡热传导、近程涡压力功和近程涡应力功(即近程湍能耗散)。近程小尺度范围的估计同样为  $\Delta x_c$  到  $\Delta x_f = (0.2 \sim 0.5)\Delta x_c$ 。

### 3.4 可压湍流尺度间共振相互作用、湍能共振交换的概念

我们考虑尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  但十分靠近的尺度范围与尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  之间的湍流动量和能量交换问题,当体积元  $V_f$  趋向  $V_c$ ,即当  $\Delta x_f \rightarrow \Delta x_c$ , $\Delta y_f \rightarrow \Delta y_c$  和  $\Delta z_f \rightarrow \Delta z_c$  时,必有

$$U_{fi} \rightarrow U_{ci}, U_{\rho fi} \rightarrow U_{\rho ci} \quad (i = 1, 2, 3), p_f \rightarrow p_c, \rho_f \rightarrow \rho_c, e_{t\infty} \rightarrow e_{t\infty} \quad (39)$$

把式(39)代入近程涡应力,近程涡热传导,近程涡压力功和近程涡应力功诸微分式(33),(34.3),(35.3)和(36.3)中,得到尺度  $\Delta x < \Delta x_c$  但十分靠近  $\Delta x_c$  与尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  之间的湍流动量和能量交换诸微分式,称作共振涡应力,共振涡热传导,共振涡压力功和共振涡应力功微分式,它们分别为:

$$F_{cc}^d(U_{ci}, U_{\rho ci}) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{ci}}{\partial x} \frac{\partial U_{\rho ci}}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{ci}}{\partial y} \frac{\partial U_{\rho ci}}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{ci}}{\partial z} \frac{\partial U_{\rho ci}}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (40.1)$$

$$E_{cc}^d(U_{cj}, e_{t\rho c}) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{cj}}{\partial x} \frac{\partial e_{t\rho c}}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{cj}}{\partial y} \frac{\partial e_{t\rho c}}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{cj}}{\partial z} \frac{\partial e_{t\rho c}}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (40.2)$$

$$P_c^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{ci}}{\partial x} \frac{\partial p_c}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{ci}}{\partial y} \frac{\partial p_c}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{ci}}{\partial z} \frac{\partial p_c}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (40.3)$$

$$\Pi_{cc}^d(U_{cj}, \tau_{ij}(U_{ci})) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{ci}}{\partial x} \frac{\partial \tau_{ij}(U_{ci})}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{ci}}{\partial y} \frac{\partial \tau_{ij}(U_{ci})}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{ci}}{\partial z} \frac{\partial \tau_{ij}(U_{ci})}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (40.4)$$

$$\Phi_{Tcc}^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial \rho_c}{\partial x} \frac{\partial T_c}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial \rho_c}{\partial y} \frac{\partial T_c}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial \rho_c}{\partial z} \frac{\partial T_c}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (40.5)$$

把式(40.1)~(40.5)中的下脚标  $c$  和  $cc$  分别换成  $f$  和  $ff$ , 得到尺度  $\Delta x = \Delta x_f$  处的共振涡应力, 共振涡热传导, 共振涡压力功, 共振涡应力功和共振温度 - 密度关联的微分式, 节省篇幅起见, 不再写出它们的具体微分式。

### 3.5 可压缩湍流的多尺度方程组

可压缩湍流尺度间相互作用的近程性质, 隐含了对它的统计平均分析应采用多尺度模型, 即应把计算的整个尺度范围  $(1, \Delta x_f)$  预先划分为几个子尺度范围, 例如划分成两尺度  $(1, \Delta x_c)$  和  $(\Delta x_c, \Delta x_f)$  范围和三尺度  $(1, \Delta x_c), (\Delta x_c, \Delta x_m)$  和  $(\Delta x_m, \Delta x_f)$  范围等, 并同时求解每一子尺度范围的运动。支配每一子尺度范围的诸运动方程通过湍流动量和能量的近程交换规律相关联。最小子尺度范围  $(\Delta x_c, \Delta x_f)$  (对两尺度模型) 和  $(\Delta x_m, \Delta x_f)$  (对三尺度模型) 运动通过湍流近程交换规律与较大子尺度运动相关联, 而与更小不可分辨尺度范围  $(\Delta x_f, l_k)$  运动则通过湍流动量和能量的共振交换规律相关联。关于子尺度范围的划分, 大尺度范围  $(1, \Delta x_c)$  显然应与含能涡尺度范围一致, 最小子尺度范围  $(\Delta x_c, \Delta x_f)$  (对两尺度模型) 和  $(\Delta x_m, \Delta x_f)$  (对三尺度模型) 应尽可能靠近耗散涡尺度范围, 而子尺度范围的相对关系又应与节 3.1 给出的近程尺度范围估计一致。利用节 3.1~3.3 中给出的可压缩湍流动量和能量的近程和共振交换诸公式, 不难获得可压缩湍流的多尺度方程组。

#### 3.5.1 可压缩湍流的两尺度方程组

把计算尺度范围  $(1, \Delta x_f)$  预先划分为两个尺度范围  $(1, \Delta x_c)$  和  $(\Delta x_c, \Delta x_f)$ , 支配大尺度范围  $(1, \Delta x_c)$  的控制方程组, 即大尺度方程组为

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial U_{\rho ci}}{\partial x_j} = 0 \quad (41.1)$$

$$\frac{\partial U_{\rho ci}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{ci} U_{\rho cj}) = - \frac{\partial p_c}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial \tau_{ij}(U_{ci})}{\partial x_j} - \frac{\partial F_{cfi}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (41.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{\rho c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{cj} e_{\rho c} + p_c U_{cj}) &= \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} [U_{ci} \tau_{ij}(U_{ci})] - \frac{\partial E_{cf}}{\partial x_j} - \frac{\partial P_{cf}}{\partial x_j} + \\ &\quad \frac{\partial \Pi_{cf}}{\partial x_j} + \frac{\mu}{Re_\infty Pr(\gamma - 1) M_\infty^2} \frac{\partial^2 T_c}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (41.3)$$

$$p_c M_\infty^2 = \rho_c T_c + \Phi_{Tcf}(\rho_f, T_c) \quad (41.4)$$

$$U_{\rho ci} = \rho_c U_{ci} + \Phi_{ucf}(U_{fi}, \rho_c) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (41.5)$$

$$e_{\rho c} = \rho_c e_{tc} + \Phi_{ecf}(\rho_f, e_{tc}) \quad (41.6)$$

支配小尺度范围( $\Delta x_c, \Delta x_f$ )运动,确切地说,支配小尺度相对与大尺度(1,  $\Delta x_c$ )涨落运动的小尺度方程组为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f - \rho_c) + \frac{\partial}{\partial x_j}(U_{\rho f} - U_{\rho c}) = 0 \quad (42.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(U_{\rho fi} - U_{\rho ci}) + \frac{\partial}{\partial x_j}[(U_{fi} - U_{ci})(U_{\rho fi} - U_{\rho ci})] &= -\frac{\partial}{\partial x_i}(p_f - p_c) - \\ \frac{\partial}{\partial x_j}[U_{ci}(U_{\rho fi} - U_{\rho ci})] - \frac{\partial}{\partial x_j}[U_{\rho ci}(U_{fi} - U_{ci})] &+ \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} \times \\ [\tau_{ij}(U_{fi}) - \tau_{ij}(U_{ci})] + \frac{\partial F_{efi}}{\partial x_j} - \frac{\partial F_{eff}^d}{\partial x_j} &\quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (42.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(e_{\rho tf} - e_{\rho tc}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\{(U_{fi} - U_{ci})[(e_{\rho tf} - e_{\rho tc}) + (p_f - p_c)]\} &= \\ = -\frac{\partial}{\partial x_j}\{U_{ci}\[(e_{\rho tf} - e_{\rho tc}) + (p_f - p_c)\] + (U_{fi} - U_{ci})(e_{\rho tc} - p_c)\} + & \\ \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[U_{fi}\tau_{ij}(U_{fi}) - U_{ci}\tau_{ij}(U_{ci}) + \frac{\partial E_{ef}}{\partial x_j}\right] - \frac{\partial F_{ff}^d}{\partial x_j} + \frac{\partial P_{cf}}{\partial x_j} - \frac{\partial P_{ff}^d}{\partial x_j} - & \\ \frac{\partial \Pi_{cf}}{\partial x_j} + \frac{\partial \Pi_{ff}^d}{\partial x_j} + \frac{1}{Re_\infty Pr(\gamma - 1)M_\infty^2} \frac{\partial^2(T_f - T_c)}{\partial x_j \partial x_j} &\quad (42.3) \end{aligned}$$

$$(p_f - p_c)M_\infty^2 = \rho_f T_f - \rho_c T_c - \Phi_{Tcf} + \Phi_{Tff}^d \quad (42.4)$$

$$U_{\rho fi} - U_{\rho ci} = \rho_f U_{fi} - \rho_c U_{ci} - \Phi_{ucf}(\rho_f, T_c) + \Phi_{uff}^d(\rho_f, T_f) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (42.5)$$

$$e_{\rho tf} - e_{\rho tc} = \rho_f e_{tf} - \rho_c e_{tc} - \Phi_{ecf}(U_{fi}, \rho_c) + \Phi_{eff}^d(U_{fi}, \rho_f) \quad (42.6)$$

其中,密度-速度近程关联  $\Phi_{ucf}$ ,密度-能量近程关联  $\Phi_{ecf}$ ,以及在  $\Delta x = \Delta x_f$  处,密度-速度共振关联,密度-能量共振关联分别为

$$\Phi_{ucf} = V_c^{-1} \int (U_{fi} - U_{ci})(\rho_f - \rho_c) dv \quad (i = 1, 2, 3) \quad (43.1)$$

$$\Phi_{ucf}^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial \rho_f}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial \rho_f}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial \rho_f}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (43.2)$$

$$\Phi_{ecf} = V_c^{-1} \int (\rho_f - \rho_c)(e_{tf} - e_{tc}) dv \quad (43.3)$$

$$\Phi_{ecf}^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial \rho_f}{\partial x} \frac{\partial e_{tf}}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial \rho_f}{\partial y} \frac{\partial e_{tf}}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial \rho_f}{\partial z} \frac{\partial e_{tf}}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (43.4)$$

$$\Phi_{uff}^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial \rho_f}{\partial x} \Delta x_f^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial \rho_f}{\partial y} \Delta y_f^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial \rho_f}{\partial z} \Delta z_f^2 \right) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (43.6)$$

$$\Phi_{eff}^d = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial e_{tf}}{\partial x} \frac{\partial \rho_f}{\partial x} \Delta x_f^2 + \frac{\partial e_{tf}}{\partial y} \frac{\partial \rho_f}{\partial y} \Delta y_f^2 + \frac{\partial e_{tf}}{\partial z} \frac{\partial \rho_f}{\partial z} \Delta z_f^2 \right) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (43.7)$$

大小尺度(LSS)方程组(40)~(41)包括 20 个方程,其中 8 个方程其实是 8 个 Favre 平均变量  $U_{\rho ci}, U_{\rho fi} (i=1, 2, 3), e_{\rho tc}$  和  $e_{\rho tf}$  与 8 个物理平均变量  $U_{ci}, U_{fi}, e_{tc}$  和  $e_{tf}$  之间满足的非线性关系式。给定相应的初始条件和边界条件,LSS 方程组(40)~(41)可用来求解 20 个未知量,即  $\rho_c, U_{ci}, U_{\rho ci} (i=1, 2, 3), p_c, T_c$  和  $e_{tc}$  以及  $(\rho_f - \rho_c), (U_{fi} - U_{ci}), (U_{\rho fi} - U_{\rho ci}) (i=1, 2, 3), (p_f - p_c), (T_f - T_c)$  和  $(e_{tf} - e_{tc})$ 。根据节 3.1 中近程尺度范围估计, $\Delta x_f$  应为(0.2~0.5)  $\Delta x_c$ 。显然,LSS 方程组(40)~(41)为近似封闭方程组且不包含任何经验常数和关系。由 LSS

方程组可知:1)尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  的大尺度与尺度  $\Delta x < \Delta x_c$  的小尺度之间的湍流动量和能量交换,主要是大尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  与尺度介于  $\Delta x_c$  和  $\Delta x_f$  ( $0.2 \sim 0.5 \Delta x_c$ ) 之间的近程小尺度间的交换;尺度  $\Delta x < \Delta x_f$  的更小尺度对湍流动量、能量交换的贡献很小,在大尺度方程组忽略了更小尺度  $\Delta x < \Delta x_f$  的贡献。2)支配近程小尺度  $\Delta x_c > \Delta x > \Delta x_f$  涨落运动的湍流动量和能量交换,主要来自尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  的大尺度的贡献;尺度  $\Delta x < \Delta x_c$  的更小尺度贡献比较次要,LSS 方程组中已用尺度  $\Delta x = \Delta x_f$  处的共振涡应力、共振涡热传导、共振涡压力功和共振涡应力功来近似更小尺度  $\Delta x < \Delta x_c$  的次要贡献。3)近程小尺度  $\Delta x_c > \Delta x > \Delta x_f$  涨落运动主要由尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  的大尺度所激励。上述结语与不可压缩湍流多尺度模型的结语相一致。

应该提到,对可压缩湍流,尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  的大尺度和尺度  $\Delta x < \Delta x_c$  的整个小尺度之间的密度-温度关联  $\Phi_{Tc}(\rho, T_c)$ ,密度-速度关联  $\Phi_{uc}(ρ, U_{ci})$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 以及密度-能量关联  $\Phi_{ec}(\rho, e_{tc})$  同样主要是尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  的大尺度和尺度介于  $\Delta x_c$  和  $\Delta x_f$  之间的近程小尺度间的关联(称作近程关联),即  $\Phi_{Tc} \approx \Phi_{Tc}(\rho_f, T_c)$ ,  $\Phi_{uc} \approx \Phi_{uc}(\rho_f, U_{ci})$  和  $\Phi_{ec} \approx \Phi_{ec}(\rho_f, e_{tc})$ 。尺度  $\Delta x < \Delta x_f$  的更小尺度与大尺度  $\Delta x > \Delta x_c$  之间的密度-温度等诸关联可近似忽略。而近程小尺度  $\Delta x_c > \Delta x > \Delta x_f$  与尺度  $\Delta x < \Delta x_f$  的不可分辨更小尺度间的关联,在 LSS 方程组(40)~(41)中则用所谓共振关联,即  $\Phi_{Tff}^d$ 、 $\Phi_{uff}^d$  和  $\Phi_{eff}^d$  来近似。

可压缩湍流两尺度方程组(40)~(41)与不可压缩湍流两尺度方程组(12)~(13)相比,前者增加了 8 个 Faver 空间平均变量  $U_{\rho ci}$ ,  $U_{\rho fi}$  ( $i = 1, 2, 3$ )  $e_{t\alpha c}$  和  $e_{t\alpha f}$ ;增加了密度-温度、密度-速度和密度-能量关联(包括近程关联和共振关联),它们提供了可压缩湍流区别于不可压缩湍流的重要特征,即提供了可压缩效应的合理数学表述。

### 3.5.2 可压缩湍流的三尺度方程组

湍流三尺度模型把计算的尺度范围  $(1, \Delta x_f)$  预先划分为三个子尺度范围,即大尺度( $1, \Delta x_c$ ),中尺度( $\Delta x_c, \Delta x_m$ )和小尺度( $\Delta x_m, \Delta x_f$ )三个子尺度范围;三尺度模型的基本方程组包括支配大尺度( $1, \Delta x_c$ )平均运动的大尺度方程组,支配中尺度( $\Delta x_c, \Delta x_m < \Delta x_c$ )涨落运动的中尺度方程组和支配小尺度( $\Delta x_m, \Delta x_f < \Delta x_m$ )涨落运动的小尺度方程组。大尺度方程组为

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial U_{\rho ci}}{\partial x_j} = 0 \quad (44.1)$$

$$\frac{\partial U_{\rho ci}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(U_{ci} U_{\rho ej}) = -\frac{\partial p_c}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial \tau_{ij}(U_{ci})}{\partial x_j} - \frac{\partial F_{ci}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (44.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{\rho ec}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(U_{ej} e_{\rho ec} + p_c U_{ej}) &= \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\partial x_j}[U_{ci} \tau_{ij}(U_{ci})] - \frac{\partial E_{cf}}{\partial x_j} - \frac{\partial P_{cf}}{\partial x_j} + \\ &\quad \frac{\partial \Pi_{cf}}{\partial x_j} + \frac{\mu}{Re_\infty Pr(\gamma - 1) M_\infty^2} \frac{\partial^2 T_c}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (44.3)$$

$$p_c M_\infty^2 = \rho_c T_c + \Phi_{Tcf}(\rho_f, T_c) \quad (44.4)$$

$$U_{\rho ci} = \rho_c U_{ci} + \Phi_{ucf}(U_{fi}, \rho_c) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (44.5)$$

$$e_{\rho ec} = \rho_c e_{tc} + \Phi_{ecf}(\rho_f, e_{tc}) \quad (44.6)$$

支配中尺度( $\Delta x_c, \Delta x_m$ )涨落运动的中尺度方程组为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m - \rho_c) + \frac{\partial}{\partial x_j}(U_{\rho m j} - U_{\rho c j}) = 0 \quad (45.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(U_{\rho mi} - U_{\rho ci}) + \frac{\partial}{\partial x_j}[(U_{mi} - U_{ci})(U_{\rho mj} - U_{\rho cj})] &= -\frac{\partial}{\partial x_i}(p_m - p_c) - \\ \frac{\partial}{\partial x_j}[U_{ci}(U_{\rho mj} - U_{\rho cj})] - \frac{\partial}{\partial x_j}[U_{\rho cj}(U_{mi} - U_{ci})] + \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\partial x_j}[\tau_{ij}(U_{mi}) - \\ \tau_{ij}(U_{mi})] + \frac{\partial F_{cmi}}{\partial x_j} - \frac{\partial F_{mf}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (45.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(e_{\rho m} - e_{\rho c}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\{(U_{mj} - U_{cj})[(e_{\rho m} - e_{\rho c}) + (p_m - p_c)]\} \\ = -\frac{\partial}{\partial x_j}\{U_{cj}[(e_{\rho m} - e_{\rho c}) + (p_m - p_c)] + (U_{mj} - U_{cj})(e_{\rho c} - p_c)\} + \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} \times \\ [U_{mi}\tau_{ij}(U_{mi}) - U_{ci}\tau_{ij}(U_{ci}) + \frac{\partial E_{cm}}{\partial x_j}] - \frac{\partial E_{mf}}{\partial x_j} + \frac{\partial P_{cm}}{\partial x_j} - \frac{\partial P_{mf}}{\partial x_j} + \\ \frac{\partial \Pi_{cm}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Pi_{mf}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re_\infty Pr(\gamma - 1)M_\infty^2} \frac{\partial^2(T_m - T_c)}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (45.3)$$

$$(p_m - p_c)M_\infty^2 = \rho_m T_m - \rho_c T_c - \Phi_{Tcm} + \Phi_{Tmf} \quad (45.4)$$

$$U_{\rho mi} - U_{\rho ci} = \rho_m U_{mi} - \rho_c U_{ci} - \Phi_{ucm}(\rho_m, U_{ci}) + \Phi_{umf}(\rho_m, U_m) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (45.5)$$

$$e_{\rho m} - e_{\rho c} = \rho_m e_{tm} - \rho_c e_{tc} - \Phi_{ecm}(\rho_m, e_{tc}) + \Phi_{emf}(\rho_f, e_{tm}) \quad (45.6)$$

支配小尺度( $\Delta x_m, \Delta x_f$ )涨落运动的小尺度方程组为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f - \rho_m) + \frac{\partial}{\partial x_j}(U_{\rho f j} - U_{\rho m j}) = 0 \quad (46.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(U_{\rho fi} - U_{\rho mi}) + \frac{\partial}{\partial x_j}[(U_{fi} - U_{mi})(U_{\rho f j} - U_{\rho m j})] \\ = -\frac{\partial}{\partial x_i}(p_f - p_m) - \frac{\partial}{\partial x_j}[U_{mi}(U_{\rho f j} - U_{\rho m j})] - \frac{\partial}{\partial x_j}[U_{\rho m j}(U_{fi} - U_{mi})] + \\ \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\partial x_j}[\tau_{ij}(U_{fi}) - \tau_{ij}(U_{mi})] + \frac{\partial F_{mf}}{\partial x_j} - \frac{\partial F_{ff}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (46.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(e_{\rho f} - e_{\rho m}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\{(U_{fi} - U_{mj})[(e_{\rho f} - e_{\rho m}) + (p_f - p_m)]\} \\ = -\frac{\partial}{\partial x_j}\{U_{mj}[(e_{\rho f} - e_{\rho m}) + (p_f - p_m)] + (U_{fi} - U_{mj})(e_{\rho m} - p_m)\} + \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} \times \\ [U_{fi}\tau_{ij}(U_{fi}) - U_{mi}\tau_{ij}(U_{mi}) + \frac{\partial E_{mf}}{\partial x_j}] - \frac{\partial E_{ff}}{\partial x_j} + \frac{\partial P_{mf}}{\partial x_j} - \frac{\partial P_{ff}}{\partial x_j} + \\ \frac{\partial \Pi_{mf}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Pi_{ff}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re_\infty Pr(\gamma - 1)M_\infty^2} \frac{\partial^2(T_f - T_m)}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (46.3)$$

$$(p_f - p_m)M_\infty^2 = \rho_f T_f - \rho_m T_m - \Phi_{Tmf} + \Phi_{Tff}^d \quad (46.4)$$

$$U_{\rho fi} - U_{\rho mi} = \rho_f U_{fi} - \rho_m U_{mi} - \Phi_{umf}(\rho_f, U_{mi}) + \Phi_{uff}^d(\rho_f, U_{fi}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (46.5)$$

$$e_{t\rho f} - e_{t\rho m} = \rho_f e_{tf} - \rho_m e_{tm} - \Phi_{emf}(\rho_f, e_{tm}) + \Phi_{eff}^d(\rho_f, e_{tf}) \quad (46.6)$$

其中含有下脚标  $c, f, cf, ff$  的诸项上文已有定义, 含有下脚标  $m$  的诸项定义如下

$$(\rho_m, U_{mi}, U_{\rho mi}, p_m, T_m, e_{tm}, e_{t\rho m}) = V_m^{-1} \int (\rho, u_i, \rho u_i, p_f, T, e_t, \rho e_t) dv \quad (47.1)$$

$$V_c > V_m > V_f, \Delta x_c > \Delta x_m > \Delta x_f, \Delta y_c > \Delta y_m > \Delta y_f, \Delta z_c > \Delta z_m > \Delta z_f$$

$$F_{cmi} = F_{cmi}(U_{mi}, U_{\rho ci}) = V_c^{-1} \int (U_{mi} - U_{ci})(U_{\rho mi} - U_{\rho cj}) dv \quad (47.2)$$

$$F_{cmi}^d = F_{cmi}^d(U_{mi}, U_{\rho ci}) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{mi}}{\partial x} \frac{\partial U_{\rho mi}}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{mi}}{\partial y} \frac{\partial U_{\rho mi}}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{mi}}{\partial z} \frac{\partial U_{\rho mi}}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (47.3)$$

$$F_{mfi} = F_{mfi}(U_{fi}, U_{\rho mi}) = V_c^{-1} \int (U_{fi} - U_{mi})(U_{\rho fi} - U_{\rho mi}) dv \quad (47.4)$$

$$F_{mfi}^d = F_{mfi}^d(U_{fi}, U_{\rho mi}) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{fi}}{\partial x} \frac{\partial U_{\rho fi}}{\partial x} \Delta x_m^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial y} \frac{\partial U_{\rho fi}}{\partial y} \Delta y_m^2 + \frac{\partial U_{fi}}{\partial z} \frac{\partial U_{\rho fi}}{\partial z} \Delta z_m^2 \right) \quad (47.5)$$

$$E_{cm} = E_{cm}(U_{mj}, e_{tmc}) = V_c^{-1} \int (U_{mj} - U_{cj})(e_{tpm} - e_{tmc}) dv \quad (47.6)$$

$$E_{cm}^d = E_{cm}^d(U_{mj}, e_{tmc}) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{mj}}{\partial x} \frac{\partial e_{tpm}}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{mj}}{\partial y} \frac{\partial e_{tpm}}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{mj}}{\partial z} \frac{\partial e_{tpm}}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (47.7)$$

$$P_{cm} = P_{cm}(U_{mj}, p_c) = V_c^{-1} \int (U_{mj} - U_{cj})(p_m - p_c) dv \quad (47.8)$$

$$P_{cm}^d = P_{cm}^d(U_{mj}, p_c) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{mj}}{\partial x} \frac{\partial p_m}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial U_{mj}}{\partial y} \frac{\partial p_m}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{mj}}{\partial z} \frac{\partial p_m}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (47.9)$$

$$\Pi_{cm} = \Pi_{cm}(U_{mi}, \tau_{ij}(U_{ci})) = V_c^{-1} \int (U_{mi} - U_{ci}) [\tau_{ij}(U_{mj}) - \tau_{ij}(U_{cj})] dv \quad (47.10)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{cm}^d = \Pi_{cm}^d(U_{mi}, \tau_{ij}(U_{ci})) = & \frac{1}{12} \left( \frac{\partial U_{mi}}{\partial x} \frac{\partial \tau_{ij}(U_{mj})}{\partial x} \Delta x_c^2 + \right. \\ & \left. \frac{\partial U_{mi}}{\partial y} \frac{\partial \tau_{ij}(U_{mj})}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial U_{mi}}{\partial z} \frac{\partial \tau_{ij}(U_{mj})}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \end{aligned} \quad (47.11)$$

$$\Phi_{Tcm} = \Phi_{Tcm}(\rho_m, T_c) = V_c^{-1} \int (\rho_m - \rho_c)(T_m - T_c) dv \quad (47.12)$$

$$\Phi_{Tcm}^d = \Phi_{Tcm}^d(\rho_m, T_c) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial x} \frac{\partial \rho_m}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial \rho_m}{\partial y} \frac{\partial T_m}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial \rho_m}{\partial z} \frac{\partial T_m}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (47.13)$$

$$\Phi_{ucm} = \Phi_{ucm}(\rho_m, U_{ci}) = V_c^{-1} \int (\rho_m - \rho_c)(U_{mi} - U_{ci}) dv \quad (47.14)$$

$$\Phi_{ucm}^d = \Phi_{ucm}^d(\rho_m, U_{ci}) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial x} \frac{\partial U_{mi}}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial \rho_m}{\partial y} \frac{\partial U_{mi}}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial \rho_m}{\partial z} \frac{\partial U_{mi}}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (47.15)$$

$$\Phi_{ecm} = \Phi_{ecm}(\rho_m, e_{tc}) = V_c^{-1} \int (\rho_m - \rho_c)(e_{tm} - e_{tc}) dv \quad (47.16)$$

$$\Phi_{ecm}^d = \Phi_{ecm}^d(\rho_m, e_{tc}) = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial x} \frac{\partial e_{tm}}{\partial x} \Delta x_c^2 + \frac{\partial \rho_m}{\partial y} \frac{\partial e_{tm}}{\partial y} \Delta y_c^2 + \frac{\partial \rho_m}{\partial z} \frac{\partial e_{tm}}{\partial z} \Delta z_c^2 \right) \quad (47.17)$$

在式(47.6)~(47.16)中把诸项的下脚标  $c$  和  $m$  分别换成  $f$  和  $f$  即可分别获得  $E_{mf}(U_{fj}, \rho_{t\varphi m}), E_{mf}^d(U_{fj}, \rho_{t\varphi m}), P_{mf}(U_{fj}, p_m), P_{mf}^d(U_{fj}, p_m), \Pi_{mf}(U_{fi}, \tau_{ij}(U_{mi})), \Pi_{mf}^d(U_{fi}, \tau_{ij}(U_{mi})), \Phi_{Tmf}(\rho_f, T_m), \Phi_{Tmf}^d(\rho_f, T_m), \Phi_{umf}(\rho_f, U_{mi}), \Phi_{umf}^d(\rho_f, U_{mi}), \Phi_{emf}(\rho_f, e_{tm})$  和  $\Phi_{emf}^d(\rho_f, e_{tm})$  的积分或微分表达式, 节省篇幅起见这里不再写出它们。可压缩湍流三尺度方程组(44)~(46)与不可压缩湍流三尺度方程组(14)~(16)相比, 待求解的连续性、动量和能量方程

仍为 15 个;但对可压缩湍流,新增加了 3 个状态方程,增加了 12 个 Favre 平均量  $U_{\rho ci}$ ,  $U_{\rho mi}$ ,  $U_{\rho fi}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $e_{t\rho c}$ ,  $e_{t\rho m}$  和  $e_{t\rho f}$  与物理平均量  $U_{ci}$ ,  $U_{mi}$ ,  $U_{fi}$  ( $i = 1, 2, 3$ )  $e_{tc}$ ,  $e_{tm}$  和  $e_{tf}$  满足的 12 个关系式。因此,可压缩湍流三尺度方程组(44)~(46)共包含 30 个方程和关系式,给定初始和边界条件后,利用它们可求得 30 个未知量,30 个未知量是  $\rho_c$ ,  $U_{ci}$ ,  $U_{\rho ci}$ ,  $P_c$ ,  $T_c$  和  $e_{t\rho c}$ ;  $(\rho_m - \rho_c)$ ,  $(U_{mi} - U_{ci})$ ,  $(U_{\rho mi} - U_{\rho ci})$ ,  $(P_m - P_c)$ ,  $(T_m - T_c)$  和  $(e_{t\rho m} - e_{t\rho c})$ ;  $(\rho_f - \rho_m)$ ,  $(U_{fi} - U_{mi})$ ,  $(U_{\rho fi} - U_{\rho mi})$ ,  $(P_f - P_m)$ ,  $(T_f - T_m)$  和  $(e_{t\rho f} - e_{t\rho m})$ 。应该指出:不论 Favre 平均变量与物理平均变量之间满足的诸关系式,还是尺度间动量和能量湍流近程交换律,还是尺度  $\Delta x_f$  处湍流共振交换律,它们均与物理平均量成非线性关系,分子黏性则与物理平均量成线性关系,因此可压缩湍流三尺度方程组(44)~(46)为近似封闭方程组,且不包含任何经验常数和经验关系式。按照近程尺度范围估计, $\Delta x_f$  应为  $(0.2 \sim 0.5) \Delta x_n$ ,  $\Delta x_m$  应为  $(0.2 \sim 0.5) \Delta x_c$ ;  $\Delta x_f$  应尽可能接近耗散涡尺度,  $\Delta x_c$  为含能涡尺度。

对不可压缩湍流多尺度方程组的一些分析和讨论,同样适用于可压湍流三尺度方程组,例如影响中尺度( $\Delta x_c > \Delta x > \Delta x_m$ )或小尺度( $\Delta x_m > \Delta x > \Delta x_f$ )涨落运动的湍流动量和能量交换,主要是它与大尺度( $\Delta x > \Delta x_c$ )或它与中尺度( $\Delta x_c > \Delta x > \Delta x_m$ )之间的湍流交换,它与小尺度( $\Delta x_m > \Delta x > \Delta x_f$ )或它与不可分辨更小尺度( $\Delta x < \Delta x_f$ )之间的湍流交换比较次要。而 Favre 空间平均变量与物理平均变量满足的 12 个非线性关系式则体现了可压缩湍流的可压缩效应。

## 4 结语

可压缩和不可压缩湍流尺度间相互作用的近程特性,隐含了湍流的统计平均分析应采用多尺度模型,即应把计算尺度范围( $1, \Delta x_f$ )预先划分为二个、三个或更多个子尺度范围,文中给出了近程尺度范围估计和子尺度划分法,导出子尺度之间动量和能量湍流近程交换诸关系,导出最小子尺度与不可分辨更小尺度  $\Delta x < \Delta x_f$  之间动量和能量湍流共振交换诸关系;这些关系使湍流多尺度方程组近似封闭,且不包含任何经验常数和经验关系式。不可压缩湍流大小尺度方程组计算槽道流动和平面混合层流动三维时间演化的数值结果初步说明:近程涡应力公式正确、有效,初步说明多尺度模型是湍流平均分析的一个有效途径。可压缩湍流多尺度方程组尚未进行数值计算,它们的正确性、有效性、Favre 平均变量与物理平均变量间的非线性关系能否合理反映可压缩效应,可压缩湍流多尺度模型如何处理和捕捉激波以及不可压缩湍流多尺度方程组的更多数值实验,都是值得进一步研究的课题。

## 参 考 文 献

- 1 Frish V, Orszag S A. Turbulence: Challenges for theory and experiment[J]. Physics Today ,1990(1):24 ~32
- 2 是勋刚.湍流[M].天津:天津大学出版社,1994
- 3 Hinze J O. Turbulence[M]. McGraw-Hill Book Co. 1975
- 4 Domaradzki J A, Saiki E M. A subgrid-scale model based on the estimation of unresolved scales of turbulence[J]. Phys. Fluids 1997 9(7):2148~2164

- 5 Zhou Ye, Speziale CG. Advances in the fundamental aspects of turbulence: energy transfer, interacting scales, and self-preservation in isotropic theory[J]. Appl. Mech. Rev: 1998 51(4):267~301
- 6 Z Gao, F G Zhuang. Time-space scale effects in numerically computing flow-fields and a new approach to flow numerical simulation[J]. Lecture Notes in Physics 1995 Vol. 453. 256~262
- 7 高智.湍流计算的多尺度模型与尺度间相互作用规律 [J].自然科学进展,2003, 13(11):1147~53
- 8 高智,庄逢甘.湍流计算的多尺度方法.见:中国计算力学大会 2003 论文集(大会特邀报告, 18~24), 2003. 10, 北京
- 9 高智.湍流不同尺度间的近程和共振作用规律及应用 [J].应用数学和力学,2004,25(8), 837~46
- 10 Gao Zhi, Zhuang Fenggan. Multiscale equations for incompressible turbulent flows [J] Jour. Shanghai University 2004 8(2):113~116; Multiscale equations for compressible turbulent flows [J] ibid 2004 8 (3):141~145
- 11 王卫国.流体力学大小尺度方程组的数值研究及其与 Navier-Stokes 方程组解的比较:[博士后研究报告].北京:中国科学院力学研究所,1997
- 12 申义庆.广义扩散抛物化 NS 方程和大小尺度方程组的数值研究:[博士学位论文],北京:中国科学院,2001
- 13 Hughes TJR, Mazze L, Oberai AA, Wray AA. The multiscale formulation of large eddy simulation: Decay of homogeneous isotropic turbulence[J]. Phys. Fluids 2001, 13(2):505~512
- 14 SK Lele. Compressibility effects on turbulence [J] Ann. Review of Fluid Mech. 1994, 26:211~255
- 15 符松,金林辉.湍流可压缩效应模式研究中的几个基本问题[M].见:庄逢甘主编.2003 空气动力学前沿研究论文集.北京:中国宇航出版社,2003