

# 第 3 篇

## 相似理论与 与模化

---

---

本文刊登在《中国机械工程手册》，1996年

**主编单位** 中国科学院力学研究所

**编写单位** 中国科学院力学研究所

**主 编** 郑哲敏

**编 写 人** 谈庆明

**主 审** 王补宣

www.cnki.net

随着科学技术的迅速发展,近代工程设计所面临的任务更加复杂,解决问题的手段也更加先进。

量纲分析是解决工程技术问题的重要手段之一,这是因为:

(1) 借助于量纲分析,当存在着多种影响因素的情况下,往往能够分辨出哪些因素是重要的,因而其他

因素在设计中可以不加考虑。

(2) 量纲分析是建立相似律的基本方法,而相似律既是设计模型试验的理论依据,又是整理试验数据,推广试验结果应用范围所必须遵循的原则。

本篇从量纲分析出发,给出一般的相似原理和模化原则,以及它们在若干常见问题中的应用。

## 第1章 量纲分析及相似与模化的基本原理

### 1 基本量与导出量

物理量由两部分组成,一是它的数值,二是它的单位。

在描述物质机械运动和热效应的物理量中,一般有四个相互独立的物理量 $\Theta$ ,称为基本量。这些量通常取为长度、时间、质量和温度,或者长度、时间、力和温度。前者称为L-T-M- $\Theta$ 系统,被国际单位制(SI)所采用;后者称为L-T-F- $\Theta$ 系统,仍在工程单位制中沿用。每一个基本量都具有这样的特性,即:当基本量的单位缩小 $x$ 倍时,其数值(度量)由 $q$ 变为 $xq$ 。

其他物理量是根据物理定律或定义确定的,被称为导出量,它们的单位被称为导出单位。

根据这样一个事实,即两个问题中具有同一性质物理量的两个数值之比,不因基本量单位的变化而异(例如,不论用什么长度单位,甲物的高度总是乙物宽度的某一倍数)。可以证明,若 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 为基本量, $q$ 为任一其他的导出量,则有<sup>[1],[2]</sup>

$$q = cq_1^{a_1}q_2^{a_2}\dots q_n^{a_n} \quad (3\cdot1-1)$$

式中, $c, a_1, a_2, \dots, a_n$ 是与基本量无关的纯实数 $\Theta$ 。显然,当 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 的单位缩小 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 倍时,导出量的数值根据式(3·1-1)由 $q$ 变为 $q'$ ,即

$$q' = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}q$$

### 2 量纲的定义和常见物理量的量纲

在L-T-M- $\Theta$ 系统中,如 $q_1$ 为长度的数值, $q_2$ 为时间的数值, $q_3$ 为质量的数值, $q_4$ 为温度的数值,则式(3·1-1)特殊化为

$$q = cq_1^{a_1}q_2^{a_2}q_3^{a_3}q_4^{a_4} \quad (3\cdot1-2)$$

这时我们定义 $q$ 的量纲为 $L^{a_1}T^{a_2}M^{a_3}\Theta^{a_4}$ ,通常以 $[q]$ 表示 $q$ 的量纲。于是有

$$[q] = L^{a_1}T^{a_2}M^{a_3}\Theta^{a_4} \quad (3\cdot1-3)$$

同理在L-T-F- $\Theta$ 系统中

$$[q] = L^{a_1}T^{a_2}F^{a_3}\Theta^{a_4}$$

将量纲的定义用于基本量,则在L-T-M- $\Theta$ 系统中  
[长度]=L [时间]=T [质量]=M [温度]= $\Theta$

而在L-T-F- $\Theta$ 系统中

$$[\text{长度}] = L \quad [\text{时间}] = T \quad [\text{力}] = F \quad [\text{温度}] = \Theta$$

根据量纲的定义,在L-T-M- $\Theta$ 系统中显然有

$$[q'] = L^{a_1}T^{a_2}M^{a_3}\Theta^{a_4} \quad (3\cdot1-4)$$

如果另一个物理量 $q'$ 的量纲为

$$[q'] = L^{b_1}T^{b_2}M^{b_3}\Theta^{b_4} \quad (3\cdot1-5)$$

则由式(3·1-3)和式(3·1-5)一定有

$$\begin{aligned} [qq'] &= L^{a_1+b_1}T^{a_2+b_2}M^{a_3+b_3}\Theta^{a_4+b_4} \\ &= [q][q'] \end{aligned} \quad (3\cdot1-6)$$

在L-T-F- $\Theta$ 系统中,只需在以上公式中,将M改为F,将 $a$ 改为 $b$ 。

如果对于某个 $q$ 来说, $a_1, a_2, a_3, a_4$ 都等于零,则有

$$[q] = L^0T^0M^0\Theta^0 \equiv 1 \quad (3\cdot1-7)$$

⊖ 如包括电学效应,则需增加另一基本量,如电流。

⊖ 本篇中的指数均为纯实数。

## 3-4 第3篇 相似理论与模化

这时就说  $q$  是无量纲的纯数,称之为无量纲量,或无量纲数。显然,无量纲量的数值不会因单位的不同选择而有所改变。

例如,速度的定义是距离在单位时间内的变化。因此

$$[\text{速度}] = \text{LT}^{-1}$$

同理

$$[\text{加速度}] = \text{LT}^{-2}$$

再如,牛顿第二定律给出

$$f = ma$$

式中  $f$ ——力;

$m$ ——质量;

$a$ ——加速度。

于是,在 SI、亦即 L-T-M- $\Theta$  系统中,力成为导出量;而在 L-T-F- $\Theta$  系统中,质量则是导出量。由于质量是物质固有的,量值不变,重力可以因地而异,所以 SI 采纳质量为基本量,力为导出量。

根据运算法则,由式 (3-1-4) 和式 (3-1-6),可以得到

$$[f] = \text{LT}^{-2}\text{M}(\text{L-T-M-}\Theta \text{ 系统})$$

$$[m] = \text{L}^{-1}\text{T}^2\text{F}(\text{L-T-F-}\Theta \text{ 系统})$$

表 3-1-1 给出常见物理量的量纲。

表 3-1-1 常见物理量的量纲

物 理 量	定 律 或 定 义	量 纲	
		L-T-M- $\Theta$	L-T-F- $\Theta$
长度 $l$ , 位移 $u$		L	L
质量 $m$		M	$\text{L}^{-1}\text{T}^2\text{F}$
时间 $t$ , 周期		T	T
温度 $\theta$		$\Theta$	$\Theta$
面积 $A$	两个长度的乘积	$\text{L}^2$	$\text{L}^2$
体积 $V$	三个长度的乘积	$\text{L}^3$	$\text{L}^3$
密度 $\rho$	单位体积的质量	$\text{ML}^{-3}$	$\text{L}^{-4}\text{T}^2\text{F}$
速度 $v$	位移随时间的变化率	$\text{LT}^{-1}$	$\text{LT}^{-1}$
加速度 $a$	速度随时间的变化率	$\text{LT}^{-2}$	$\text{LT}^{-2}$
力 $F$	牛顿第二定律	$\text{MLT}^{-2}$	F
动量, 冲量	质量与速度的乘积, 力与时间的乘积	$\text{MLT}^{-1}$	TF
角度 $\varphi$ (以弧度计)	弧长与曲率半径之比	$\text{L}^0\text{T}^0\text{M}^0\Theta^0$	$\text{L}^0\text{T}^0\text{F}^0\Theta^0$
角速度 $\dot{\varphi}$ , $\omega$	角度随时间的变化率	$\text{T}^{-1}$	$\text{T}^{-1}$
角加速度 $\ddot{\varphi}$ , $\dot{\omega}$	角速度随时间的变化率	$\text{T}^{-2}$	$\text{T}^{-2}$
力矩 $M$	力与力臂的乘积	$\text{ML}^2\text{T}^{-2}$	LF
转动惯量 $I$	质量与距离平方的乘积	$\text{ML}^2$	$\text{LT}^2\text{F}$
角动量	$I\dot{\varphi}$	$\text{ML}^2\text{T}^{-1}$	LTF
压力 $p$	$F/A$	$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$	$\text{L}^{-2}\text{F}$
应力 $\sigma$ (正应力或剪应力)	单位面积的力	$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$	$\text{L}^{-2}\text{F}$
弹性模量 $E$	虎克定律	$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$	$\text{L}^{-2}\text{F}$
应变	$\frac{\partial u_i}{\partial x}$	$\text{L}^0\text{T}^0\text{M}^0\Theta^0$	$\text{L}^0\text{T}^0\text{F}^0\Theta^0$
应变率或速度梯度	$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial t}$	$\text{T}^{-1}$	$\text{T}^{-1}$
功	$F_i u_i$	$\text{ML}^2\text{T}^{-2}$	LF
动能	$\frac{1}{2}mv^2, \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$	$\text{ML}^2\text{T}^{-2}$	LF

## 第1章 量纲分析及相似与模化的基本原理 3-5

(续)

物 理 量	定 律 或 定 义	量 纲	
		L-T-M-Θ	L-T-F-Θ
位势能	能量守恒定律	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	LF
热能 Q	能量守恒定律	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	LF
单位体积能量		ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>	L <sup>-2</sup> F
比热容	单位质量物质升温一度所需之热	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> Θ <sup>-1</sup>	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> Θ <sup>-1</sup>
体积热容	单位体积物质升温一度所需之热	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup> Θ <sup>-1</sup>	L <sup>-2</sup> FΘ <sup>-1</sup>
温度梯度	温度沿某一方向的空间变化率	ΘL <sup>-1</sup>	L <sup>-1</sup> Θ
热流	Q/(At)	MT <sup>-3</sup>	L <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup> F
热导率	傅里叶导热定律	MLT <sup>-3</sup> Θ <sup>-1</sup>	T <sup>-1</sup> FΘ <sup>-1</sup>
热机效率	所作之功与加入之热的比	M <sup>0</sup> L <sup>0</sup> T <sup>0</sup> Θ <sup>0</sup>	L <sup>0</sup> T <sup>0</sup> F <sup>0</sup> Θ <sup>0</sup>
动力粘度 η	$\sigma = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$	ML <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup>	L <sup>-2</sup> TF
干摩擦系数	摩擦力与正压力之比	M <sup>0</sup> L <sup>0</sup> T <sup>0</sup> Θ <sup>0</sup>	L <sup>0</sup> T <sup>0</sup> F <sup>0</sup> Θ <sup>0</sup>
扩散系数	Ficks 扩散定律	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>
表面张力	液体表面上单位长度的法向收缩力	MT <sup>-2</sup>	L <sup>-1</sup> F
断裂韧度 K <sub>IC</sub>	裂纹顶端附近的应力场强度达到使裂纹开始扩展的临界值	ML <sup>-1/2</sup> T <sup>-2</sup>	L <sup>-3/2</sup> F

下面将指出,不一定要一成不变地选取基本单位制中的长度、时间、质量或力以及时间作为基本量,可以针对具体问题选择已知条件中的某几个量纲相互独立的物理量作为基本量,其他则作为导出量。这一点在量纲分析中特别有用。

## 3 π-定理

π定理的表述:设一物理系统的 N 个不同的物理量  $q_1, q_2, \dots, q_n$  之间存在一定的函数关系,即

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (3.1-8)$$

如果  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 中,最多有  $m$  个物理量的量纲是相互独立的 ( $m$  一般不大于 4),那么式 (3.1-8) 可以演化为另一个函数关系

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-m}) = 0 \quad (3.1-9)$$

其中  $\pi_j$  ( $j=1, 2, \dots, N-m$ ) 是由  $\prod_{i=1}^N q_i^{a_{j,i}}$  组成的  $N-m$  个不同的无量纲数。以上两式以及下面的公式中的  $f$ ,除特别指出外仅表示某种确定的函数关系,在不同场合下的具体函数形式不一定一样。

π定理的证明可见参考文献 [3] ~ [6]。

对 π定理可作如下几点说明,即

(1) 定理中强调,同一个物理系统的物理量,不论采用什么基本量的单位,如式 (3.1-8) 所表达的函数

关系都是成立的。

(2)  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 中,最多有  $m$  个量纲相互独立的物理量。可以令这些  $q_i$  为  $q_N, q_{N-1}, \dots, q_{N-m+1}$ , 并认为它们是基本量,那末根据式 (3.1-1), 总有  $m$  组实数  $a_{N,i}, a_{N-1,i}, \dots, a_{N-m+1,i}$ , 使其他  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, N-m$ ) 表示为

$$q_i = \pi_i q_N^{a_{N,i}} q_{N-1}^{a_{N-1,i}} \dots q_{N-m+1}^{a_{N-m+1,i}}$$

或者

$$\pi_i = \frac{q_i}{q_N^{a_{N,i}} q_{N-1}^{a_{N-1,i}} \dots q_{N-m+1}^{a_{N-m+1,i}}} \quad (3.1-10)$$

$$i=1, 2, \dots, N-m$$

这些  $\pi_i$  都是无量纲数,而且每个  $\pi_i$  都只包含一个各不相同的导出量  $q_i$ 。

(3)  $\pi_i$  的个数是一定的,但其形式并不是唯一的。因为如果按式 (3.1-10) 所取的  $\pi_i$  为一组,那末按下面的方式用  $\pi'_1$  代替  $\pi_1$

$$\pi'_1 = \pi_1 \pi_2^{a_2} \pi_3^{a_3} \dots \pi_{N-m}^{a_{N-m}}$$

其中,  $a_2, a_3, \dots, a_{N-m}$  不同时为零,这样所组成的新组  $\pi'_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-m}$  也将同样是可行的。所以,可以根据具体情况选取方便的无量纲数组。

(4)  $\pi_i$  通常是同一个问题中两个具有相同量纲的物理量之比,如长度与宽度之比,不同作用力之比、动量之比、能量之比,等等。

## 3-6 第3篇 相似理论与模化

## 4 相似、相似准数与相似律

设在某一工程技术问题中,已知一物理量 $q$ 以某种方式依赖于其他物理量 $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, N-1$ )。由于 $q$ 是因变量, $q_i$ 是自变量,为了方便起见,它们之间的函数关系不写成式(3.1-8)的形式,而写为

$$q = f(q_1, q_2, \dots, q_{N-1}) \quad (3.1-11)$$

这里函数 $f$ 的具体形式要由实验或理论分析来确定。

根据 $\pi$ 定理,由式(3.1-11)得出

$$\pi = f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-m-1}) \quad (3.1-12)$$

其中

$$\pi = \frac{q}{q_{N-1}^{a_1} q_{N-2}^{a_2} \dots q_{N-m}^{a_{N-m}}}$$

式(3.1-12)是相似律的基础。如果有两个工程技术问题,均受同一物理规律所支配,即使这些规律的细节可能还不清楚,但规律是客观存在着的,那末在第一个问题(系统)中有

$$q = f(q_1, q_2, \dots, q_{N-1}) \quad (3.1-13)$$

在第二个问题(系统)中有

$$q' = f(q'_1, q'_2, \dots, q'_{N-1}) \quad (3.1-14)$$

式(3.1-13)和式(3.1-14)中代表运算的函数应是完全相同的,从而

$$\pi = f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-m-1})$$

$$\pi' = f(\pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_{N-m-1})$$

中的 $f$ 也是相同的。因此在 $\pi_i = \pi'_i$  ( $i=1, 2, \dots, N-m-1$ )的条件下,有

$$\pi = \pi'$$

这就是说,两个问题中因变量的互相换算满足下述关系,即

$$q = q' \frac{q_{N-1}^{a_1} q_{N-2}^{a_2} \dots q_{N-m}^{a_{N-m}}}{q'_{N-1}{}^{a_1} q'_{N-2}{}^{a_2} \dots q'_{N-m}{}^{a_{N-m}}} \quad (3.1-15)$$

相似律可概述如下:在物理上相同的两个问题中,如果相应的 $\pi_i$ 都彼此相等,那么含有因变量的 $\pi$ 也必然相等( $\pi$ 可能不止一个,但两个问题中相应的 $\pi$ 相等),并满足类似于式(3.1-15)所规定的换算关系。这时就说两个问题是相似的。

$\pi_i$ 称为相似准数。

由于在相似准数相等的条件下,因变量之间存在着直接的换算关系,在工程设计中广泛使用与实物相似的模型进行实验,以取得工程设计所需的各种数据或建立起函数 $f$ 的具体形式。

5  $\pi$ 定理在整理实验规律时的应用

式(3.1-11)包含 $(N-1)$ 个自变量。为了通过

实验确定 $q$ 对 $q_1, q_2, \dots, q_{N-1}$ 的依赖关系,需要做 $(N-1)$ 个变量的试验。另一方面,式(3.1-12)却只包含 $(N-m-1)$ 个变量,因此只需做 $(N-m-1)$ 个变量的试验。后者的试验次数远比前者为少,因为 $m$ 通常等于3(力学问题)或4(包含热效应在内的力学问题),按照 $\pi$ 定理的要求安排实验和整理实验规律,不仅可以节约大量实验而且可以使实验结果具有更大的普遍性。

6 运用量纲分析和 $\pi$ 定理时应注意之点

(1)在列出式(3.1-11)中的自变量时,要保证 $q_1, q_2, \dots, q_{N-1}$ 确实都是互相独立的自变量,避免在 $q_i$ 中混入因变量,而因变量要放在等式左面以 $q$ 的形式出现。

不要在 $q_i$ 中丢掉反映问题主要矛盾的自变量,否则将不能找出 $q$ 与自变量之间的正确关系。

究竟有几个自变量,这个问题不是量纲分析所能答复的。只有对物理过程的深入认识才能解决这个问题。

(2)式(3.1-12)中函数 $f$ 的具体形式只能通过理论分析或者由实验才能确定,即依赖于对过程实质的认识,而不是 $\pi$ 定理本身所能解决的。

在用实验方法整理函数 $f$ 的形式时,往往能在自变量的某一范围内,采用指数关系的形式,即

$$\pi = c \pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \dots \pi_{N-m-1}^{a_{N-m-1}}$$

把实验曲线画在例如 $\pi-\pi_1$ 对数坐标图上,由方程

$$\ln \pi = \ln c_1 + a_1 \ln \pi_1$$

$$c_1 = c \pi_2^{a_2} \pi_3^{a_3} \dots \pi_{N-m-1}^{a_{N-m-1}}$$

所代表的曲线一般可以分成若干区段,每段曲线可用相近直线替代,直线段的斜率给出该段的方幂 $a_1$ ,而截距则给出该段的常数因子 $c_1$ 。再在 $\left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)-\pi_2$ 对数坐标图上重新标绘实验曲线以确定 $a_2$ 和 $c_2$ 。依此类推,直到最后确定 $c$ 和所有 $a_i$ 。

有一个特殊情况值得引起注意。如果 $N-1=m$ ,则只能组成一个无量纲数,而且它包含因变量,因而有

$$\frac{q}{q_1^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_m^{a_m}} = \text{常数}$$

这样,不论用什么方法确定了这个常数, $q$ 与 $q_1, q_2, \dots, q_m$ 的关系就完全确定了。这个情况虽然看起来特殊,但一些重要和典型的问题,正是在深入研究物理本质的基础上,运用这个手段加以解决的。

(3)分析无量纲数 $\pi_i$ 的物理意义和比较它们数值

## 第1章 量纲分析及相似与模化的基本原理 3-7

的大小,往往能提供一些关于哪些自变量能够被忽略的线索和加深对物理过程的认识。例如,对于一个质点的运动,如果作用有两个力  $F_1$  和  $F_2$ ,而且无量纲量  $\pi_1 = \frac{F_2}{F_1} \ll 1$ ,则有时(取决于问题的性质和我们感兴趣的  $q$ )可以忽略  $F_2$ ,从而由  $\frac{F_2}{F_1}$  所形成的  $\pi_1$  将不在式(3·1-12)中出现。这种忽略非主要因素的做法往往可使问题得到可容许的简化。

(4)式(3·1-8)或式(3·1-11),是从一般的函数  $f$  出发的。如果进一步知道这个物理现象的实质,或者知道描述这个物理系统的微分方程和有关的初始和边界条件,那么,所得到的相似准数  $\pi_i$  和无量纲的因变量  $\pi$  依赖于相似准数  $\pi_i$  的关系将更为具体,并找到求解的简化途径。

指出这一点是很必要的。因为在许多情况下,  $q_i$  的数目比较多,在模型试验中,要满足所有的  $\pi_i$  都相等的条件往往是办不到的。但是如果进行深入的分析(包括通过微分方程的分析),得到了简化的模型,那么虽不能实现完全的模拟,但局部模拟(指部分的  $q_i$  能够模拟)常是可行的。在以后几章中,有时将从微分方程出发建立相似准数。

应该指明,复杂的问题往往还难以找到合适的方程来进行描述。如果对问题进行定性但透彻的分析,抓住了问题中的主要矛盾和本质关联,也就能够找出正确的相似准数并对问题实现正确的简化。因此,关键在于对问题的实质要尽力进行正确而深入的分析,不在于分析手段在形式上的“高低”。

(5)基本量的数目  $m$  通常不大于4。这是因为在包含热学效应的力学系统中,有4个独立的量纲 L-T-M- $\Theta$  或 L-T-F- $\Theta$ 。

力的量纲 F 与质量的量纲 M 之所以不是独立的,是因为它们之间受牛顿第二定律的约束。然而,如果在所讨论的特定问题中,不需要使用牛顿第二定律,那末力单位和质量单位就相互独立了。这时,基本量纲的数目可以是5。

同理,如果在所讨论的问题中,不涉及热能与机械能之间的转换,仅有热量的传递时,热量的单位也可以单独予以定义。这样就将增加一个新的基本量纲 Q。

所以,在特定情况下,基本量纲的数目最多可增为6个。

基本量的数目愈多 ( $m$  愈大),则  $(N-m-1)$  愈小,  $\pi_i$  的数目就愈小。要注意在量纲分析中利用这个便利条件,详见示例。

## 7 示例

讨论水平直管内的管流,管长为  $l$ ,内径为  $R$ ,输送动力粘度为  $\eta$ ,密度为  $\rho$  的不可压缩流体,平均流速为  $v$ 。求管子两端的压差  $\Delta p$  与这些参数的关系。

(1)建立  $q=f(q_1, q_2, \dots, q_{N-1})$ 。显然,  $\Delta p$  应视为因变量,它取决于粘性流动的摩擦,而后者则是与  $\eta$  和速度梯度的乘积成正比的。速度梯度又与  $v$  和  $R$  有关。另外,管子愈长,阻力必然愈大,因此  $\Delta p$  应是  $l$  的函数。当然,由于速度分布在半径方向是变化的,所以不同半径处的流体微元间可能有动量的传递,而流体微元的平均动量表达式为  $\rho v$ 。根据以上分析,可以预期  $\Delta p$  应是  $\eta, R, l, v, \rho$  的函数,即

$$\Delta p = f(\eta, R, l, v, \rho) \quad (3\cdot1-16)$$

在列出式(3·1-16)时,我们没有考虑流体中有气泡或传热的情况,没有考虑管壁的粗糙度,也没有考虑到粘性力所产生的热效应。因此所得到的结果自然不能应用到这些因素比较重要的那些问题中去。

(2)列出各物理量的量纲。

物理量	$\Delta p$	$l$	$R$	$v$	$\rho$	$\eta$
量纲	$L^{-1}T^{-2}M$	L	L	$LT^{-1}$	$ML^{-3}$	$L^{-1}T^{-1}M$

(3)选择基本量。从上表可见,  $R, v, \rho$  可看作是基本量,因为它们之间在量纲上是相互独立的,其他物理量的量纲可用  $R, v, \rho$  的组合 ( $R^a v^b \rho^c$ ) 来表示。于是  $N=6, m=3$ 。

(4)形成  $\pi$  和  $\pi_i$ 。根据  $\pi$  定理,因为  $N-m=3$ ,应当形成3个不同的无量纲数,我们取为

$$\pi = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$$

$$\pi_1 = \frac{l}{R}$$

$$\pi_2 = \frac{\rho v R}{\eta}$$

因此有

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = f\left(\frac{l}{R}, \frac{\rho v R}{\eta}\right) \quad (3\cdot1-17)$$

(5)函数  $f$  的确定。从物理上考虑,如果管长  $l$  比半径  $R$  大得多,则进出口的端部效应的影响区长度与  $l$  相比就很小。这时,  $\Delta p$  应该正比于  $l$ , 因此

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2 l / R} = f\left(\frac{\rho v R}{\eta}\right) \quad (3\cdot1-18)$$

这个公式曾为许多试验所证实,所用流体包括水、油、空气等。

## 3-8 第3篇 相似理论与模化

(6)  $f$  的极限情况。在流速很小的情况下,更确切地说在  $\rho v R / \eta$  很小的情况下,惯性力与粘性摩擦相比应当很小。根据这种考虑,  $\Delta p$  应当与密度无关,因此式 (3.1-18) 中的  $f$  应具有下述特殊形式,即

$$f\left(\frac{\rho v R}{\eta}\right) = \frac{c\eta}{\rho v R}$$

其中,  $c$  是无量纲常数。于是式 (3.1-18) 变为

$$\Delta p = c \frac{\eta v l}{R^2} \quad (3.1-19)$$

同样的结果可以用增加基本量个数的方法来得到(参见本章 6 节)。忽略惯性相当于不应用牛顿第二定律。于是,质量和力的量纲可以认为是相互独立的,基本量就有 4 个。

列出诸量的量纲为

物理量	$\Delta p$	$l$	$R$	$v$	$\rho$	$\eta$
量纲	$FL^{-2}$	$L$	$L$	$LT^{-1}$	$ML^{-3}$	$FL^{-2}T$

其中,  $R, \eta, v, \rho$  可选为基本量。于是

$$\pi = \frac{\Delta p}{\eta} \frac{R}{v}$$

$$\pi_1 = \frac{R}{l}$$

在这两个无量纲数中,  $\rho$  的方幂都是零。因为知道压差正比于管长,从而

$$\frac{\Delta p}{\eta} \frac{R}{v} = f\left(\frac{l}{R}\right) = c \frac{l}{R}$$

这就是前面已推导出的式 (3.1-19)。

## 第 2 章 固体力学问题的模化 [7]~[9]

### 1 三维弹性体的变形和应力

(1) 几何模拟。要求模型和实物几何相似。若令  $l$  为实物的特征长度,  $l_m$  为模型的特征长度,  $a_l$  为实物尺寸与模型尺寸之比, 也称几何相似倍数, 则  $a_l = l/l_m$ 。以  $x, y, z$  表示实物中任一点的坐标, 则模型中相对应点的位置  $x_m, y_m, z_m$  为

$$(x_m, y_m, z_m) = \left(\frac{x}{a_l}, \frac{y}{a_l}, \frac{z}{a_l}\right) \quad (3.2-1)$$

(2) 载荷模拟。在一般机械强度问题中, 重力的影响往往是可以忽略的。这是因为, 重力所引起的应力的尺寸大约和  $\rho g l$  差不多, 而由  $\rho g l$  与屈服点  $\sigma_s$  形成的无量纲比值  $\rho g l / \sigma_s$ , 却是个小量。这里,  $\rho$  是材料的密度,  $g$  是重力加速度。

在实物表面  $S$  上作用有分布载荷  $\Sigma^i(x, y, z)$ , 用单位面积上的作用力来度量,  $\Sigma^i$  可以写为

$$\Sigma^i = \Sigma f_x \left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}\right) \quad (3.2-2)$$

$\Sigma$  称为特征分布载荷,  $f_x$  是表示载荷分布规律的函数。在模型中, 要求分布载荷  $\Sigma_m = \Sigma_m f_{x_m}$ , 其中  $f_{x_m}$  与  $\Sigma_m$  各为

$$\left. \begin{aligned} f_{x_m} \left(\frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m}\right) &= f_x \left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}\right) \\ \Sigma_m &= \frac{1}{a_x} \Sigma \end{aligned} \right\} \quad (3.2-3)$$

在实物表面上若作用有  $N$  个集中力  $F_{(n)}^i$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ), 在模型相对应的位置上, 要求取相应的集中力为

$$F_{m(n)}^i = \frac{F_{(n)}^i l_m^2}{l^2} \frac{1}{a_x} = \frac{1}{a_x a_l^2} F_{(n)}^i \quad (3.2-4)$$

把这个式子改写一下, 即是

$$\frac{F_{m(n)}^i}{l_m^2} = \frac{1}{a_x} \frac{F_{(n)}^i}{l^2}$$

这意味着, 在模型和实物之间, 集中力  $F_{(n)}^i$  与特征面积  $l^2$  的比值相差  $a_x$  倍, 这正是分布载荷的比值, 从而  $\frac{F_{(n)}^i}{l^2}$  的地位和  $\Sigma^i$  的地位相当, 彼此可以互相折合。所以下面只讨论分布载荷的问题就足够了。

(3) 位移模拟。在实物的另一部分表面  $S_u$  上, 可能具有位移  $W^i$ 。将  $W^i(x, y, z)$  写为

$$W^i = W g^i \left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}\right) \quad (3.2-5)$$

式中,  $W$  称为特征位移,  $g^i$  是表示位移分布规律的函数。在模型上, 在对应点上要求

$$\left. \begin{aligned} g_m^i \left(\frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m}\right) &= g^i \left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}\right) \\ W_m &= W \frac{l_m}{l} \frac{1}{a_w} = \frac{W}{a_l a_w} \end{aligned} \right\} \quad (3.2-6)$$

式 (3.2-5) 中的位移并不包括刚体运动的那部分位移,

因为这一部分,既不产生应变也不产生应力。

(4) 材料模拟。对于各向同性线弹性体只有两个弹性常数,可以取弹性模量  $E$  和泊松比  $\mu$ 。 $\mu$  已是无量纲数,因此模型材料的  $\mu_m$  必须等于实物材料的  $\mu$ 。

若实物是由几种材料组成的,其弹性常数分别为  $(E_1, \mu_1), (E_2, \mu_2), \dots$ , 则模型材料的  $(E_{m1}, \mu_{m1}), (E_{m2}, \mu_{m2}), \dots$  必须满足下述条件,即

$$\left. \begin{aligned} E_1 : E_2 : E_3 : \dots &= E_{m1} : E_{m2} : E_{m3} : \dots \\ \mu_1 = \mu_{m1}, \mu_2 = \mu_{m2}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.2-7)$$

不妨选取  $(E_1, \mu_1)$  为实物材料性质的特征常数,  $(E_{m1}, \mu_{m1})$  为模型材料的特征常数。

(5) 实物中任意点的位移  $W^i(x, y, z)$ , 应力  $\sigma_{ij}$ , 应变  $\epsilon_{ij}$  可以写为

$$\left. \begin{aligned} W^i &= f^i(\Sigma, W, l, E_1, \mu_1, x, y, z) \\ \sigma_{ij} &= g_{ij}(\Sigma, W, l, E_1, \mu_1, x, y, z) \\ \epsilon_{ij} &= h_{ij}(\Sigma, W, l, E_1, \mu_1, x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (3.2-8)$$

可将  $\pi$  定理分别应用于以上各式。例如  $\sigma_{ij}$  可表示为

$$\frac{\sigma_{ij}}{E_1} = G_{ij} \left( \frac{\Sigma}{E_1}, \frac{W}{l}, \mu_1, \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l} \right) \quad (3.2-9)$$

在线性范围内,  $\Sigma$  和  $W$  的作用是可以叠加的, 同时,  $\sigma_{ij}$  与  $\Sigma$  和  $W$  的关系也应是线性的。因此, 物理上的考虑使我们能把式 (3.2-9) 进一步简化为

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \Sigma p_{ij} \left( \mu_1, \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l} \right) \\ &+ E_1 \frac{W}{l} q_{ij} \left( \mu_1, \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l} \right) \end{aligned} \quad (3.2-10)$$

在满足本节 (1) 至 (4) 各项相似条件的情况下, 模型中的应力  $\sigma_{mij}$  为

$$\begin{aligned} \sigma_{mij} &= \Sigma_m p_{ij} \left( \mu_1, \frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m} \right) \\ &+ E_{m1} \frac{W_m}{l_m} q_{ij} \left( \mu_1, \frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m} \right) \\ &= \frac{\Sigma}{a_\Sigma} p_{ij} \left( \mu_1, \frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m} \right) \\ &+ E_1 \frac{W}{l} \frac{E_{m1}}{E_1} \frac{W_m}{W} \frac{l}{l_m} q_{ij} \left( \mu_1, \frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m} \right) \\ &= \frac{\Sigma}{a_\Sigma} p_{ij} \left( \mu_1, \frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m} \right) \\ &+ E_1 \frac{W}{l} \frac{E_{m1}}{E_1} \frac{1}{a_W} q_{ij} \left( \mu_1, \frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m} \right) \end{aligned} \quad (3.2-11)$$

因此, 若取

$$a_W = a_\Sigma \frac{E_{m1}}{E_1}$$

则模型中的应力与实物中的应力有下述关系, 即

$$\sigma_{mij} = \frac{1}{a_\Sigma} \sigma_{ij}$$

作为一个特殊情况, 如果模型所使用的材料与实物相同, 即

$$\frac{E_{m1}}{E_1} = 1$$

并且  $a_W = 1$  和  $a_\Sigma = 1$ , 即

$$\frac{W_m}{l_m} = \frac{W}{l} \quad \Sigma_m = \Sigma$$

则有

$$\sigma_{mij} = \sigma_{ij}$$

这就是说, 在几何相似条件下, 相对应点的应力相等。同理可证, 在几何相似条件下

$$\begin{aligned} \epsilon_{mij} &= \epsilon_{ij} \\ W_m^i &= \frac{l_m}{l} W^i = \frac{W^i}{a_l} \end{aligned}$$

## 2 光弹性模型试验

在光弹性模型试验中, 可以测得模型中的应力分布, 利用上一节给出的有关弹性体变形的相似律

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{ij}}{E_1} &= \frac{\Sigma}{E_1} p_{ij} \left( \mu_1, \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l} \right) \\ &+ \frac{W}{l} q_{ij} \left( \mu_1, \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l} \right) \end{aligned} \quad (3.2-12)$$

便可换算实物中的应力分布。

这里, 要求光弹性模型的形状和实物的形状相似, 模型材料的弹性常数和表面载荷满足

$$\mu_{m1} = \mu_1 \quad E_{m1} = \frac{\Sigma}{\Sigma} E_1 \quad (3.2-13)$$

表面位移也要满足几何相似, 即

$$W_m = \frac{l_m}{l} W \quad (3.2-14)$$

于是, 可由换算得到: 实物中在几何相似的相对应点上的应力是

$$\sigma_{ij} = \frac{E_1}{E_{m1}} \sigma_{mij} \quad (3.2-15)$$

在上面的几项要求中, 有一项是不容易做到的, 那就是光弹性模型材料的泊松比和实物的泊松比总有不小的差别, 所以用上述换算式, 只能得到近似值, 常常需要由此而引起的误差进行估测或估算, 并进行适当的修正。

但是在平面应力或平面应变问题中, 如果区域是单连通的, 无体力作用或者体力是常值, 边界上只有载荷作用而无外加位移, 那末二维弹性力学理论已经证

## 3-10 第3篇 相似理论与模化

明应力分布和弹性常数无关。如果区域是多连通的,而其他条件不变,那末只要作用于孔边的合力为零,上述结论依然成立。

于是,在模型试验中,要求模型和实物在平面内的形状保持几何相似,而且在边界上的相对应点上,模型和实物的外载比值保持为常值,那末,在弹性体内凡几何相似的相对应点上的应力可按下列关系进行折算,即

$$\sigma_{ij} = \frac{F_1}{F_{m1}} \frac{h_m}{h} \frac{l_{m1}}{l} \sigma_{mij} \quad (3\cdot2-16)$$

这里  $\frac{F_1}{F_{m1}}$  和  $\frac{h_m}{h}$  是模型和实物的外力比和厚度比。

## 3 有限弹性体的固有频率

有限弹性体在给定支撑条件下,有特定固有频率。取实物的密度  $\rho_1$  作为特征密度。如支撑条件可表示为某一个面上的位移等于零,则固有频率  $\omega$  为

$$\omega = f(l, \rho_1, E_1, \mu_1) \quad (3\cdot2-17)$$

应用  $\pi$  定理,有

$$\frac{\omega l}{\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}} = f(\mu_1) \quad (3\cdot2-18)$$

因此,模型和实物同频率的换算关系为(注意:若材料相同,即  $\mu_1 = \mu_{m1}$ )

$$\frac{\omega_m l_m}{\sqrt{\frac{E_{m1}}{\rho_{m1}}}} = \frac{\omega l}{\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}} \quad (3\cdot2-19)$$

由式(3·2-18)可知:在几何相似条件下,弹性体的振动频率与特征尺寸成反比,振动周期与特征尺寸成正比。

## 4 强迫振动条件下的载荷模拟

在动力学问题中,自振周期是一个自然的时间尺度。因此,外载荷  $\Sigma$  可写为

$$\Sigma(x, y, z, t) = \Sigma^f \left( \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, \frac{t}{l} \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}} \right)$$

于是,分布载荷的模拟条件将是

$$\begin{aligned} & f_m^f \left( \frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m}, \frac{t}{l_m} \sqrt{\frac{E_{m1}}{\rho_{m1}}} \right) \\ &= f^f \left( \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, \frac{t}{l} \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}} \right) \end{aligned} \quad (3\cdot2-20)$$

在动力学问题中,初始条件有时会引入新的无量纲参数。但是,在许多情况下,例如当结构有阻尼时,初始条件对振动的影响可以忽略不计。在这种情况下,由式(3·2-10)和式(3·2-11)得到

$$\sigma_{mij} = \frac{\sigma_{ij}}{\alpha_x} = \frac{\Sigma}{\alpha_x} g_{ij} \left( \mu_1, \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, \frac{t}{l} \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}} \right) \quad (3\cdot2-21)$$

如果问题中还存在外加集中载荷,以及表面上出现位移,和前一节的讨论类似,不会影响这里所作的结论。

## 5 梁板构件的挠曲变形

前面几节讨论了固体力学问题的一般模化原则,其中包括几何相似一条。但是有不少固体力学问题,模化时不必要求保持严格的几何相似。

以简支梁为例,它的平衡方程和边界条件是

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^4 W}{dx^4} &= -q(x) \\ x=0, W &= \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \\ x=l, W &= \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3\cdot2-22)$$

为简化起见,假设梁是均匀的。方程中  $W$  是挠度,  $q(x)$  是分布载荷。从式(3·2-22)可见,对于梁的弯曲而言,起决定性作用的是  $EI$ 。因此,在求挠度的问题上,断面形状并不要求几何相似,例如可以用方截面的梁来模拟工字梁的变形。

同一原则适用于梁系、板、壳等的平衡和振动问题。

## 6 结构失稳的临界载荷

结构通常可以简化为梁、轴、板、壳或它们的组合体。作为具有某些特殊形状的弹性体,当然也应遵循前几节所叙述的相似原则。但是,它们的特殊性往往可以带来进一步的简化。

以一个变截面直柱在轴向力  $P$  作用下的稳定性问题为例,求失稳时的临界载荷。为此,先列出基本方程和边界条件

$$\left. \begin{aligned} E \frac{d^2}{dx^2} \left( I \frac{d^2 W}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 W}{dx^2} &= 0 \\ x=0: W &= 0, \frac{dW}{dx} = 0 \\ x=l: W &= 0, \frac{dW}{dx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3\cdot2-23)$$

式中  $I(x)$ ——直柱截面对中性轴的截面矩;

$l$ ——柱的长度;

$W$ ——直柱失稳时垂直于直柱轴线的位移;

$x$ ——沿直柱轴线的坐标。 $x=0$  和  $x=l$  是

直柱的两个端点。

引入无量纲变数和参数

$$W^* = \frac{W}{l} \quad x^* = \frac{x}{l} \quad I^*(x^*) = \frac{I(x^*)}{I_0}$$

$$I_0 = I(0) \quad P^* = \frac{Pl^2}{EI_0}$$

于是, 式 (3·2-23) 变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^{*2}} \left( I^*(x^*) \frac{d^2 W^*}{dx^{*2}} \right) + P^* \frac{d^2 W^*}{dx^{*2}} &= 0 \\ x^* = 0; W^* &= 0, \frac{dW^*}{dx^*} = 0 \\ x^* = 1; W^* &= 0, \frac{dW^*}{dx^*} = 0 \end{aligned} \right\}$$

在已知  $I^*(x^*)$  的情况下, 上述微分方程只有在参数  $P^*$  为特定数值时才有不恒等于零的解。因此, 临界载荷的计算公式为

$$\frac{Pl^2}{EI_0} = \text{随函数 } I^*(x^*) \text{ 变化的特定数值} \quad (3·2-24)$$

为使模型与实物间的临界载荷能够互相转换, 只要做到模型的  $I^*(x^*)$  与实物的  $I^*(x^*)$  完全相等, 而不必要求满足全部几何相似等条件。

## 7 弹塑性力学问题的模化

弹塑性力学问题的模化, 不象小变形弹性力学那样简单。这首先是因为目前还没有能描述材料任意复杂变形途径条件下材料力学性质的可靠理论。不过, 如对弹塑性变形性质做某些假设, 则在模化方面仍能得到一些有用的结果。

以圆棒的静力拉伸为例来讨论弹塑性力学问题的模化。图 3·2-1a 表示简单拉伸的应力-应变曲线, 其中  $\sigma_s$  是屈服点,  $\sigma_b$  是抗拉强度,  $\epsilon_s$ ,  $\epsilon_b$ ,  $\epsilon_m$  是相应的拉伸应变。图 3·2-1b 是用  $\sigma_s$  作应力度量单位后的无量纲应力-应变关系。如经这样处理后, 两种材料的无量纲应力-应变关系完全相同, 则两种材料所做成的圆棒在简单拉伸条件下的作用力、应力、应变以及颈缩是可以互相模拟的<sup>①</sup>。

如果加载途径发生变化, 例如, 在加载至某一  $\sigma/\sigma_s$  时, 卸载至零而又继续加载, 为要达到模化的目的, 还要求卸载段与重新加载段的无量纲应力-应变关系也要完全相同 (至少在我们感兴趣的那个应变范围内)。

如果研究的对象是剪切变形, 那么就需要按同一方式使用切应力与切应变的关系。

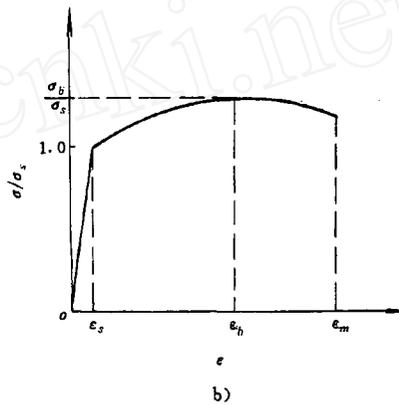
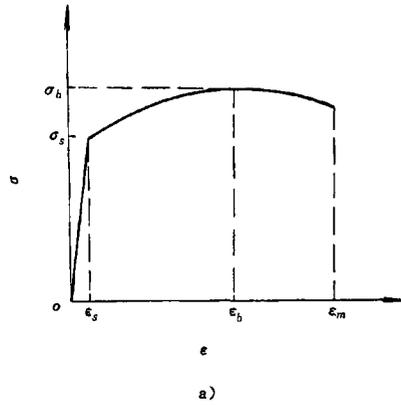


图 3·2-1 简单拉伸的应力-应变曲线

a) 有量纲应力 b) 无量纲应力

对于一个实际的构件, 各个不同部位所经历的加载方式和途径是不同的, 因而严格地说, 只有在任意加载方式和途径的条件下, 作为本构关系的无量纲化后的应力-应变关系都必须相同, 才能说这两种材料是能相互模拟的。这当然是极难做到的。因此, 弹塑性力学问题的模化通常都避免更换模型材料, 而仅仅改变模型尺寸以保持几何相似。这时, 只要令模拟条件式 (3·2-3) 中的  $a_x=1$  和式 (3·2-6) 中的  $a_w=1$ , 则实物与模型相对应点上的应力与应变就将完全相等, 失稳条件也完全相同。

要是必需更换材料, 那就要求模型材料无量纲化

① 如果应变也用某个特征应变如  $\epsilon_s$  来度量, 那末, 模拟条件就可进一步放宽。

## 3-12 第3篇 相似理论与模化

后的理论本构关系与实物材料的理论本构关系完全相同。用以进行应力无量纲化的参考量 $\sigma_s$ 可以是拉伸条件下的屈服应力、流动应力或弹性模量 $E$ 。此外,理论本构关系中,如出现多个无量纲参数,除 $\sigma_s/E$ 、 $\mu$ 外,可记为 $m_1, m_2, \dots, m_k$ 等,这些参数自然需要一一对应地相等。这时,在几何相似条件下,如令式(3.2-3)中的 $\alpha_z = \sigma_s/\sigma_m$ ,并令式(3.2-6)中的 $\alpha_w = 1$ ,则在理论本构关系精度的范围内,实物与模型相对应点上的应变相等,应力成比例,其比例常数为 $\alpha_z$ 。失稳时,相应的应力相等,失稳载荷 $F$ (以总力计)的折算公式为

$$\frac{F}{l^2} = \alpha_z \frac{F_m}{l_m^2}$$

以冷轧钢板为例(见图3.2-2),设板宽为 $b$ ,轧前厚和轧后厚各为 $l$ 和 $l'$ ,轧辊半径为 $R$ ,取 $l, \frac{l'}{l}, \frac{R}{l}, \frac{b}{l}$ 为几何自变量,转速 $\omega$ 为运动学自变量。在两端无束缚,亦即 $T_1 = T_2 = 0$ ,轧辊和机架都是刚性的,辊板间无滑动,而且应力-应变关系并不敏感地依赖于应变率的假设下,任何因变量都可以表示为上述几何和运动学自变量与本构关系中 $E, \mu, \sigma_s$ 和 $m_1, m_2, \dots, m_k$ 等参数,以及被轧材料的密度 $\rho$ 的函数。如求机架所受之力 $F$ ,则有

$$\frac{F}{\sigma_s b R} = f\left(\frac{\sigma_s}{E}, \mu, m_1, m_2, \dots, m_k, \frac{l'}{l}, \frac{R}{l}, \frac{b}{l}, \frac{\rho R^2 \Omega^2}{\sigma_s}\right)$$

在 $\rho R^2 \Omega^2 / \sigma_s \ll 1$ 的情况下,则有

$$\frac{F}{\sigma_s b R} = f\left(\frac{\sigma_s}{E}, \mu, m_1, m_2, \dots, m_k, \frac{l'}{l}, \frac{R}{l}, \frac{b}{l}\right)$$

所以,在不改变材料的前提下,只要保持几何相似就能保证模化的实现,机架受力可以直接由小尺寸模型试验结果换算出来,其他因变量,如所需功率、回弹量等可用同一方法求得。实际上,轧制过程中应变率不低,

其影响主要表现在提高了屈服点,如果 $\sigma_s$ 采取该平均应变率下的数值,上述讨论依然成立。

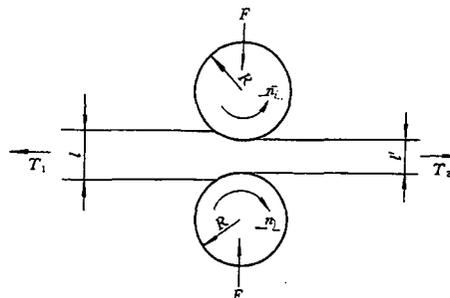


图3.2-2 冷轧钢板示意

在金属材料压力加工中,由于材料的塑性变形远大于弹性变形,往往可以进一步假设材料是理想刚塑性的,或者是指数型的( $\sigma = \sigma_0 \epsilon^n$ )。在这一条件下,模化要求还可以放松,模型材料的选择范围也就更宽了。

最后,再举一个硬度问题的例子,用以说明硬度与强度之间的关系取决于材料的应力-应变关系。假设压头是尖锥形的,而且刚性极大,因此,其特征量只有一个无量纲锥角 $\alpha$ 。我们需要建立贯入力 $F$ 和退出压头后的压痕直径 $D$ 之间的关系。进行类似于冷轧钢板例中的分析,不难得到

$$\frac{F}{\pi D^2 \sigma_s} = f\left(\frac{\sigma_s}{E}, \mu, m_1, m_2, \dots, m_k, \alpha\right)$$

可见,在使用相同的压头和贯入力的条件下,压痕直径 $D$ 并不只取决于屈服点 $\sigma_s$ ,还要受到一系列标志材料应力-应变关系的无量纲参数 $\frac{\sigma_s}{E}, \mu, m_1, m_2, \dots, m_k$ 的限制,不存在简单的通用关系式。

## 第3章 流体力学问题的模化<sup>[10][11]</sup>

### 1 流体力学的基本方程

流体力学的基本方程有:(1)质量守恒方程,(2)动量守恒方程,(3)能量守恒方程,(4)状态方程。我们在这里只考虑一种单相的、没有化学反应的介质。关于在化工方面的应用,可参见参考文献[12]。

在笛卡尔坐标系中,质量守恒方程表示为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.3-1)$$

动量守恒方程表示为

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + X_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.3-2)$$

能量守恒方程表示为

## 第3章 流体力学问题的模化 3-13

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( h + \frac{1}{2} q^2 + V \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} v_j) \end{aligned} \quad (3.3-3)$$

式中  $V$  是体力  $X_i$  的势函数, 即

$$X_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (3.3-4)$$

在以上诸式中  $t$  表示时间,  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 是空间坐标,  $\rho$  是密度,  $v_i$  是介质微元的质点速度,  $p$  是压力,  $X_i$  是单位质量的体积力,  $\tau_{ij}$  是粘性应力张量,  $h$  是单位质量的焓, 它是单位质量的内能  $u$  与  $p/\rho$  之和,  $\frac{1}{2} q^2 = \frac{1}{2} v_i v_i$  是单位质量的动能,  $q_i$  是热流矢量 (“热通量”)。还应当说明的是: 上述公式中, 对下标  $i$  (或  $j$ ) 使用了一种简化约定。凡某一项中  $i$  (或  $j$ ) 只出现一次, 就代表  $i$  (或  $j$ ) 可以是 1, 2 或 3, 凡某一项中  $i$  (或  $j$ ) 重复出现两次, 则该项代表  $i$  (或  $j$ ) 轮番取 1, 2 和 3 的三项和。例如式 (3.3-2) 实际上是三个公式, 即

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + X_1 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \right) \\ & \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + X_2 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} \right) \\ & \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + X_3 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

下面将继续使用这类约定。

状态方程共有两个, 它们是

$$p = p(\rho, T) \quad (3.3-5)$$

$$u = u(\rho, T) \quad (3.3-6)$$

前者称热状态方程, 后者称热量状态方程。式中  $T$  表示温度。

在许多情况下, 热通量  $q_i$  和粘性应力张量  $\tau_{ij}$  可以表示为

$$q_i = - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (3.3-7)$$

$$\tau_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \eta \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (3.3-8)$$

式中  $\lambda$ ——介质的热导率;

$\eta$ ——动力粘度。

当  $i=j$ , 符号  $\delta_{ij}=1$ ; 而当  $i \neq j$ ,  $\delta_{ij}=0$ 。

在适当的初始条件和边界条件下, 上述方程组有确定的解。通过一些具体的假设, 由这个方程组可以导出不可压缩无粘性流体、不可压缩粘性流体、可压缩无粘性气体、可压缩粘性气体的基本方程 (参见本卷第 7 篇第 3 章和第 8 篇第 4 章)。

## 2 相似准数

以重力作用下的物体定常绕流问题为例, 可导出无量纲相似准数如下。

令  $p_0, \rho_0, T_0, u_0$  表示来流的未扰动状态, 以  $v_0$  表示来流的速度。令  $l$  代表物体的特征长度, 并只考虑实物和模型形状是几何相似的情况。由于所考虑的是定常问题, 所有因变量对时间  $t$  的偏导数都等于零。

引入无量纲变量

$$\left. \begin{aligned} x_i^* &= \frac{x_i}{l} & \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0} & p^* &= \frac{p}{p_0} \\ T^* &= \frac{T}{T_0} & u^* &= \frac{u}{u_0} & v_i^* &= \frac{v_i}{v_0} \\ X_i^* &= \frac{X_i}{g} & \tau_{ij}^* &= \frac{\tau_{ij}}{\eta_0 v_0 / l} & q_i^* &= \frac{q_i}{\lambda_0 T_0 / l} \end{aligned} \right\} \quad (3.3-9)$$

式中  $g$ ——重力加速度;

$\eta_0, \lambda_0$ ——未扰动气流的动力粘度和热导率。

则状态方程可表示为无量纲量的形式

$$p^* = p^*(\rho^*, T^*) \quad (3.3-10)$$

$$u^* = u^*(\rho^*, T^*) \quad (3.3-11)$$

$\eta$  和  $\lambda$  也都是介质状态参量温度和密度的函数, 因此, 又有

$$\eta^* = \frac{\eta}{\eta_0} = \eta^*(\rho^*, T^*) \quad (3.3-12)$$

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \lambda^*(\rho^*, T^*) \quad (3.3-13)$$

如果式 (3.3-10) ~ 式 (3.3-13) 的右端所出现的无量纲函数形式对两种介质都相同, 我们说这两种介质的状态方程和输运性质相似, 是互相模拟的。

根据式 (3.3-7) ~ 式 (3.3-9), 式 (3.3-12) 和式 (3.3-13),

$$q_i^* = - \lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} \quad (3.3-14)$$

$$\tau_{ij}^* = \eta^* \left( \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) - \frac{2}{3} \eta^* \delta_{ij} \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \quad (3.3-15)$$

质量方程、动量方程和能量方程可分别表示为

## 3-14 第3篇 相似理论与模化

$$\frac{\partial \rho^* v_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (3.3-16)$$

$$v_j^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{g l}{v_0^2} X_i^* + \frac{\eta_0}{\rho_0 v_0 l} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j^*} \quad (3.3-17)$$

$$v_i^* \frac{\partial u^*}{\partial x_i^*} = -\left(\frac{\lambda_0}{c_{p0} \eta_0}\right) \left(\frac{\eta_0}{\rho_0 v_0 l}\right) \left(\frac{c_{p0} T_0}{u_0}\right) \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i^*} - \left(\frac{p_0}{\rho_0 v_0^2}\right) \left(\frac{v_0^2}{u_0}\right) \frac{p^*}{\rho^*} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i^*} + \left(\frac{\eta_0}{\rho_0 v_0 l}\right) \left(\frac{v_0^2}{u_0}\right) \frac{\tau_{ij}^*}{\rho^*} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} \quad (3.3-18)$$

式中  $c_{p0}$ ——来流的比定压热容。

在上述方程中,出现各种相似准数,我们将它们列入表 3.3-1 中。

表 3.3-1 几种相似准数的物理意义

相似准数	名称与符号	物理意义
$\frac{v_0^2}{g l}$	弗劳德数 $Fr$	惯性力与重力之比
$\frac{\rho_0 v_0 l}{\eta_0}$	雷诺数 $Re$	惯性力与粘性力之比
$\frac{\eta_0 c_{p0}}{\lambda_0}$	普朗特数 $Pr$	粘性效应与热传导效应之比
$\frac{v_0}{\sqrt{p_0/\rho_0}}, \frac{v_0}{\sqrt{u_0}}$	相当于来流马赫数 $Ma$ ( $Ma$ 的定义是来流的质点速度与声速之比)	惯性效应与可压缩效应之比
$\frac{c_{p0} T_0}{u_0}$		焓与内能之比 约等于 比定压热容 比定容热容

如果我们把式 (3.3-10) 和式 (3.3-11) 进一步具体化。譬如,讨论理想气体的情况,就可以更清楚地看出上表中最后两行的无量纲量的意义。对于理想气体,状态方程为

$$p = R \rho T \quad (3.3-19)$$

式中,  $R$  是一常数。理想气体的比定压热容  $c_p$  和比定容热容  $c_v$  只是温度的函数,它们满足

$$c_p = c_v + R \quad (3.3-20)$$

理想气体的等熵指数  $\kappa$  等于质量热容比,即

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (3.3-21)$$

声速  $c$  的表达式是

$$c^2 = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa R T \quad (3.3-22)$$

理想气体的内能可写为

$$u = \int_0^T c_v dT$$

或

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{c_{p0} T_0} &= \int_0^{T_0} \frac{c_p - R}{c_{p0} T_0} dT \\ &= \int_0^1 \frac{c_p}{c_{p0}} dT^* - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\kappa_0}\right) dT^* \\ &= \int_0^1 \frac{c_p}{c_{p0}} dT^* - \left(1 - \frac{1}{\kappa_0}\right) \end{aligned} \quad (3.3-23)$$

$$u^* = \frac{\left[\int_0^{T^*} \frac{c_p}{c_{p0}} dT^* - \left(1 - \frac{1}{\kappa_0}\right) T^*\right]}{\left[\int_0^1 \frac{c_p}{c_{p0}} dT^* - \left(1 - \frac{1}{\kappa_0}\right)\right]} \quad (3.3-24)$$

在理想气体条件下,式 (3.3-19) 可以表示为下述无量纲形式,即

$$p^* = \rho^* T^* \quad (3.3-25)$$

于是有

$$\frac{v_0}{\sqrt{p_0/\rho_0}} = \sqrt{\kappa_0} Ma_0 \quad (3.3-26)$$

$$\frac{v_0^2}{u_0} = (\kappa_0 - 1) Ma_0 \frac{c_{p0} T_0}{u_0} \quad (3.3-27)$$

因此,两个定常绕流问题的相似条件要求马赫数  $Ma_0$ 、雷诺数  $Re_0$ 、弗劳德数  $Fr_0$ 、普朗特数  $Pr_0$  和等熵指数  $\kappa_0$  各个保持相同。另外,还要求  $\frac{c_p}{c_{p0}}$ 、 $\lambda^*$ 、 $\eta^*$  分别是  $T^*$  的确定函数。

剩下的相似参数,必需从边界条件中去找。物体上的边界条件一般有三类,即

(1) 物体表面上的速度等于零

$$v_i = v_i(x_{iw}) = 0$$

也即

$$v_i^* = v_i^*(x_{iw}^*) = 0 \quad (3.3-28)$$

式中,下标  $w$  表示物体表面的意思。因此,这个边界条件不引入新的无量纲参数。

(2) 物体表面上的热流量是给定的,也即

$$q_{iw}^* = \frac{q_{iw} l}{\lambda_0 T_0} = q_{iw}^*(x_i^*)$$

在 (1) 和 (2) 这两个条件下,物体表面的温度分布是被确定的,即有

$$\frac{q_{iw}^*}{T_w^* - 1} = \frac{q_{iw} l}{\lambda_0 (T_w - T_0)} = f(x_i^*) \quad (3.3-29)$$

我们称  $\frac{q_{iw}^*}{T_w^* - 1}$  为努塞尔数,以  $Nu$  表示之,它是解的一

## 第3章 流体力学问题的模化 3-15

部分。在对流换热情况下,一般可设  $q_{iw}$  与温差  $T_w - T_0$  成正比,比例系数  $\alpha$  称之为“换热系数”,于是,努塞耳数可表示为

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda_0}$$

(3) 物体的表面温度  $T_w^*$  是给定的。这种边界条件引入  $\frac{T_w^*}{T_0}$  作为相似准数,而  $Nu$  则是因变量。

上面讨论的是一般模拟原则,在许多具体问题中还可以大大简化,这在以后还要说明。

## 3 其他相似准数

流体力学问题中还出现下面几个相似准数,即

(1) 在旋转机械的内流问题中,上述无量纲参数中的  $v_0$  可以理解为平均流速。若旋转机械的角速度为  $\omega$ ,则在基本方程中需补充另一个无量纲参数  $\frac{\omega l}{v_0}$ 。在旋转机械中,这个参数往往是和比转数联系着的,在气象和海流问题中,被称为罗斯贝数。

(2) 如果运动是非定常的,例如,当绕流物体以频率  $f$  振动时,则需补充引入无量纲参数  $\frac{fl}{v_0}$ ,这个参数称之为折合频率。

(3) 在自然对流问题中,不存在来流速度  $v_0$ ,因此不必引进  $v_0$  作为速度的尺度。这种情况下,对流的驱动力是温度造成的密度变化,即

$$\begin{aligned} X_i &= g \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) n_i = g \beta \Delta T n_i \\ &= g \beta \Delta T_w \frac{\Delta T}{\Delta T_w} n_i \end{aligned} \quad (3.3-30)$$

式中  $\beta$ ——定压体膨胀系数;

$n_i$ ——单位矢量 ( $n_i n_i = 1$ );

$\Delta T = T - T_0$ ;

$\Delta T_w = T_w - T_0$ 。

注意在以上公式中,虽然忽略了压力对密度的影响,但这对导出无量纲参数没有影响。

由式(3.3-30)可见,在自然对流问题中,用  $\Delta T$  作为因变量,  $\Delta T_w$  作为温度标尺是更为合理的。于是,式(3.3-17)右端的第二项变为

$$g \frac{l}{v_0^2} X_i = \frac{g \beta \Delta T_w l}{v_0^2} n_i \frac{\Delta T}{\Delta T_w}$$

如果把其中的无量纲系数  $\frac{g \beta \Delta T_w l}{v_0^2}$  与雷诺数的平方相乘,便得到

$$\left( \frac{v_0 l \rho}{\eta} \right)^2 \frac{g \beta \Delta T_w l}{v_0^2} = \frac{\rho^2 g l^3 \Delta T_w \beta}{\eta^2} \quad (3.3-31)$$

这个新的无量纲参数称之为格拉晓夫数,并以  $Gr$  表示之。

(4) 在沸腾换热这样一类发生相变的多相流问题中,还应当考虑相变潜热  $H_0$  和气泡表面张力  $\sigma_0$  这两个因素,从而相应地引进两个相似准数:雅各布数  $Ja$  和韦伯数  $We$ 。

雅各布数  $Ja$  表示相同体积的液相介质所携带的热量与相变所需热量之比,定义为

$$Ja = \frac{c_p \rho_l (T_w - T_b)}{H_0 \rho_v}$$

式中  $c_p$ 、 $\rho_l$ ——液相介质的比定压热容和密度;

$T_w$ 、 $T_b$ ——气泡壁和气泡的温度;

$\rho_v$ ——蒸汽的密度。

韦伯数  $We$  表示惯性力和表面张力之比,定义为

$$We = \frac{\rho_l v_b^2 D_b}{\sigma_0}$$

式中  $v_b$ 、 $D_b$ ——气泡相对于周围流体的速度和气泡的直径。

人们还习惯用沸腾数  $Bo$  作为因变量以代替努塞耳数,定义为

$$Bo = \frac{q}{H_0 \rho_v v_0}$$

它表示热流量与相变热之比。

(5) 空化数。在水力机械、水面或水下螺旋桨推进和水翼等问题中,空化是影响性能的重要因素。根据伯努利定理,流速愈大,流体的静压愈小。当压力小至汽化压力时,液体中就会出现气泡。若以  $p_c$  表示汽化压力,这样就需要引入另一个无量纲参数,这个参数的形式取为

$$\sigma = \frac{p_0 - p_c}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2} \quad (3.3-32)$$

$\sigma$  被称为“空化数”。

## 4 流体运动的分类

前面是从比较普遍的角度出发,给出液体和气体的基本方程和初始及边界条件,并相应地引入了许多相似准数和基本函数(如  $\frac{T}{T_0} = f\left(\frac{T}{T_0}\right)$ )。实际问题往往可以进行简化处理,当然也还有更复杂的问题,例如多相流体、有化学反应的流动、有热辐射的流动、电磁流体的流动等等。这些问题可参考专门的有关书刊。

表 3.3-2 给出几种条件下的主要相似准数,表中未包括纯几何相似的准数。

## 3-16 第3篇 相似理论与模化

表 3-3-2 几种条件下的主要相似准数

条 件	相 似 准 数	备 注
1) 不可压缩流体 ( $Ma=\infty$ )	$Fr$ $Re$ $\frac{\omega l}{v_0}$ $\sigma$ $Eu$ (欧拉数) $= \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2}$	在重力波问题中且时间过程较长时才需考虑 反映粘性摩擦, 当 $Re$ 很小时为 Stokes 流动, 其次为层流运动, $Re$ 大时为湍流运动 在旋转机械中才需考虑 在有空化的情况下才需考虑 常作为因变量
2) 可压缩流体	除 $Fr, Re, \frac{\omega l}{v_0}, \sigma, \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2}$ 外还有: $Ma$ $Pr$ $Nu$	反映可压缩性效应 $Ma < 0.3$ 时可不考虑 $0.3 < Ma < 1$ 为亚声速流动 $Ma \approx 1$ 为跨声速流动, 局部出现击波 $Ma > 1$ 为超声速流动, 出现击波 $Ma \gg 1$ 为高超声速流动, 边界层对击波波后流动有强烈干扰, 这时除 $Ma$ 与 $Re$ 外, 必须考虑 $Pr$ 与 $Nu$ 另外, 当 $Ma \gg 1$ , 还需考虑电离、烧蚀和化学反应等效应 有热传导效应时才需考虑 常作为因变量
3) 自然对流换热	除 $\frac{\omega l}{v_0}, \sigma, \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2}$ 外还有: $Gr$ $Pr$ $Nu$	在有空化的情况下才考虑 $\sigma, \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2}$ 常作为因变量 对于空气而言, $Pr \approx 1$ 常作为因变量
4) 强迫对流换热	除 $Re, \frac{\omega l}{v_0}, \sigma, \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2}$ 外还有: $Pr$ $Nu$ $Ma$	在有空化的情况下才考虑 $\sigma, \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2}$ 常作为因变量 常作为因变量 只有在 $Ma > 0.3$ 时才需考虑
5) 沸腾换热	除 $Gr, Re, \frac{\omega l}{v_0}, \sigma, Eu$ 外还有: $Pr$ $Ja$ $We$ $Nu$ 或 $Bo$	在有空化的情况下才考虑 $\sigma, Eu$ 常作为因变量 常作为因变量

## 5 几个简单的典型例子

## 5.1 管流摩擦

流体通过管道的定常输送, 通常需要在流量、阻力和管形(包括截面形状和粗细)这三者之间给定两个量而求第三个量。

如果管子足够长, 长度  $l$  比截面的特征尺寸  $d$  大得多, 就可以忽略管子进出口端部对主流部分流动形态的影响, 单位长度上的压降  $\frac{\Delta p}{l}$  应该取决于截面形状(以  $d$  表征, 如果是圆管, 则取直径), 管壁的粗糙度  $k$  (以管壁的平均起伏尺寸表征), 流体的惯性(以密度  $\rho$  表征)和粘性(以动力粘度  $\eta$  表征), 以及通过截面的平均流速  $v$ , 亦即存在如下确定的函数关系, 即

$$\frac{\Delta p}{l} = f(d, k, \rho, \eta, v) \quad (3.3-33)$$

取  $d$ 、 $\rho$ 、 $v$  作为基本量，利用  $\pi$  定理，可以得到下面的无量纲参数之间的关系，即

$$\frac{\Delta p d}{\frac{1}{2} \rho v^2 l} = \Psi\left(\frac{\rho v d}{\eta}, \frac{k}{d/2}\right) \quad (3.3-34)$$

其中， $\frac{\Delta p d}{\frac{1}{2} \rho v^2 l}$  是无量纲的压力梯度，表示压降与惯性力

之比； $\frac{\rho v d}{\eta}$  是  $Re$  数，表示惯性力与粘性力之比，而  $\frac{k}{d/2}$  乃是管壁的相对粗糙度，即有

$$\frac{\Delta p d}{\frac{1}{2} \rho v^2 l} = \Psi\left(Re, \frac{k}{d/2}\right)$$

函数  $\Psi$  的形式可以由实验确定。管子的摩擦  $F$  为

$$F = \Delta p S = \frac{l}{d} S \frac{\rho v^2}{2} \Psi\left(Re, \frac{k}{d/2}\right) \quad (3.3-35)$$

式中  $S$ ——截面积。

历史上很多人对于圆管流动做了非常系统的实验，采用不同的流体、管径、流速和粗糙度，整理得到了不同相对粗糙度  $\left(\frac{k}{d/2} = 0.2\% \sim 5.0\%\right)$  情况下的

$\frac{\Delta p d}{\frac{1}{2} \rho v^2 l}$  随  $Re$  的变化曲线，参见图 3-3-1，图中记  $\frac{\Delta p d}{\frac{1}{2} \rho v^2 l}$

为  $\lambda$ 。

可以看出，量纲分析不仅大大减少了变量的数目，而且流体的种类也可以互换，用水做出的实验结果可以推广用于空气的流动。当然，空气的流速不能太大，譬如不超过空气中声速的 0.3 倍，否则还应考虑空气的可压缩性或马赫数  $Ma$  的影响。

从图 3-3-1 可以看到，实验曲线基本上分为两段，低  $Re$  数段反映层流运动，而高  $Re$  数段反映湍流运动。从层流向湍流的过渡常发生在临界雷诺数  $(Re)_c = 2000 \sim 2600$  的范围。

在  $Re < (Re)_c$  的层流段，每一质点沿管轴方向作等速直线运动，惯性力为零，因而管子的摩擦  $P$  与密度无关，这就要求式 (3.3-35) 右端的函数  $\Psi$  取  $Re$  数倒数的形式，即

$$\Psi\left(Re, \frac{k}{d/2}\right) = \frac{c\left(\frac{k}{d/2}\right)}{Re} \quad (3.3-36)$$

式中，分子中的函数  $c\left(\frac{k}{d/2}\right)$  应体现相对粗糙度的影响。实验却说明在  $\frac{k}{d/2}$  足够小的情况下  $c$  几乎是常数。

在圆管的情况， $c$  等于 64，这数值和光滑管中流动的理论结果完全一致。

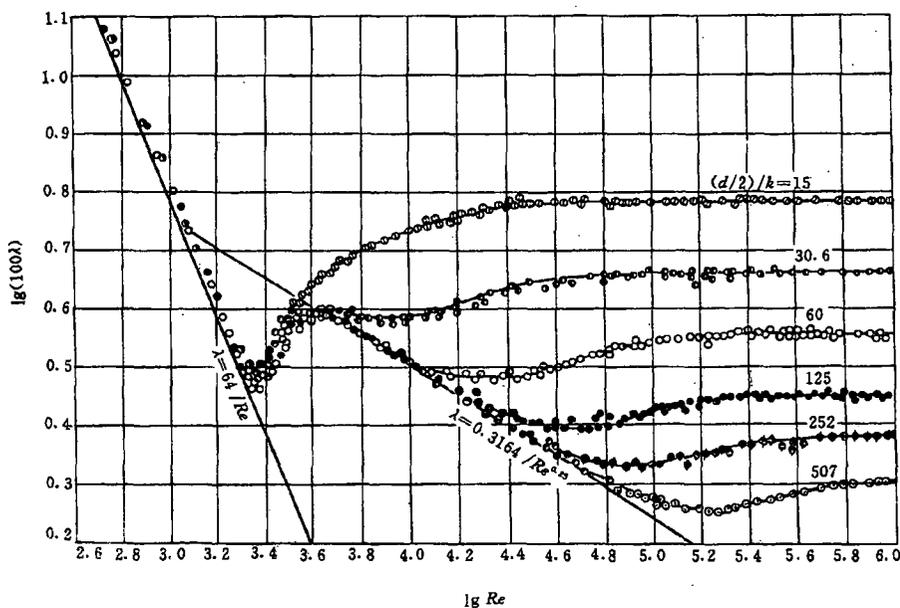


图 3-3-1 圆管的无量纲压力梯度  $\lambda$  随  $Re$  的变化曲线

(摘自参考文献 [13] 665 页)

## 3-18 第3篇 相似理论与模化

只要对  $d$  和  $l$  的定义做相应的变动, 式 (3·3-34) 亦适用于确定各种接头与阀门的压头损失。

## 5.2 旋转水力机械的比转数

对于一定型号的水力机械来说, 在给定流体密度  $\rho$ 、平均流速  $v_0$ 、特征尺寸  $l$ 、旋转角速度  $\omega$ 、动力粘度  $\eta$  和重力加速度  $g$  的条件下, 扬程  $H$  就被确定, 因此有

$$H = f(\rho, v_0, l, \omega, \eta, g) \quad (3\cdot3\cdot37)$$

根据量纲分析, 可有

$$\frac{H}{l} = f\left(\frac{\omega l}{v_0}, \frac{\rho v_0 l}{\eta}, \frac{g}{\omega^2 l}\right)$$

根据物理上的考虑,  $H$  应反比于  $g$ , 故上式可简化为

$$\frac{gH}{\omega^2 l^2} = f\left(\frac{\omega l}{v_0}, Re\right)$$

在工程问题中习惯用每分钟的转速  $n \left( = \frac{60\omega}{2\pi} \right)$  和流量  $Q (\propto l^2 v_0)$  作为物理参数。于是, 上述无量纲数可做如下置换, 即

$$\begin{aligned} \frac{gH}{\omega^2 l^2} &\rightarrow \frac{gH}{n^2 l^2} \\ \frac{\omega l}{v_0} &\rightarrow \frac{nl^3}{Q} \end{aligned}$$

同时将  $Re$  数定义为  $\frac{\rho Q}{l\eta}$

从第一和第二个无量纲数可以组成一个与水泵特征尺寸  $l$  无关的另一个无量纲数, 通常写为

$$\left(\frac{Q^{1/3}}{n^{1/3} l} \frac{nl}{(gH)^{1/2}}\right)^{3/2} = \frac{nQ^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \quad (3\cdot3\cdot38)$$

由于  $g$  是常数, 工程上用  $n_s = \frac{nQ^{1/2}}{H^{3/4}}$  以代替  $\frac{nQ^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$ , 并称之为水泵的比转数。于是在几何相似条件下, 水泵以无量纲形式表示的一切特性  $\pi$  都可表示为

$$\pi = f(n_s, Re) \quad (3\cdot3\cdot39)$$

例如, 水泵的效率  $\eta_p$  可表示为

$$\eta_p = \eta_p(n_s, Re) \quad (3\cdot3\cdot40)$$

式 (3·3-38) 和式 (3·3-39) 的优点是, 在大雷诺数情况下,  $\pi$  或  $\eta_p$  对  $Re$  的依赖关系不强, 因此  $Re$  数的影响往往可被忽略<sup>①</sup>。  $n_s$  与水泵的大小无关, 只取决于水泵的形式和运转条件。工程上, 往往取  $\eta_p = (\eta_p)_{\max}$  时的  $n_s$  值作为一种类型水泵的标志, 它不大随  $Re$  变化, 因而有

$$n_s = n_s(Re) \approx \text{常数} \quad (3\cdot3\cdot41)$$

同样, 对于水轮机来说, 令  $P$  表示功率, 也就是“出力”, 有

$$\pi = \pi\left(\frac{nP^{1/2}}{\rho^{1/2}(gH)^{5/4}}, Re\right)$$

由于水的密度  $\rho$  和  $g$  是常数, 我们就以水轮机的比转数

$$n_s = \frac{nP^{1/2}}{H^{5/4}}$$

代替前一式中的  $(nP^{1/2})/[\rho^{1/2}(gH)^{5/4}]$ 。于是在最高效率或最大出力条件下, 有

$$n_s = n_s(Re) \approx \text{常数} \quad (3\cdot3\cdot42)$$

在有空化发生的条件下, 式 (3·3-42) 应改写为

$$n_s = n_s(Re, \sigma)$$

正是由于在最高效率或最大出力条件下, 对于一种给定形式的水轮机,  $n_s$  有一定的值, 因此, 常用  $n_s$  标志水轮机的型号。这时,  $n_s$  已经不是原来意义上的无量纲准数了。例如, 轴流式水轮机在低水头时效率较高, 混流式水轮机在较高水头时效率较高, 冲击式水轮机在更高水头时效率最高。

## 5.3 船舶阻力的模拟

在船舶阻力模拟中, 通常以船长  $l$  作为特征长度。同一几何外形的船在不同的运载量下, 其排水体积  $D$  是不同的。为了研究不同排水体积对阻力的影响, 就需要引进一个新的几何参数  $\frac{l}{D^{1/3}}$ , 称为“细长比”。用  $R$  表示阻力, 就有

$$R = \rho D^{2/3} v_0^2 f\left(\frac{l}{D^{1/3}}, Fr, Re\right) \quad (3\cdot3\cdot43)$$

式中  $v_0$ ——船速。

$Fr$  反比于  $l$ ,  $Re$  正比于  $l$ , 因此在几何相似条件下不可能达到完全模拟的目的。人们有时把  $R$  分解成两项<sup>[5][14]</sup>, 第一项只与粘性有关, 第二项只与重力有关, 称为“兴波阻力”, 即

$$R = c_f(Re) \frac{\rho D^{2/3} v_0^2}{2} + c_w \left(\frac{l}{D^{1/3}}, Fr\right) \rho g D \quad (3\cdot3\cdot44)$$

一般说,  $c_f$  随  $Re$  的增加而减少。  $c_f(Re)$  的数值常利用一些半经验公式确定, 有时就采用最简单的普朗特-史列西丁公式 (平板摩擦公式)

$$c_f = \frac{0.455}{(\lg Re)^{2.58}} \quad (3\cdot3\cdot45)$$

另有一些经验公式可用以计算  $c_w$ 。  $R$  的数值当然也可以在拖引水槽中直接测定, 但因为是不能保证完全相似的缩尺模型实验, 用于原型时需作适当修正。

水力学问题和上面提到的船舶阻力问题一样, 不

① 这远不是一般性结论, 因为在大雷诺数条件下, 由于流动性质的突变 (如出现分离),  $\eta_p$  会有较大变化。

## 第3章 流体力学问题的模化 3-19

能通过简单的几何缩小达到完全的模拟, 需要进一步应用理论分析, 对  $Re$  和  $Fr$  的影响分别进行研究。

## 5.4 轴承的润滑问题

轴承的润滑问题有两种提法。作为正问题的提法是: 给定两个润滑表面的几何形状和尺寸(包括表面上可能有的微型螺旋刻槽等), 表面之间的间隙分布, 以及表面的运动速度(或相对速度), 要求决定润滑介质的运动量(速度)和物理量(压力、密度、温度)的分布, 以及由它们所导出的具有实用意义的承载能力、摩擦力矩及流量等。工程上更重要的是反问题的提法, 根据某些预先规定的关于载荷、摩擦力和力矩、流量、温度等参数方面的条件, 要求选择合宜的润滑表面的几何形状, 以及表面之间的间隙分布。

分析表明, 在润滑问题中, 润滑介质的惯性力和粘性力之比值大体上可以用相对间隙(即间隙和轴承特征尺寸之比)和雷诺数的乘积来代表。在大多数情况下, 这个乘积值大概在 0.01~0.001 之间; 也就是说, 惯性力比起粘性力来说往往小 2~3 个量级。因而, 可以忽略介质的惯性, 亦即密度不起主要作用, 只需考虑粘性力和压力之间的平衡。

不管是正问题还是反问题, 或者两者的混合, 诸物理量之间的函数联系总是相同的。决定问题的主要物理量有: 环境压力  $p_0$ 、润滑表面相对运动的特征速度  $v_0$  (或相对角速度  $\omega$ )、介质的动力粘度  $\eta$ 、轴承的特征尺寸  $l$ 、载荷  $W$ 、平均间隙  $h$  和间隙的倾角或偏心  $\alpha$  等。这七个量具有三个独立的量纲, 因而, 可以组成四个相似准数, 并形成下列函数联系, 即

$$f\left(\frac{\eta v_0}{p_0 l}, \frac{W}{p_0 l^2}, \frac{h}{l}, \alpha\right) = 0$$

或

$$f\left(\frac{\eta \omega}{p_0}, \frac{W}{p_0 l^2}, \frac{h}{l}, \alpha\right) = 0$$

可以看出, 在本问题中,  $\frac{\eta v_0}{p_0 l}$  这个量起着重要的作用。一般在气体轴承问题中, 习惯使用它和  $\left(\frac{h}{l}\right)^2$  之商来代替它, 被称为轴承数或哈里森 (Harrison) 数, 用  $\Delta$  表示之, 即

$$\Delta = \frac{\eta v_0 l}{p_0 h^2} \quad (3.3-46)$$

它表示粘性力与压力之比。

对介质内的压力、粘性应力和粘性应力矩的分布进行积分, 可得到轴承所承受的载荷  $W$ 、摩擦阻  $F$  及摩擦力矩  $M$  等。于是, 存在下面的关系式, 即

$$\frac{W}{p_0 l^2} = f_1\left(\Delta, \frac{h}{l}, \alpha\right)$$

$$\frac{F}{\eta v_0 l} = f_2\left(\Delta, \frac{h}{l}, \alpha\right)$$

$$\frac{M}{\eta v_0 l^2} = f_3\left(\Delta, \frac{h}{l}, \alpha\right)$$

如果把摩擦阻  $F$  与载荷  $W$  之比称为“摩擦系数”  $f$ , 则有

$$f = \frac{F}{W} = f_4\left(\Delta, \frac{h}{l}, \alpha\right)$$

在模化实验中, 如果保持  $\eta v_0$  不变以及几何形状(包括润滑表面上的微型螺旋槽等)相似, 而模型和实物的几何尺寸相差  $n$  倍, 各个量应该具有下表中列出的放大关系:

实物	$l$	$h$	$W$	$p_0$
模型	$nl$	$nh$	$nW$	$\frac{p_0}{n}$

最后应该说明的是

(1) 有时, 润滑表面的相对速度很大, 或者间隙很大, 以致  $\left(\frac{h}{l}\right) (Re)$  这个值接近于 0.1, 惯性力与粘性力相比已不能忽略, 就必须把雷诺数考虑进去。

(2) 在气体轴承的问题中, 一般可以认为是等温过程, 但在转速很大的情况下, 过程不再等温, 还必须考虑热传导。因此, 在函数关系中还要列入等熵指数  $\kappa$  和标志热传导的一些相似准数。

## 5.5 亚声速和超声速的薄翼绕流问题

在本章中, 前面介绍的相似模拟都是以几何相似为前提的。这里将介绍一种在特定条件下不再需要遵循几何相似条件的模化方法, 仅举薄翼绕流问题为例。

以  $l$  表示弦长,  $\epsilon$  表示翼剖面厚度的特征尺寸。在平面等熵流动的情况下, 如  $\frac{\epsilon}{l} \ll 1$ , 基本方程可以线性化

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{1 - Ma_\infty^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.3-47)$$

其中,  $\phi$  是扰动速度势函数,  $Ma_\infty$  是来流马赫数。为简化起见, 我们假设翼剖面的形状是对称的, 而且攻角等于零。我们用  $2\epsilon h(x)$  表示翼剖面的厚度,  $v_0$  表示来流速度。在线性化条件下, 在翼面上有下述边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0^+} &= v_0 \epsilon \frac{dh}{dx} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0^-} &= -v_0 \epsilon \frac{dh}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (3.3-48)$$

3-20 第3篇 相似理论与模化

翼面上的压力系数  $C_p$  为

$$C_p \equiv \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2} = - \frac{2}{v_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{y=0} \quad (3.3-49)$$

下面, 讨论亚声速, 即  $Ma_0 < 1$  的情况, 引入无量纲变数和参数

$$\left. \begin{aligned} \phi^* &= \frac{\phi}{Bv_0 l} & x^* &= \frac{x}{l} \\ y^* &= \frac{y \sqrt{1 - Ma_0^2}}{l} \end{aligned} \right\}$$

②是可以根据需要加以调整的无量纲常数。于是基本方程和边界条件可以写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^{*2}} &= 0 \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial y^*} \Big|_{y^* = -0.5} &= \pm \frac{1}{B} \frac{e}{l} \frac{1}{\sqrt{1 - Ma_0^2}} \frac{dh}{dx^*} \\ (0 \leq x^* \leq 1) \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*}, \frac{\partial \phi^*}{\partial y^*} &\rightarrow 0 \quad (x^*, y^* \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} \quad (3.3-50)$$

同时,

$$C_p = -2B \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} \Big|_{y^* = 0} \quad (0 \leq x^* \leq 1) \quad (3.3-51)$$

$C_p$  表示压力分布, 是工程上感兴趣的量。若取  $B=1$ , 从式 (3.3-51) 可知,  $C_p$  就只与  $\frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} \Big|_{y^* = 0}$  有关。从式 (3.3-50) 看出, 如果在两个亚声速问题中取

$$\frac{1}{B_1} \frac{e_1}{l_1} \frac{1}{\sqrt{1 - (Ma)_{01}^2}} = \frac{1}{B_2} \frac{e_2}{l_2} \frac{1}{\sqrt{1 - (Ma)_{02}^2}} \quad (3.3-52)$$

则  $\phi_1^*(x^*, y^*) = \phi_2^*(x^*, y^*)$ 。由式 (3.3-52) 可见, 为了使两个问题中的无量纲因变量相同, 机翼的厚度不能几何相似, 它们间的换算关系见式 (3.3-52)。特殊情况下,  $(Ma)_{02}$  可以取为零。这样, 适当地改变  $\frac{e_1}{B_1 l_1}$  与  $\frac{e_2}{B_2 l_2}$  之间的比例关系, 可以用不可压缩流体来模拟可压缩流体。

在超声速、跨声速条件下, 也有类似的模拟关系。它们的共同特点是翼厚不保持几何相似。

5.6 压气机的模型试验

压气机(特别是离心式压气机)内部的流动是复杂的三维流动, 一般都求助于模型试验来取得准确的数据。假设流动是定常、绝热、可压缩的粘性流动, 流体

的惯性、粘性和可压缩性起着关键的作用。

如果我们讨论的是几何形状相似的压气机, 那么, 有如下几方面的特性参数:

机械特性	特征长度 $D$	转速 $n$	
介质物性	等熵指数 $\kappa$	气体常数 $R$	动力粘度 $\eta$
流动参数	进口总压 $p_1^*$	进口总温 $T_1^*$	质量流量 $Q_m$
	出口总压 $p_2^*$	出口总温 $T_2^*$	
性能参数	压力比 $\frac{p_2^*}{p_1^*}$	等熵效率 $\eta_s^*$	功率 $N$

取  $D, n; \kappa, R, \eta; p_1^*, T_1^*, Q_m$  作为自变量, 那末待确定的因变量有  $p_2^*, T_2^*, \eta_s^*$  和  $N$ 。

在长度—质量—时间—温度的度量系统中, 可取  $p_1^*, T_1^*, D$  和  $R$  作为基本量。根据量纲分析, 可以形成下列无量纲量:

自变量	$\frac{nD}{\sqrt{RT_1^*}}$	$\frac{Q_m \sqrt{RT_1^*}}{D^2 p_1^*}$	$\frac{D p_1^*}{\eta \sqrt{RT_1^*}}$	$\kappa$
因变量	$\frac{p_2^*}{p_1^*}$	$\frac{T_2^* - T_1^*}{T_1^*}$	$\eta_s^*$	$\frac{N}{D^2 p_1^* \sqrt{RT_1^*}}$

于是, 存在下列关系, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_2^*}{p_1^*} &= F_1 \left[ \frac{nD}{\sqrt{RT_1^*}}, \frac{Q_m \sqrt{RT_1^*}}{D^2 p_1^*}, \frac{D p_1^*}{\eta \sqrt{RT_1^*}}, \kappa \right] \\ \frac{T_2^* - T_1^*}{T_1^*} &= F_2 \left[ \frac{nD}{\sqrt{RT_1^*}}, \frac{Q_m \sqrt{RT_1^*}}{D^2 p_1^*}, \frac{D p_1^*}{\eta \sqrt{RT_1^*}}, \kappa \right] \\ \eta_s^* &= F_3 \left[ \frac{nD}{\sqrt{RT_1^*}}, \frac{Q_m \sqrt{RT_1^*}}{D^2 p_1^*}, \frac{D p_1^*}{\eta \sqrt{RT_1^*}}, \kappa \right] \\ \frac{N}{D^2 p_1^* \sqrt{RT_1^*}} &= F_4 \left[ \frac{nD}{\sqrt{RT_1^*}}, \frac{Q_m \sqrt{RT_1^*}}{D^2 p_1^*}, \frac{D p_1^*}{\eta \sqrt{RT_1^*}}, \kappa \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.3-53)$$

函数  $F_1, F_2, F_3, F_4$  的形式可由模型试验确定, 试验要遵守几何相似、运动相似和动力相似的条件。一般很难做到完全的几何相似, 例如, 叶片、叶轮的加工精度以及相对间隙难以确保相似。运动相似和动力相似的条件是要求式 (3.3-53) 中的函数  $F_1 \sim F_4$  中四个无量纲自变量保持不变。等熵指数  $\kappa$  反映气体的热学性质, 由气体分子结构决定。对理想气体来说  $\kappa$  是常数, 而非理想气体的  $\kappa$  随温度变化。若用空气代替燃气或蒸汽, 在亚声速流动问题中误差并不大, 但在多级压气机和多级透平的情况下, 必须要求  $\kappa$  保持不变。下面,

把其他三个无量纲自变量演化到气体动力学中熟知的雷诺数和马赫数:

$$\begin{aligned}\frac{nD}{\sqrt{RT_1^*}} &= \frac{D}{\sqrt{RT_1^*}} \frac{60\omega}{2\pi} = \frac{30}{\pi} \frac{v_1}{\sqrt{RT_1^*}} \\ &= \frac{30}{\pi} \sqrt{\kappa} \frac{v_1}{\sqrt{\kappa RT_1^*}} \sqrt{\frac{T_1}{T_1^*}} \\ &= \frac{30}{\pi} \sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{T_1}{T_1^*}} (Ma)_{n1} \quad (3-3-54)\end{aligned}$$

其中,  $\omega$  是角速度,  $v_1$  和  $T_1$  为进口处旋转切向流速和温度,  $(Ma)_{n1}$  乃是进口切向马赫数。

$$\begin{aligned}\frac{Q_m \sqrt{RT_1^*}}{D^2 p_1^*} &= \frac{\pi D^2 v_1 \rho_1 \sqrt{RT_1^*}}{4 D^2 p_1^*} \\ &= \frac{\pi v_1 \rho_1 \sqrt{RT_1^*}}{4 RT_1 p_1^*} \\ &= \frac{\pi}{4} \sqrt{\kappa} \frac{v_1}{\sqrt{\kappa RT_1^*}} \frac{\rho_1}{p_1^*} \sqrt{\frac{T_1}{T_1^*}} \\ &= \frac{\pi}{4} \sqrt{\kappa} \frac{\rho_1}{p_1^*} \sqrt{\frac{T_1}{T_1^*}} Ma_1 \quad (3-3-55)\end{aligned}$$

其中,  $v_1$ ,  $\rho_1$ ,  $p_1$  和  $T_1$  分别是进口处的流速、密度、压力和温度,  $Ma_1$  乃是进口马赫数。

$$\begin{aligned}\frac{D p_1^*}{\eta \sqrt{RT_1^*}} &= \frac{D \rho_1 v_1}{\eta} \frac{1}{\rho_1 v_1} \frac{p_1^*}{\sqrt{RT_1^*}} \\ &= \frac{\rho_1 v_1 D R T_1}{\eta} \frac{p_1^*}{\rho_1 v_1 \sqrt{RT_1^*}} \\ &= \frac{\rho_1 v_1 D}{\eta} \frac{\sqrt{\kappa R T_1}}{v_1} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{p_1^*}{p_1} \sqrt{\frac{T_1}{T_1^*}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{Re_1 p_1^*}{Ma_1 p_1} \sqrt{\frac{T_1}{T_1^*}} \quad (3-3-56)\end{aligned}$$

注意到  $\frac{T_1}{T_1^*} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2$  和  $\frac{p_1}{p_1^*} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$ , 足见上述三个无量纲自变量完全与进口处的雷诺数  $Re_1$ 、马赫数  $Ma_1$  和切向马赫数  $(Ma)_{n1}$  相当。所以, 模型试验要做到几何相似和保持  $Re_1$ ,  $Ma_1$ ,  $(Ma)_{n1}$  和  $\kappa$  不变。如果  $Re_1$  超过临界值  $(Re_1)_c$ , 流动进入湍流状态的范围, 一般可近似认为压气机的无量纲特性与雷诺数无关。

### 5-7 透平叶片的定常冷却问题<sup>[15]</sup>

在透平叶片的定常冷却问题中, 燃气和冷却空气对叶片的对流换热及叶片内部的热传导起着控制作

用, 而对流换热又取决于气体的流动状态, 特别是叶片表面附近边界层内的流动状态。模型试验要做到几何相似、运动相似、动力相似以及热相似。

冷却叶片的几何相似包括冷却孔位置和形状的相似, 叶片的特征长度是  $l$ 。

运动和动力相似的主要参数除特征长度  $l$  外, 还有燃气和冷却空气在进口处的特征速度  $v_g$  和  $v_c$ , 进口处的密度  $\rho_g$  和  $\rho_c$ , 进口处的温度  $T_g$  和  $T_c$ , 气体常数  $R$ , 气体的特征粘度  $\eta_g$  和  $\eta_c$ , 以及等熵指数  $\kappa_g$  和  $\kappa_c$  (这里下标  $g$  和  $c$  各表示燃气和冷却空气)。这些参数可被组成下列无量纲参数: 速度比  $\frac{v_c}{v_g}$ , 密度比  $\frac{\rho_c}{\rho_g}$ , 雷诺数

$$(Re)_g = \frac{\rho_g v_g l}{\eta_g} \text{ 和 } (Re)_c = \frac{\rho_c v_c l}{\eta_c}, \text{ 马赫数 } Ma_g = \frac{v_g}{\sqrt{\kappa_g R T_g}}$$

和  $Ma_c = \frac{v_c}{\sqrt{\kappa_c R T_c}}$ , 还有等熵指数  $\kappa_g$  和  $\kappa_c$ 。

除了上面那些有关的参数以外, 主要的热参数还有进口处叶片的温度  $T_b$  和密度  $\rho_b$ , 燃气、冷却空气和叶片的热导率  $\lambda_g$ ,  $\lambda_c$  和  $\lambda_b$ , 以及比热容  $(c_p)_g$ ,  $(c_p)_c$  和  $c_b$ 。它们可以组成下列无量纲参数: 温度比  $\frac{T_b}{T_g}$ , 密度比  $\frac{\rho_b}{\rho_g}$ , 普朗特数  $(Pr)_g = \frac{\eta_g (c_p)_g}{\lambda_g}$  和  $(Pr)_c = \frac{\eta_c (c_p)_c}{\lambda_c}$ , 热导率之比  $\frac{\lambda_b}{\lambda_g}$ , 以及比热容比  $\frac{(c_p)_g}{R}$ ,  $\frac{(c_p)_c}{R}$  和  $\frac{c_b}{R}$ 。

可见, 在保证几何相似条件下, 冷却效率  $\epsilon$  是上述 20 个无量纲参数的函数, 即

$$\epsilon = f(l; v_g, v_c, \rho_g, \rho_c, T_g, T_c, R, \eta_g, \eta_c, \kappa_g, \kappa_c; T_b, \rho_b, \lambda_g, \lambda_c, (c_p)_g, (c_p)_c, c_b) \quad (3-3-57)$$

如果取  $l$ ,  $v_g$ ,  $\rho_g$  和  $R$  作为基本量,  $\epsilon$  将是 16 个无量纲参数的函数, 即

$$\begin{aligned}\epsilon = f\left(\frac{v_c}{v_g}, \frac{\rho_c}{\rho_g}, (Re)_g, (Re)_c, Ma_g, Ma_c, \kappa_g, \kappa_c, (Pr)_g, (Pr)_c, \frac{(c_p)_g}{R}, \frac{(c_p)_c}{R}, \frac{T_b}{T_g}, \frac{\rho_b}{\rho_g}, \frac{\lambda_b}{\lambda_g}, \frac{c_b}{R}\right) \quad (3-3-58)\end{aligned}$$

其中, 速度比常用质量流量比  $\frac{Q_c}{Q_g}$  代替。

除要求满足几何相似条件外, 保证流量比相等, 以及  $Re$  数、 $Ma$  数、 $Pr$  数和等熵指数  $\kappa$  相等是很重要的。其他的无量纲参数相等的条件往往难以做到, 幸而经验表明所引起的误差并不很大<sup>[15]</sup>。

## 第4章 固体中热传导和弹性体中热应力的模化<sup>[16][17]</sup>

在通常情况下,由于时间尺度不同,变形又小,热传导和热应力这两个问题是可以分别处理的。人们可先确定瞬态或定态温度分布,然后根据弹性静力学计算热应力。

### 1 固体中的热传导

固体中的热传导方程是

$$\rho_i c_i \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \quad (3.4-1)$$

式中  $\theta$  为温升,一般指相对于环境或者初始温度的变量;

$\rho_i(x_i)$ 、 $c_i(x_i, \theta)$  和  $\lambda_i(x_i, \theta)$  为固体的密度、比热容和热导率。

边界条件通常有两类:

$$\theta = \theta_w(x_{iw}, t) \quad (3.4-2)$$

及

$$\lambda_i \frac{\partial \theta}{\partial n} = -\alpha \theta \quad (3.4-3)$$

边界条件式(3.4-2)是指给定边界温度  $\theta_w$ , 边界条件式(3.4-3)是指给定边界上的热流平衡条件,  $\alpha$  是所谓“薄膜换热系数”或“对流换热系数”,在固体热传导问题中,  $\alpha$  常认为是给定的,或者可通过外界介质的对流换热进行计算(参见本卷第8篇第3、4章)。 $\frac{\partial}{\partial n}$  表示边界上的法向导数,其量纲是长度的倒数。初始条件常取为

$$t = 0 \quad \theta = 0 \quad (3.4-4)$$

如果初始条件是非齐次的,则必需引入新的相似准数。

令  $l$  为物体的特征长度,  $t_0$  为边界温度随时间变化的特征时间,  $\bar{\theta}_w$  为边界温度的特征量,  $\bar{\lambda}$  为特征热导率,  $\bar{\alpha}$  为特征薄膜换热系数,  $\bar{\rho}$  为特征密度,  $\bar{c}_i$  为特征比热容。

引入无量纲变量

$$\left. \begin{aligned} \theta^* &= \theta / \bar{\theta}_w \\ x_i^* &= x_i / l \\ t^* &= t / t_0 \\ \lambda_i^* &= \lambda_i / \bar{\lambda} = f(x_i^*, \theta^*) \\ \alpha^* &= \alpha / \bar{\alpha} = g(x_{iw}^*, \theta^*) \\ \theta_w / \bar{\theta}_w &= k(x_{iw}^*, t^*) \\ \rho_i^* &= \rho_i / \bar{\rho} = m(x_i^*) \\ c_i^* &= c_i / \bar{c}_i = n(x_i^*, \theta^*) \end{aligned} \right\} \quad (3.4-5)$$

于是,基本导热方程、初始条件和边界条件变为

$$m(x_i^*) n(x_i^*, \theta^*) \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{t_0 \bar{\lambda}}{\rho_i \bar{c}_i l^2} \frac{\partial}{\partial x_i^*} f(x_i^*, \theta^*) \frac{\partial \theta^*}{\partial x_i^*}$$

$$\theta^* = k(x_{iw}^*, t^*) \quad (\text{在温度被指定的边界上})$$

$$f(x_{iw}^*, \theta^*) \frac{\partial \theta^*}{\partial n^*} = -\frac{l \bar{\alpha}}{\bar{\lambda}} g(x_{iw}^*, \theta^*) \theta^*$$

$$(\text{在热流平衡的边界上})$$

$$t^* = 0 \quad \theta^* = 0$$

(3.4-6)

式中,  $\frac{\partial}{\partial n^*}$  等于  $l \frac{\partial}{\partial n}$ 。由式(3.4-6)可见,实物与模型间的相似条件为

(1) 相似准数  $\frac{t_0 \bar{\lambda}}{\rho_i \bar{c}_i l^2}$  (傅里叶数) 和  $\frac{l \bar{\alpha}}{\bar{\lambda}}$  (比奥数) 分别相等。

(2) 反映材料导热性质的函数  $m(x_i^*) n(x_i^*, \theta^*)$  和  $f(x_i^*, \theta^*)$  分别相等。如果材料是均匀的,而且其性质又不随温度变化而变化,则  $m(x_i^*) n(x_i^*, \theta^*) = f(x_i^*, \theta^*) = 1$ 。

(3)  $k(x_{iw}^*, t^*)$  和  $g(x_{iw}^*, \theta^*)$  分别相等。

### 2 弹性体中的热应力

弹性体中的应力分布达到静态所需要的时间的数量级约为  $l \sqrt{\frac{E}{\rho_i}}$ 。根据式(3.4-6)的第一式,热传导使温度发生较显著变化所需要的特征时间的数量级约为  $\frac{\rho_i c_i l^2}{\lambda_i}$ 。不难看出,通常有

$$\left( l \sqrt{\frac{E}{\rho_i}} \right) / \left( \frac{\rho_i c_i l^2}{\lambda_i} \right) \ll 1 \quad (3.4-7)$$

## 第5章 固体和流体耦合运动的模化 3-23

例如,对于钢而言,如取  $l=100\text{cm}$ ,则

$$\left( l / \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right) / \left( \frac{\rho_c l^2}{\lambda} \right) \approx \frac{1}{100} \times \frac{1}{5 \times 10^5} \\ \times \frac{48.5 \times 0.24}{7.8 \times 0.12} \approx \frac{1}{40} \times 10^{-7}$$

这无疑是个非常小的量。因此,只有在极端情况下(例如在高强度脉冲激光作用下),才需要考虑传热所引起的动力效应(惯性力效应)。

在弹性力学中,温度影响只表现在应力-应变关系中,即

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \beta \theta \right) + G \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ = \lambda \delta_{ij} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \beta \bar{\theta}_w \theta^* \right) + G \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.4-8)$$

$$\text{式中 } \lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$\beta$ ——体[膨]胀系数。

于是,热应力的表示式可写为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_i, t, \lambda, G, \lambda \beta \bar{\theta}_w) \quad (3.4-9)$$

显然,在弹性变形小的条件下,  $\sigma_{ij}$  应正比于  $\bar{\theta}_w$ , 如无其他载荷,并且几何约束条件为  $u_i(x_{iw}, t) = 0$ , 由式(3.4-9)可以得到,弹性体中的最大热应力为

$$\sigma_{ij}^* = \lambda \beta \bar{\theta}_w f(\mu) \quad (3.4-10)$$

因此,只要满足几何相似、泊松比相同、温度分布相似,则在几何相似各对应点上,在相同的无量纲时刻  $t^*$ ,

$\frac{\sigma_{ij}^*}{\lambda \beta \bar{\theta}_w}$  势必具有同样的数值。

## 第5章 固体和流体耦合运动的模化

### 1 水击效应

压力水管中由于阀门的突然关闭、水源的故障等原因,使液体的流速发生急剧变化而相应地引起压力的急剧变化,从而产生沿水管传播的压力波,人们称之为水击效应(参见本卷第7篇第6章4节)。

压力变化同时引起水的体积变化和管子的弹性变形,两种变形的互相耦合,决定水击波的传播,也决定压力变化的幅值,后者标志水击的强度,是工程设计的重要参数。很明显,水击波波头上的压力变化  $\Delta p$ , 将首先取决于流速的突变值  $\Delta v$ , 还与水和水管的材料特性及几何特性有关,包括:水的密度  $\rho$ 、体积模量  $K$ 、水管的直径  $D$ 、壁厚  $\delta$ , 以及水管材料的密度  $\rho'$ 、弹性模量  $E$  和泊松比  $\mu$ 。于是,存在下列函数关系,即

$$\Delta p = f(\Delta v, \rho, K, D, \delta, \rho', E, \mu) \quad (3.5-1)$$

利用  $\pi$  定理,取  $\Delta v, \rho, D$  作为基本量,可以得到无量纲量之间的函数关系为

$$\frac{\Delta p}{\rho(\Delta v)^2} = f\left(\sqrt{\frac{K}{\rho}} / \Delta v, \frac{\delta}{D}, \frac{\rho'}{\rho}, \sqrt{\frac{E}{\rho}} / \Delta v, \mu\right)$$

或

$$\frac{\Delta p}{\rho(\Delta v)^2} = f\left(\sqrt{\frac{K}{\rho}} / \Delta v, \frac{\delta}{D}, \frac{\rho'}{\rho}, \frac{E}{K}, \mu\right)$$

一般来说,水击发生在小变形的情况。因此,线性

律是适用的,  $\Delta p$  应和  $\Delta v$  成正比。上式中的函数关系可以简化成为

$$\frac{\Delta p}{\rho(\Delta v)^2} = \left( \sqrt{\frac{K}{\rho}} / \Delta v \right) f\left( \frac{\delta}{D}, \frac{\rho'}{\rho}, \frac{E}{K}, \mu \right)$$

即

$$\Delta p = \rho \sqrt{\frac{K}{\rho}} \Delta v f\left( \frac{\delta}{D}, \frac{\rho'}{\rho}, \frac{E}{K}, \mu \right) \quad (3.5-2)$$

如果管子的变形完全可以忽略,人们早就知道在这类刚性水管中,水中压力波的传播规律是

$$\Delta p = \rho \sqrt{\frac{K}{\rho}} \Delta v$$

可见,式(3.5-2)中函数  $f$  的数值接近于 1。

下面,按照相对壁厚  $\frac{\delta}{D}$  的大小讨论工程中常见的两类情况。

(1) 假如  $\frac{\delta}{D}$  不大,水管可看作是轴对称的旋成薄壳,其变形由薄膜拉伸和薄壳弯曲所合成。标志薄膜拉伸的材料特性是抗拉刚度  $E\delta$ , 标志薄壳弯曲的材料特性是抗弯刚度  $\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ 。此外,标志水管和水的惯性分别是  $\rho'\delta$  和  $\rho D$ 。式(3.5-2)中函数  $f$  中的变量可以根据变形的物理本质进行组合,从而得

$$\Delta p = \rho \sqrt{\frac{K}{\rho}} \Delta v f\left( \frac{\rho'\delta}{\rho D}, \frac{E\delta}{KD}, \frac{E\delta^3}{(1-\mu^2)KD^3}, \mu \right) \quad (3.5-3)$$

3-24 第3篇 相似理论与模化

这又存在两种可能。

1) 如果  $\frac{\delta}{D}$  很小, 变形主要由薄膜拉伸决定而可忽略弯曲变形, 便有

$$\Delta p = \rho \sqrt{\frac{K}{\rho}} \Delta v f\left(\frac{\rho' \delta}{\rho D}, \frac{E \delta}{K D}, \mu\right) \quad (3.5-4)$$

2) 如果  $\frac{\delta}{D}$  较大, 以致变形主要由弯曲决定, 那末有

$$\Delta p = \rho \sqrt{\frac{K}{\rho}} \Delta v f\left(\frac{\rho' \delta}{\rho D}, \frac{E \delta^3}{(1-\mu^2) K D^3}, \mu\right) \quad (3.5-5)$$

(2) 假如壁厚非常大, 例如, 岩石中的输水渠道, 则传入厚壁的应力波到达自由表面后的反射效应可被

忽略, 且可证明声阻抗之比  $\frac{\rho' \sqrt{\frac{E}{\rho'}}}{\rho \sqrt{\frac{K}{\rho}}}$  或其平方  $\frac{E \rho'}{K \rho}$  和  $\mu$

应是决定因素。当阀门突然关闭时, 它所受到的最大水击压力  $(\Delta p)_{\max}$  和岩石中的最大应力  $\sigma_{\max}$  各为

$$\left. \begin{aligned} (\Delta p)_{\max} &= \rho \sqrt{\frac{K}{\rho}} \Delta v f\left(\frac{E \rho'}{K \rho}, \mu\right) \\ \sigma_{\max} &= \rho \sqrt{\frac{K}{\rho}} \Delta v g\left(\frac{E \rho'}{K \rho}, \mu\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.5-6)$$

上述水击分析所得到的各类情况的表达式[式(3.5-2)~式(3.5-6)]中函数  $f$  或  $g$  的具体形式可以由模型试验或理论分析来确定。

2 弹性流体动力润滑

在本篇第3章5节中已讨论过轴承的润滑问题, 不过所讨论的仅限于轻载荷的情况, 载荷通过粘性流体薄层的缓冲, 有效地避免了摩擦面的直接接触。如果载荷较重, 流体层在局部地区减薄到与摩擦表面不规则起伏尺寸相当的程度, 局部高压破坏了润滑流体薄膜, 就可能发生表面接触, 并因固体表层内产生高的接触应力而造成表面磨损。下面讨论圆柱面与平面之间和圆球面与平面之间的摩擦和润滑两类最简单的二维典型问题。

在轻载荷的情况, 可不考虑固体的变形, 润滑流体的最小膜厚  $h$  与柱或球的半径  $R$ 、摩擦面的相对运动速度  $v$ 、流体的动力粘度  $\eta$ , 以及载荷  $P$  有关, 即

$$h = f(R, v, P, \eta) \quad (3.5-7)$$

根据量纲分析, 可以得到无量纲的最小膜厚  $\frac{h}{R}$  的表达式为

$$\frac{h}{R} = f\left(\frac{\eta v R}{P}\right) \quad (3.5-8)$$

这里, 参数  $\frac{\eta v R}{P}$  代表粘性力和载荷的比值。

在重载荷的情况下, 除了考虑流体粘性随压力变化的因素外, 还应考虑固体在高压下的变形。流体的动力粘度  $\eta$  可用压力  $p$  的指数函数表示, 即  $\eta = \eta_0 e^{ap}$ , 其中  $\eta_0$  是常压下的动力粘度, 而  $a$  是压力系数, 其量纲是压力量纲的倒数。固体的弹性则由弹性模量  $E$  和泊松比  $\mu$  代表。于是, 最小膜厚及其无量纲量有如下的函数关系, 即

$$h = f(R, v, P, \eta_0, a, E, \mu) \quad (3.5-9)$$

$$\frac{h}{R} = f\left(\frac{P}{ER^2}, \frac{\eta_0 v}{ER}, aE, \mu\right) \quad (3.5-10)$$

这里,  $\frac{P}{ER^2}$  代表载荷和弹性力之比,  $\frac{\eta_0 v}{ER}$  代表粘性力和弹性力之比,  $aE$  表示粘性随压力的影响。式(3.5-10)中函数  $f$  的形式可由模型试验确定, 一般可归纳成幂次经验式, 即

$$\frac{h}{R} = c(\mu) (aE)^\alpha \left(\frac{\eta_0 v}{ER}\right)^\beta \left(\frac{P}{ER^2}\right)^\gamma \quad (3.5-11)$$

其中, 幂次值  $\alpha, \beta, \gamma$  和随泊松比  $\mu$  变化的系数  $c(\mu)$ , 由试验数据拟合确定。这时还应考虑流体的可压缩性, 可用体积模量表征, 则又多一个无量纲参数  $Ka$ , 若模型试验中不改变流体品种,  $Ka$  也就保持不变。

3 颤振问题

水流或气流流过机翼或容器时, 有时会诱发强烈的振动, 其原因是流体与弹性体的运动互相耦合, 在一定条件下, 后者从流体中不断摄取能量, 以致振幅很大, 弹性体的这类振动称为“颤振”。在这类问题中, 流体的可压缩性和粘性有时并不重要。下面以机翼为例, 说明模拟这类颤振现象的原则。

以弹性模量和惯性矩的乘积  $EI$  表示机翼的特征抗弯刚度, 以切变模量和极惯性矩的乘积  $GI_p$  表示它的特征抗扭刚度,  $l$  表示翼展,  $c_s$  表示特征弦长,  $m$  表示单位长度机翼的特征质量,  $J_m$  表示单位长度机翼的特征转动惯量, 并以  $\alpha$  表示特征攻角,  $\rho_0$  表示来流的密度。在这些条件下, 多大的来流速度能够使机翼发生颤振呢? 如果用  $v_c$  表示这样的临界来流速度。显然

$$v_c = f(EI, GI_p, l, c_s, m, J_m, \rho_0, \alpha) \quad (3.5-12)$$

由于

$$[v_c] = \frac{L}{T} \quad [EI] = \frac{ML^3}{T^2} \quad [GI_p] = \frac{ML^3}{T^2}$$

$$[l] = L \quad [c_s] = L \quad [m] = \frac{M}{L}$$

$$[\rho_0] = \frac{M}{L^3} \quad [\alpha] = M^{\circ}T^{\circ}L^{\circ} \quad [J_m] = ML$$

$v_{cr}$  可表示为

$$\frac{v_{cr}}{\frac{1}{l} \sqrt{\frac{EI}{m}}} = f\left(\frac{EI}{GI_p}, \frac{c_A}{l}, \frac{\rho_0 c_A^2}{m}, \frac{J_m}{m c_A^2}, \alpha\right) \quad (3.5-13)$$

$\alpha$  和  $\frac{c_A}{l}$  具有明显的几何意义,  $\frac{EI}{GI_p}$  则反映抗弯刚度与抗扭刚度之比,  $\frac{\rho_0 c_A^2}{m}$  反映流体的所谓附连质量与机翼质量之比,  $\frac{J_m}{m c_A^2}$  反映机翼剖面上的质量分布。

#### 4 轴承的油膜振动和换热器的气激振动

再举两个流固耦合振动的例子如下:

(1) 轴承的油膜振动。当承载的转轴在轴承中转动时, 轴心会绕轴承中心作涡动, 其方向与轴的转动方向相同。涡动角速度取决于所受载荷和润滑油的粘性。此外, 承载转轴在转动过程中会产生弯曲振动, 其自振频率取决于转轴的惯性和刚度。当涡动角速度  $\Omega$  等于转轴的第一临界转速  $\omega_{cr}$  的一半时, 便发生“共振”现象, 称之为油膜振动。

转轴的涡动角速度  $\Omega$  与轴承的几何形状, 即轴径  $D_1$ 、轴承内径  $D_2$  和轴长  $l$ , 载荷  $P$ 、转轴的角速度  $\omega_0$  和润滑油的动力粘度  $\eta$  有关, 即

$$\Omega = f(D_1, D_2, l, P, \omega_0, \eta) \quad (3.5-14)$$

应用  $\pi$  定理, 取  $l$ 、 $\omega_0$  和  $\eta$  作为基本量, 可得

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = f\left(\frac{D_1}{l}, \frac{D_2}{l}, \frac{P}{\eta \omega_0 l^2}\right) \quad (3.5-15)$$

转轴的第一临界转速  $\omega_{cr}$  与轴长  $l$ 、质量  $M$  和刚度  $EI$  有关 ( $E$ —弹性模量,  $I$ —截面惯性矩), 或

$$\omega_{cr} = g(l, EI, M) \quad (3.5-16)$$

由此可得很简单的无量纲量关系式

$$\omega_{cr} \sqrt{\frac{EI}{MI^3}} = \lambda \quad (3.5-17)$$

其中, 无量纲常数  $\lambda$  的数值, 由转轴两端的固定方式决定。

利用油膜振动的条件  $\Omega = \frac{1}{2} \omega_{cr}$ , 把上面两个无量纲量关系式 (3.5-15) 和式 (3.5-17) 结合起来, 可知转轴的临界旋转角速度 ( $\omega_0$ )<sub>cr</sub> 满足下面的无量纲量关系式, 即

$$\frac{(\omega_0)_{cr}}{\sqrt{\frac{EI}{MI^3}}} = F\left(\frac{D_1}{l}, \frac{D_2}{l}, \frac{P^2 M}{\eta^2 EI l}\right) \quad (3.5-18)$$

函数  $F$  中的无量纲参数  $\frac{P^2 M}{\eta^2 EI l}$  表示载荷、流体粘性和转动刚度三者间的相互比值,  $F$  的形式可由模型试验决定。

(2) 热交换器的气激振动。当气流流过热交换器内的管束时, 产生交替脱落的卡门 (Kármán) 涡列, 其频率  $f_K$  取决于管束排列的几何形状 (管径  $d$ 、纵向间距  $l$ 、横向间距  $s$ )、流速  $v$ , 以及气体的密度  $\rho$  和动力粘度  $\eta$ , 即

$$f_K = f(d, l, s, v, \rho, \eta) \quad (3.5-19)$$

根据量纲分析, 可以得到下列无量纲量关系式, 即

$$\frac{f_K d}{v} = f\left(\frac{l}{d}, \frac{s}{d}, \frac{\rho v d}{\eta}\right) \quad (3.5-20)$$

当雷诺数  $\frac{\rho v d}{\eta}$  超过大约 800, 气流变成湍流状态, 式 (3.5-20) 中函数  $f$  几乎与雷诺数无关。对于一定形状的管束, 即  $\frac{l}{d}$  和  $\frac{s}{d}$  等于某组常数时,  $\frac{f_K d}{v}$  近似等于常数  $c$ , 其值由模型试验决定。于是得到

$$f_K = c \frac{v}{d} \quad (3.5-21)$$

如果涡列频率  $f_K$  与热交换器的气室的固有频率  $f_c$  接近, 将产生强烈噪声; 如与结构的自振频率  $f$  接近, 将产生强烈的结构振动。设计时, 要将  $f_K$ 、 $f_c$ 、 $f$  三者分开, 避免共振。

#### 5 爆炸加工

爆炸加工是采用炸药作能源, 把金属毛坯加工成形或焊接在一起的加工工艺。这类加工均涉及流体和固体运动的耦合, 加之几何形状一般也很复杂, 常用模型试验来确定工艺参数。

##### 5.1 爆炸成形

爆炸成形采用炸药作能源, 常用水作传压介质。炸药起爆后, 击波在水中传播, 入射到金属毛坯, 并使毛坯迅速变形; 反过来, 毛坯的变形向水中反射稀疏波, 使水卸压和加速。而过分的稀疏会在水中产生空化, 并由此而产生毛坯的所谓“二次加速”。最后, 毛坯在塑性变形的阻力作用下开始减速。当毛坯与模具相碰以后, 停止变形。炸药的特性以质量  $M_0$ 、装药密度  $\rho_0$  和爆速  $D$  表征, 爆炸后的产物当作多方气体, 其多方指数为  $\kappa$ 。水是压缩介质, 表征其特性的有初始密度  $\rho_w$ 、声速  $c$ 、等效多方指数  $n$  和空化压力  $p_c$ 。金属毛坯则可当作刚塑性材料, 用密度  $\rho$ 、屈服应力  $\sigma_s$  和特征长度  $l$  与厚度  $\delta$  来表征。模具可以假设是刚性的, 特征尺寸除  $l$  以外, 还有控制变形的尺寸 (或称变形量)  $\eta$ 。在

## 3-26 第3篇 相似理论与模化

有模成形的情况,一般是给定变形量 $\eta$ 而求药量 $M_e$ 。现将上述特征量列于下表:

药	$M_e$	$\rho_e$	$D$	$\kappa$
水	$\rho_w$	$c$	$n$	$p_c$
坯	$l$	$\delta$	$\rho$	$\sigma_s$
模	$\eta$			

于是,药量 $M_e$ 可被表达为

$$M_e = f(\rho_e, D, \kappa; \rho_w, c, n, p_c; l, \delta, \rho, \sigma_s; \eta) \quad (3.5-22)$$

利用 $\pi$ 定理,取 $\rho_e, l, \sigma_s$ 作为三个基本量,可得无量纲量关系式

$$\frac{M_e}{\rho_e l^3} = f\left(\frac{\rho_w D^2}{\sigma_s}, \kappa; \frac{\rho_w}{\rho_e}, \frac{\rho_c^2}{\sigma_s}, n, \frac{p_c}{\sigma_s}, \frac{\delta}{l}, \frac{\rho}{\rho_e}, \frac{\eta}{l}\right) \quad (3.5-23)$$

如果在模型试验中,炸药、传压介质和毛坯材料的品种保持与实物所用品种一样,那末式(3.5-23)中的函数 $f$ 中九个无量纲参数中有七个是不变的,它们是

$$\frac{\rho_w D^2}{\sigma_s}, \kappa, \frac{\rho_w}{\rho_e}, \frac{\rho_c^2}{\sigma_s}, n, \frac{p_c}{\sigma_s}, \frac{\rho}{\rho_e}$$

而 $\frac{M_e}{\rho_e}$ 可以理解为炸药的特征长度 $l_e$ 的立方,即将无量纲药量用 $\left(\frac{l_e}{l}\right)^3$ 表示,因而存在下面纯几何量之间的关系式

$$\frac{l_e}{l} = f\left(\frac{\delta}{l}, \frac{\eta}{l}\right) \quad (3.5-24)$$

这就说明,在炸药、传压介质和毛坯材料不改变的情况下,模型试验只需遵守几何相似的条件。由模型试验决定式(3.5-24)中函数 $f$ 的形式后,在 $\frac{l_e}{l}, \frac{\delta}{l}, \frac{\eta}{l}$ 三个量中,任意给出两个量便可求出第三个量,这就是爆炸成形的几何相似律。

这里还存在一种更简单的相似律,被称为能量准则,可应用于薄壳、薄板的成形。这个准则不要求严格遵守几何相似条件,而允许对毛坯厚度放松要求,即不要求模型和实物的 $\frac{\delta}{l}$ 值取同一数值。设薄坯变形的平均应变为 $\bar{\epsilon}$ ,则薄坯变形可用 $\sigma_s \bar{\epsilon} \delta l^2$ 表征。如以爆速的平方表征单位质量炸药的能,那末炸药能量可用 $M_e D^2$ 表征。试验表明,在炸药、传压介质和毛坯材料的品种不变,以及在几何形状方面除开厚度而要满足展延面上几何相似的情况下,能量利用率 $\frac{M_e D^2}{\sigma_s \bar{\epsilon} \delta l^2}$ 可以认为等于常数 $k$ ,即

$$\frac{M_e D^2}{\sigma_s \bar{\epsilon} \delta l^2} = k \quad (3.5-25)$$

因为平均应变 $\bar{\epsilon}$ 对于一个确定的模具形状来说,总可

以表示为相对变形量 $\frac{\eta}{l}$ 的函数,上式也可写成

$$\frac{\eta}{l} = f\left(\frac{M_e D^2}{\sigma_s \delta l^2}\right) \quad (3.5-26)$$

在有模成形的过程中, $\frac{\eta}{l}$ 是预先给定的,于是有

$$\frac{M_e D^2}{\sigma_s \delta l^2} = k_1 \quad (3.5-27)$$

式(3.5-26)中函数 $f$ 的形式,或式(3.5-27)中常数 $k_1$ 的大小,可在模型试验中确定。因为只有一个相似参数 $\frac{M_e D^2}{\sigma_s \delta l^2}$ ,若知道了多种坯料的 $\sigma_s$ ,在采用相同品种的炸药和传压介质的条件下,只要对一种坯料、一种模具尺寸 $l$ 、一种坯料厚度 $\delta$ 做试验就行。

## 5.2 爆炸复合

爆炸复合或爆炸焊接是利用爆炸产生的高压把两块金属复合或焊接在一起的工艺。这里以板-板复合为例进行分析。通常将炸药直接铺在一块板材(称为复板)的表面,在平行隔开一定间距处放置另一板材(称为基板)。炸药引爆后,复板以每秒几百米的速度撞击基板,在撞击线附近造成局部约达10GPa的高压,界面附近的部分材料在高压下形成射流以高速喷离母材,露出新的洁净表面。新表面在高压下形成复板和基板间的冶金结合。结合界面通常呈波纹状。大量试验表明:形成射流以及在新表面间形成小波幅的波状结合界面是复合或焊接成功的标志。因此,用模型试验确定界面波纹形状是合理设计的重要依据。

由于主要过程是在高压下进行的,所以金属可视为同时具有可压缩流体性质和塑性固体性质的流体弹性体。金属板材的特征参数是厚度 $\delta$ 、密度 $\rho$ 、声速 $c$ 、相当于多方指数的纯数 $n$ 和动态屈服应力 $\sigma_s$ 。炸药的特性参数是厚度 $\delta_e$ 、密度 $\rho_e$ 、爆速 $D$ 和多方指数 $\kappa$ 。此外,两板间的间隙 $s$ 也是一个参数。于是界面的波长 $\lambda$ 或波幅 $a$ 将是上述诸参数的函数,即

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= f_\lambda(\delta_e, \rho_e, D, \kappa; \delta, \rho, c, n, \sigma_s; s) \\ a &= f_a(\delta_e, \rho_e, D, \kappa; \delta, \rho, c, n, \sigma_s; s) \end{aligned} \right\} \quad (3.5-28)$$

这里假设复板和基板的材料和厚度均相同。如果不同,可作类似的分析,不过再加一个板厚。

取 $\delta, \rho, \sigma_s$ 作为三个基本量,可得下面的无量纲量之间的关系式,即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\delta} &= F_\lambda\left(\frac{\delta_e}{\delta}, \frac{\rho_e}{\rho}, \frac{\rho_e D^2}{\sigma_s}, \kappa, \frac{\rho c^2}{\sigma_s}, n, \frac{s}{\delta}\right) \\ \frac{a}{\delta} &= F_a\left(\frac{\delta_e}{\delta}, \frac{\rho_e}{\rho}, \frac{\rho_e D^2}{\sigma_s}, \kappa, \frac{\rho c^2}{\sigma_s}, n, \frac{s}{\delta}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.5-29)$$

其中  $\frac{\delta_1}{\delta}$  和  $\frac{\rho_1}{\rho}$  的乘积是单位面积上药量和板材的质量比, 可用以决定复板和基板间的撞击速度;  $\frac{\rho_1 D^2}{\sigma_1}$  表示爆炸压力和屈服应力之比;  $\frac{\rho_1 c^2}{\sigma_1}$  表示金属的可压缩性与强度性质之比, 在撞击速度和压力很高的情况下才起作用。

如果模型和实物均用相同品种的炸药和金属板材, 那末函数  $F_1$  和  $F_0$  中七个参数中有五个是常数, 即  $\frac{\rho_1}{\rho}$ ,  $\frac{\rho_1 D^2}{\sigma_1}$ ,  $\kappa$ ,  $\frac{\rho_1 c^2}{\sigma_1}$ ,  $n$  等于常数, 可得下面的简化关系,

即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\delta} &= G_1 \left( \frac{\delta_1}{\delta}, \frac{s}{\delta} \right) \\ \frac{a}{\delta} &= G_2 \left( \frac{\delta_1}{\delta}, \frac{s}{\delta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-5-30)$$

这说明爆炸复合也满足几何相似律。在模型试验中, 调节不同的  $\frac{\delta_1}{\delta}$  和  $\frac{s}{\delta}$ , 便可得到不同形状的复合或焊接界面, 结合对复合或焊接质量的考查, 形成设计所需的基础资料。

## 第6章 数学模拟和规整化

### 1 数学模拟

本篇前几章所介绍的都是“物理模拟”, 即基本现象相同情况下的模拟。

另外, 还有一种模拟方法称为“数学模拟”。这种模拟关系可存在于具有相同数学描述的不同物理现象之间。本节列举少数实例, 目的在于介绍数学模拟的基本原理。

#### 1.1 有限自由度振动体系与电学网络间的模拟

模拟方法之一是将电感  $L$  比做质量  $m$ , 电阻  $R$  比做阻尼  $c$ , 电容  $c$  比做弹簧  $k$ , 外加电压  $E$  比做外力  $F$ , 电荷  $q$  比做位移  $x$ 。

图 3-6-1 表示可用  $L$ - $R$ - $C$  串联电路来模拟一个单自由度的振动系统。

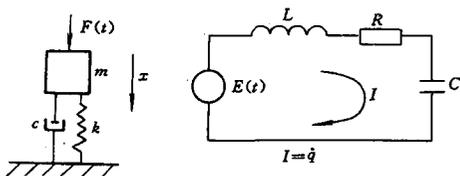


图 3-6-1 单自由度振动系统的电模拟

这个机械系统的运动方程和初始条件是

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= F(t) \\ = 0, \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3-6-1)$$

而电路的方程和初始条件是

$$\left. \begin{aligned} L\dot{q} + Rq + q/C &= E(t) \\ t = 0, \begin{cases} q = q_0 \\ \dot{q} = \dot{q}_0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3-6-2)$$

显然, 式 (3-6-1) 与式 (3-6-2) 中的各种物理量、初始条件和电压作用的时间常数形成适当的无量纲变数和参数, 就能使  $x(t)$  与  $q(t)$  在相对应的时间间隔内完全成比例地变化, 因而测量诸电量就能换算得到位移、速度等力学量。

这一模拟原则不限于单自由度系统, 也不限于线性系统。固体介质的动力学问题用差分法, 可以化为有限自由度的振动系统, 因而也可以用电路来模拟。这种电路系统, 当其适应性很强时, 就成为通常的“模拟计算机”。

#### 1.2 电解槽模拟

许多力学和热传导问题, 可以归结为拉普拉斯方程, 如不可压缩无粘性流体的运动、柱状弹性杆的自由扭转、薄膜变形等等。在电解槽中, 各点的电势也满足拉普拉斯方程。因此, 可以用电解槽来模拟上述问题。当然, 除了满足几何相似条件外, 还需要根据不同情况满足必要的边界条件。

### 2 规整化

量纲分析另一个重要应用, 称为规整化, 英文称作 Scaling 或 Normalization。它是简化问题的一个十分有效的手段, 对于模型试验也有指导意义<sup>[16],[2]</sup>。

在本篇第 1 章中已经指出, 某些  $\pi_i$  的影响在一定

## 3-28 第3篇 相似理论与模化

条件下可以忽略不计,但也同时指出过,所提出的那种直观判断并非总是可靠的。

如果有了描述一个物理过程的微分方程,就可以用量纲分析的方法,把方程式以及边界和初始条件无量纲化,从而严格地得到相应的无量纲准数。当某些无量纲项相对于等式中其他项量级很小时,就可被恰当地忽略掉。应当注意的是,当某些无量纲准数很小时,一般说,不能随便把那些与小准数相乘的项忽略掉,因为与这些小准数相乘的导数虽说也是无量纲的,其数值却不一定小,以致乘积值并不小。

规整化的目的是在深入分析物理问题的基础上,选择合适的特征量,在数学表述(微分方程和定解条件)中,让方程中诸导数的数值保持量级为1(例如数值在0.3~3之间)。考察诸方程中各项的量级,应保留量级等于或大于1的项,而允许忽略那些在导数前以量级远小于1的无量纲准数作为因子的项。将这一分析结果应用于模型试验,便知道可以忽略哪些 $\pi_i$ ;也可应用于求解析解,使方程简化到可解的程度,而又能充分反映问题的物理实质。

下面举例说明规整化的原理和应用,更详细的介绍可参见参考文献[17]和[2]。

## 2.1 已知函数的规整化

设速度 $w$ 是 $x$ 的已知函数

$$w = F(x) \quad (0 \leq x \leq x_0) \quad (3.6-3)$$

它反映一个物理关系,所以函数 $F$ 中必然包含一些能使这个关系无量纲化的物理常数。上式故意未列出这些常数,目的是要从 $F(x)$ 本身找出衡量 $w$ 及其导数的内在尺度。

设函数已知,如图3.6-2所示。则由图可见,可以用最大绝对值 $|w_m|$ 作为衡量 $w$ 的自然尺度。于是, $w$ 可按下式无量纲化

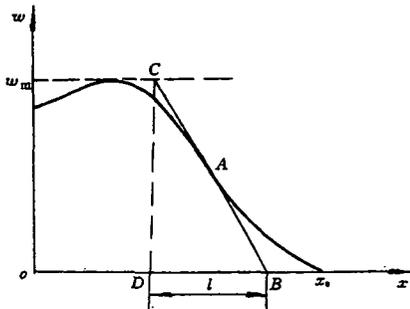


图 3.6-2 函数及其内在尺度

$$w^* = \frac{w}{|w_m|} \quad (3.6-4)$$

这样就能保证在函数的定义域内 $|w^*| \leq 1$ 。根据同样的原则,可以从图上求得将 $x$ 无量纲化的自然尺度。设 $A$ 点是曲线 $w = F(x)$ 斜率绝对值最大的位置, $A$ 点的切线与 $x$ 轴相交于 $B$ ,与 $w = w_m$ 相交于 $C$ 。 $CB$ 在 $x$ 轴上的投影是 $DB$ ,令 $l = DB$ 。于是

$$\frac{dw}{dx} = \frac{|w_m|}{l} \frac{dw^*}{dx^*} \quad (3.6-5)$$

式中

$$x^* = \frac{x}{l}$$

$$l = \left| \frac{dw}{dx} \right|_m \quad (3.6-6)$$

$\left| \frac{dw}{dx} \right|_m$ 是定义域内 $\frac{dw}{dx}$ 的最大绝对值。按照式(3.6-6)的取法,有

$$\left| \frac{dw^*}{dx^*} \right| \leq 1 \quad (3.6-7)$$

如果在我们所讨论的问题中,还遇到直至 $n$ 阶的导数,则可找出它们的最大绝对值 $\left| \frac{d^s w}{dx^s} \right|_m$  ( $1 \leq s \leq n$ ),并按以下方式选定 $l$ :

$$l = \min \left[ \left| \frac{w_m}{\frac{dw}{dx}} \right|_m, \left[ \left| \frac{w_m}{\frac{d^2 w}{dx^2}} \right|_m \right]^{\frac{1}{2}}, \dots, \left[ \left| \frac{w_m}{\frac{d^n w}{dx^n}} \right|_m \right]^{\frac{1}{n}} \right] \quad (3.6-8)$$

这里, $\min(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 表示取 $y_i$ 中的最小值。当 $l$ 按上述条件选定后,显然 $w^*$ 的各阶导数都满足

$$\left\{ \left| \frac{d^s w^*}{dx^{s*}} \right| = \frac{l^s}{|w_m|} \left| \frac{d^s w}{dx^s} \right| \leq \frac{l^s}{|w_m|} \left| \frac{d^s w}{dx^s} \right|_m \leq 1 \right\} \quad (3.6-9)$$

$$1 \leq s \leq n$$

因此,按照上述法则,我们能从已知函数 $w = F(x)$ ,求出特征(自然)尺度 $|w_m|$ 和 $l$ ,并保证 $w^*$  ( $= \frac{w}{|w_m|}$ )及其对 $x^*$  ( $= \frac{x}{l}$ )的各阶导数的绝对值都不大于1,从而达到规整化的目的。

当然,式(3.6-3)中的 $w$ 和 $x$ 还可以是其他物理量,譬如 $w$ 代表压力, $x$ 代表时间。

在分析工程技术问题时,通常需要从微分方程把未知量 $w$ 求出来。因而, $|w_m|$ 和 $l$ 是未知的。如果通过试验或数学及物理上的分析而能对 $|w_m|$ 和 $l$ 的值做出近似的判断,上述无量纲化的处理则照样适用。

应当指出,在 $x$ 的不同区间可能有不同的

$|w_m|$  和  $l$ , 因此各区间的特征尺度可以不相同。

2.2 示例

2.2.1 示例一

研究地面上以初速为  $v_0$  垂直上抛的物体, 需要考虑引力场随距离的变化, 如果可以忽略空气阻力, 运动方程和初始条件应是

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -g \frac{R^2}{(R+x)^2} \\ t=0, x=0, \frac{dx}{dt} &= v_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6-10)$$

式中  $g$ ——地面上的重力加速度;

$R$ ——地球半径;

坐标  $x$  向上为正, 零点取在地面。

这个问题显然只有一个无量纲准数  $\epsilon = \frac{v_0^2}{gR}$ 。对于  $\epsilon \ll 1$  的情况, 式 (3.6-10) 的严格解是不难求得的。但是在这里, 我们将试用摄动法求解的途径, 因为这种方法对更复杂的问题常常是有效的。

举这个例子的主要目的是指出, 如果盲目地将方程无量纲化, 将会得出不正确乃至荒谬的结果。表 3.6-1 给出两种无量纲化的方法, 在  $\epsilon \rightarrow 0$  的情况均引出不正确的结果。

表 3.6-1

无量纲变量	$x^* = \frac{x}{R}, t^* = \frac{tv_0}{R}$	$x^* = \frac{x}{R}, t^* = t\sqrt{\frac{g}{R}}$
方程及初始条件	$\epsilon \frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = -\frac{1}{(x^*+1)^2}$ $t^*=0; x^*=0, \frac{dx^*}{dt^*} = 1$	$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = -\frac{1}{(x^*+1)^2}$ $t^*=0; x^*=0, \frac{dx^*}{dt^*} = \epsilon^{\frac{1}{2}}$
$\epsilon \rightarrow 0$ 时的方程及初始条件	$-\frac{1}{(x^*+1)^2} = 0$ $t^*=0; x^*=0, \frac{dx^*}{dt^*} = 1$	$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = -\frac{1}{(x^*+1)^2}$ $t^*=0; x^*=0, \frac{dx^*}{dt^*} = 0$
解的性质	无解	$x^* < 0$ , 无意义

按规整化的原则进行无量纲化才能保证得出正确的结果。在  $\epsilon \ll 1$  的情况下,  $x$  的最大值  $x_m$  必然很小, 以至在区间  $[0, x_m]$  内重力加速度可视为常数 (等于  $g$ ), 这时  $x_m = \frac{v_0^2}{2g}$ 。因此, 可用  $\frac{v_0^2}{g}$  作特征尺度来衡量  $x$ , 只要  $\epsilon$  足够小, 就能使  $\frac{xg}{v_0^2}$  的最大值为 1 的量级。所以, 按照规整化的要求, 可以取

$$x^* = \frac{xg}{v_0^2}$$

在重力加速度近乎不变的条件下, 到达  $x_m$  的时间大约是  $\frac{v_0}{g}$ , 因此,  $\frac{v_0}{g}$  应取为时间的特征尺度。这样,  $\frac{d^2x^*}{dt^{*2}}$  的最大值也是 1 的数量级。于是, 运动方程就变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x^*}{dt^{*2}} &= -\frac{1}{(1+\epsilon x^*)^2} \\ t^*=0; x^*=0, \frac{dx^*}{dt^*} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

这个方程的解可以写为

$$x^* = x_0^*(t^*) + \epsilon x_1^*(t^*) + \epsilon^2 x_2^*(t^*) + \dots$$

将这个表达式代入微分方程, 并将方程的右端按  $\epsilon$  的幂级数展开, 就能逐个求出  $x_1^*, x_2^*, \dots$ 。例如, 令

$\epsilon = 0$  时, 有

$$\frac{d^2x_0^*}{dt^{*2}} = -1$$

$$t^*=0; x_0^*=0, \frac{dx_0^*}{dt^*} = 1$$

所以

$$x_0^* = t^* - \frac{1}{2}t^{*2}$$

这就是熟知的公式

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

这个例子说明, 在将微分方程无量纲化时, 虽然相似准数未变, 却可以有不同的结果。在相似准数很小 (或很大) 的情况下, 只有在满足规整化条件下, 才能忽略与  $\epsilon$  相乘的各项。

2.2.2 示例二

考虑图 3.5-3 所示的一维热传导问题: 给定  $x=0$  处的表面温度为  $\theta = \theta_0 \sin \omega t$ , 在  $x=l$  的另一表面温度为  $\theta=0$ 。考虑很长时间以后, 温度达到稳态分布的情况, 解只依赖于边界条件而与初始温度分布无关。

## 3-30 第3篇 相似理论与模化

基本方程为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

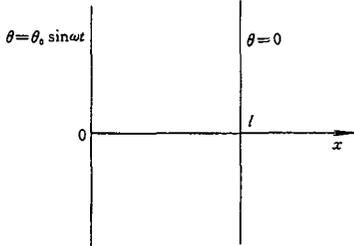


图 3-6-3 例二示意图

引入无量纲温度  $\theta^* = \frac{\theta}{\theta_0}$ , 无量纲时间  $t^* = \omega t$ , 无量纲

空间坐标  $x^* = \frac{x}{l}$ . 基本方程和边界条件改写为

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{\lambda}{\rho c \omega l^2} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}}$$

$$x^* = 0, \quad \theta^* = \sin t^*$$

$$x^* = 1, \quad \theta^* = 0$$

针对  $\lambda/(\rho c \omega l^2)$  很小的情况, 如除  $l$  外, 其他条件不变, 这相当于板很厚; 同理, 如除  $\omega$  外, 其他条件不变, 则相当于表面温度变化的频率很高. 不论是哪种情况, 温度的变化将只限于  $x=0$  附近的一个厚度为  $\delta$  的薄层,  $\frac{\delta}{l} \ll 1$ . 在薄层之内有热传导现象, 在远离薄层处温度不变, 即  $\theta^* = 0$ . 所以, 在  $\frac{\lambda}{\rho c \omega l^2} \ll 1$  的情况下, 应把问题提为

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{\lambda}{\rho c \omega \delta^2} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}}, \quad x^* = \frac{x}{\delta}$$

$$x^* = 0, \quad \theta^* = \sin t^*$$

$$x^* \rightarrow \infty, \quad \theta^* \rightarrow 0$$

由  $x^* = 0$  处的边界条件可见  $\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*}$  的数量级为 1. 为使

$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}}$  的数量级亦为 1, 应取

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c \omega}}$$

这就是温度发生显著变化的薄层厚度的估计. 在这个范围内, 上述方程的解为<sup>[16]</sup>

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_0} = \exp\left(-\sqrt{\frac{\rho c \omega}{2\lambda}} x\right) \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\rho c \omega}{2\lambda}} x\right)$$

作为零次近似, 上述解也满足  $x=l$  处的边界条件, 因为  $\exp\left(-\sqrt{\frac{\rho c \omega}{2\lambda}} l\right) \ll 1$ .

由这个例子可见, 如  $\frac{\lambda}{\rho c \omega l^2}$  足够小, 可以用薄板模拟厚板中的温度分布.

## 2.2.3 示例三

这里举著名的边界层作为例子<sup>[19]</sup>. 粘性不可压缩流体的平面定常流动的方程是

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right)$$

对于外部绕流问题, 试验表明, 在雷诺数足够大时, 远离物体处的流动可以用不可压缩无粘性流体来描述, 即忽略以上公式中与  $\eta$  相乘的各项. 解这个问题的边界条件是, 沿物体表面速度矢量与边界平行.

但是在层流条件下, 实验发现在物体表面上有一个流体薄层, 称为层流边界层. 在边界层内流体的切向速度有很大的变化, 沿壁面的法线方向, 由在壁面等于零的速度迅速地变为前一段所讲的无粘流的速度.

现在, 我们根据规整化的原则来导出层流边界层的方程.

由于边界层很薄, 曲率的影响可以忽略, 上述笛卡尔坐标系的方程可以近似地应用于如图 3-6-4 所示的曲线坐标系.

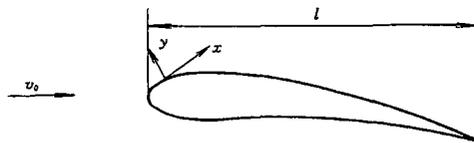


图 3-6-4 例三示意图

令  $v_0$  表示来流速度,  $l$  表示物体的特征尺寸,  $\delta$  表示边界层的特征厚度. 引入无量纲因变量和自变量

$$v_x^* = \frac{v_x}{v_0} \quad v_y^* = \frac{v_y}{v_0} \quad p^* = \frac{p}{\rho v_0^2}$$

$$x^* = \frac{x}{l} \quad y^* = \frac{y}{\delta}$$

于是, 连续方程变为

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{l}{\delta} \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = 0$$

由于  $v_x^*$ 、 $x^*$  和  $y^*$  的数量级都是 1, 因此  $v_y^*$  的数量级

应是  $\frac{\delta}{l} \ll 1$ 。

动力学 (纳维-斯托克斯) 方程变为

$$v_x \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{l}{\delta} v_y \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\eta}{\rho l v_0} \left[ \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{l^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \right]$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$   
 $\frac{1}{Re} \qquad 1 \qquad \frac{l^2}{\delta^2}$   
 $\underbrace{\qquad \qquad \qquad}_{\frac{1}{Re} \frac{l^2}{\delta^2} \approx 1}$

$$v_x \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{l}{\delta} v_y \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = -\frac{l}{\delta} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\eta}{\rho l v_0} \left[ \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{l^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \right]$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$   
 $\frac{\delta}{l} \qquad \qquad \frac{\delta}{l}$   
 $\underbrace{\qquad \qquad \qquad}_{\frac{1}{Re} \frac{l}{\delta}}$

在方程式下方的箭头指出各项的数量级。在估计数量级时, 我们假设, 对于  $x^*$  和  $y^*$  取微商时, 不改变被微分量的数量级。

在第一式中为使惯性项与粘性项为同一数量级, 必须取

$$\frac{1}{Re} \frac{l^2}{\delta^2} = 1 \quad Re = \frac{\rho l v_0}{\eta}$$

因此, 边界层厚度  $\delta$  的数量级为

$$\delta = \frac{l}{Re^{1/2}}$$

于是, 在欧拉方程中忽略高阶小量, 可以得到描述层流边界层的方程

$$v_x \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{l}{\delta} v_y \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}}$$

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*}$$

最后一个方程表明, 在垂直壁面的方向上, 边界层中的压力不变, 也就是说等于边界层外无粘流的压力, 于是压力只是  $x$  的函数, 记为  $p(x)$ 。所以, 边界层方程最后可写为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

边界条件是

$$y=0, \quad v_x=v_y=0$$

$$y \rightarrow \infty, \quad v_x, v_y \rightarrow \text{外部无粘流的解}$$

这样, 复杂的粘性流方程组就可以分为两部分来解: (1) 先求出无粘流的外部解; (2) 再解边界层方程组。

## 参考文献

- [1] Bridgman P W. Dimensional Analysis. Cambridge: Harvard University Press, 1921
- [2] Kline S J. Similitude and Approximation Theory. New York: McGraw-Hill, 1965
- [3] Buckingham E E. On Physically Similar Systems: Illustrations of the Use of Dimensional Equations. Phys. Rev. 1914, 4: 545
- [4] Duncan W J. Physical Similarity and Dimensional Analysis. London: Edward Arnold (Publisher) Ltd., 1953
- [5] Sedov L I. Similarity and Dimensional Methods in Mechanics (Transl.). London: Information, 1959
- [6] (苏) 基尔皮契夫著. 相似理论. 沈自求译. 北京: 科学出版社, 1955
- [7] Hossdorf H. Model Analysis of Structures (Transl.). New York: Van Nostrand Reinhold Co., 1971
- [8] Baker W E, Dodge F T. Similarity Methods in Engineering Dynamics. Rochelle Park: Hayden Book Co., 1973
- [9] Harris C M et al. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw-Hill, 1961
- [10] 钱学森. 气体动力学诸方程. 北京: 国防工业出版社, 1966
- [11] Zierp J. Similarity Laws and Modeling. New York: Marcel Dekkar, 1971
- [12] Johnstone R E, Thring M W. Pilot Plants and Scale Set-up Methods in Chemical Engineering. New York: McGraw-Hill, 1957
- [13] Gadd G. Understanding Ship Resistance Mathematically. J. Inst. Math. Appl. 1968, 4: 43~57

## 3-32 第3篇 相似理论与模化

- [14] (苏) 洛强斯基著. 液体与气体力学. 下册. 林鸿荪, 张炳煊译. 北京: 高等教育出版社, 1959
- [15] 邹滋祥. 相似理论在叶轮机械模型研究中的应用. 北京: 科学出版社, 1984
- [16] Jakob L M. Heat Transfer, Vol. 1. New York: John Wiley & Sons, 1949
- [17] Timoshenko S et al. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1951
- [18] Lin C C, Segel L A. Mathematics Applied to Deterministic Problems in Natural Sciences. New York: Macmillan Publ. Co., 1974
- [19] Schlichting H. Boundary Layer Theory. New York: McGraw-Hill, 1979

www.cnki.net