

档案号: 001295

编号: 6450

科学技术研究报告

水中击波入射于平板时 空化的形成及其作用

作者: 郑哲敏

中国科学院力学研究所 (编号: (力)63001)

中国科学院 (编号: 中科新-64-002)

中华人民共和国科学技术委员会

1964年6月19日 登记

目 录

摘要.....	(I)
一、引言.....	(1)
二、问题的建立.....	(1)
三、空化前的运动情况以及空化的发生.....	(2)
四、空化水对板料的冲击,附加水的形成和板料的运动.....	(7)
五、祓例.....	(12)
六、结束語.....	(15)
参考文献.....	(15)

摘 要

本文用声学的微幅波动理论和其他一些简化假设,较详细地分析了水中击波正入射于平板时空化的发生、发展和消失,研究并明确了空化对平板变形的作用的基本机制。报告提供了计算平板变形具体公式,并包括一个例题。

水中爆炸波对板或壳的作用,可以分为两部分处理,一是击波作用,一是滞后流的作用。这两种作用是通过空化区而互相联系的。因此这里所提供的关于空化作用的基本机制,将有助于分析其它条件下的击波作用和滞后流的作用问题。

水中击波入射于平板时 空化的形成及其作用

一、引言

当水中击波入射在薄板和薄壳上并进行反射时，由于水是一种不能承受较大拉力的介质，因此在水里常出现空化。空化的发生、发展和消失使在水下爆炸条件下，板壳的变形和运动具有一些突出的特点。这些特点包括：1. 空化提高了入射击波所携能量的利用率——减少了由反射波所携走的能量，增加了变形量。2. 击波波尾部分水的运动接近于不可压缩流体的运动。在爆炸气体的推动下，这部分水继续加速。由于空化区的存在，这部分水的速度将大于板或壳的速度。当前者赶上后者的时候，板或壳的速度就突然增加，形成所谓二次加速现象（详见〔1〕）。

本报告的主要目的在于阐述爆炸成形条件下，空化的发生，发展和消失的基本过程。为此，我们具体分析一平面击波正入射于平板时，板料和水的运动情况。这一分析说明，为什么空化提高了入射击波能量的利用率。在这里忽略了滞后流，因此将不讨论二次加速问题。后一问题将另有专文讨论。

二、问题的建立

我们取 y 轴为入射波的前进方向。平板与 y 轴垂直，取其初始位置为 $y=0$ 。在时间 $t=0$ ，入射波刚好到达板面。在这一节里，先对板料和水的运动情况及它们的主要特点作一概述，然后引进几个简化假设，以便在以后几节中对运动情况作具体分析。

在 (y, t) 平面上可以将整个运动情况比较集中而且清楚地表达出来。从图1可见，按照时间顺序，入射击波将首先自板面反射。由于板是有惯性的，因此初期的反射接近于从固壁反射。随着板料速度的增加，板面的水压力就相应地降低。在入射波的压力很大，板料的质量和变形阻力很小的条件下，水中很快就出现足以使水发生空化的低压。空化区向水的内部发展就形成了图1中所示的空化区内边界。空化区是水、气混合物，是因为水不能承受超过一定数值的拉力才形成的。和在固体中爆炸时，在表面上出现崩落的情况相似，空化了的水构成具有一定速度的崩

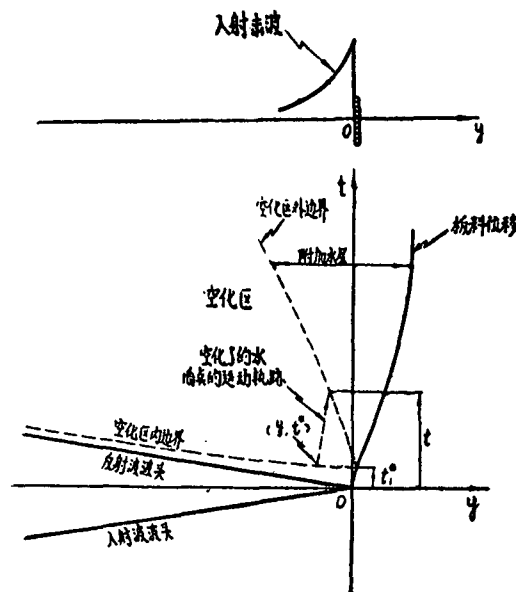


图 1

落抛掷。图 1 标出了空化区中某一质点的抛掷轨迹。

另一方面，在变形阻力作用下，板料逐渐减速，并阻挡空化水的前进，从而形成了空化水对板料的冲击。就这样，板料从空化水里取得新的动量。同时，在冲击过程中压力提高了，于是水就又从空化状态恢复到没有空化的状态。结果在板料和空化区之间形成了一层无空化的水，称为附加水。

为了便于对上述过程作定量的分析，我们引进下面几个主要简化假设：

1. 单位面积板料的变形阻力是常数，并以 $\frac{2\sigma\delta}{R}$ 表示之。其中 δ 是板料厚度， σ 是材料的屈服应力。我们把变形阻力这样来表示，是因为对于球壳和圆柱壳而言，变形阻力的表达式就是 $\frac{2\sigma\delta}{R}$ ，如果取 $\frac{1}{R}$ 为壳体的平均曲率，并假设材料是理想刚塑性的。在击波的有效波长远小于曲率半径 R 的情况下，在研究击波对球或柱壳作用的时候，可以采用平板作为模型。

2. 在尚未空化的水里，声学理论适用于描述击波的传播和反射。所谓声学理论是指忽略粘性和热传导条件下的微幅波动理论。我们取入射波的压力波形为

$$p(y, t) = P_m e^{-\left(t - \frac{y}{a}\right) / \theta_m} \quad t - \frac{y}{a} \geq 0 \quad (2.1)$$

$$= 0 \quad t - \frac{y}{a} < 0$$

其中 a 是水中的声速， P_m 是入射波的压力峰值， θ_m 是这个波的特征时间， $a\theta_m$ 代表有效波长。

3. 当压力降低到 $-p_v$ ，水就立刻空化；空化水的压力总是 $-p_v$ ，不管密度如何；当压力高于 $-p_v$ ，空化就立刻消失。换言之，我们假设水具有如图 2 所示的那种 $p-\rho$ 关系（ ρ 表示水的密度）。

根据这一假设可见，空化区的压力是常数，因而水质点以恒速运动。不过，不同的质点可以有不同的速度，所以空化区的水一般说是变密度的。

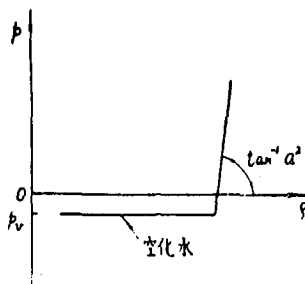


图 2

4. 可以将附加水作为不可压缩理想流体处理。

5. 在爆炸成形条件下，空化首先出现在与板料很邻近的水中，因此没有必要对从这一点到板料之间水的运动作过于详细的分析。以下我们假设，水中开始出现空化时（ $t=t_1$ ），这部分水就作为附加水与板料以相同的速度运动。

这些就是下面的定量分析所依据的主要假设。在爆炸成形条件下， P_m 的数量级约为一千大气压， p_v 约为几个大气压，因此 $\frac{p_v}{P_m} \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ 。既然这个比值很小，在下面的计算中将把它作为小量忽略。

三、空化前的运动情况以及空化的发生

水中的压力波由入射波和反射波组成。为便于计算起见，又可将后者拆为两部分，其中一部分相当于从固壁的反射。于是根据 (2.1)，我们有

$$p(y, t) = P_m e^{-\left(t - \frac{y}{a}\right)/\theta_m} + P_m e^{-\left(t + \frac{y}{a}\right)/\theta_m} + g\left(t + \frac{y}{a}\right), \quad (3.1)$$

$$t > -\frac{y}{a}.$$

其中 $g\left(t + \frac{y}{a}\right)$ 是待定函数。压力增量 Δp 和质点速度增量 Δv 的关系是

$$\Delta v = \pm \frac{\Delta p}{\rho a}, \quad (3.2)$$

其中正号适用于与 y 轴同向的波，负号适用于反向波。因此，由 (3.1) 式得到质点运动速度 v 的表达式，

$$v(y, t) = \frac{P_m}{\rho a} e^{-\left(t - \frac{y}{a}\right)/\theta_m} - \frac{P_m}{\rho a} e^{-\left(t + \frac{y}{a}\right)/\theta_m} - \frac{g\left(t + \frac{y}{a}\right)}{\rho a}. \quad (3.3)$$

得出此式时，使用的起始条件是，在入射波未到达以前，质点的速度是零。

在板和水的接触面上 ($y = 0$)，有两个条件要满足。其一是速度连续条件。其二是板料的运动方程，即板面的压力减去单位面积板料的变形阻力应该等于单位面积板料的质量乘它的加速度。用 $w(t)$ 表示板料位移，则前述两个条件可写作

$$g(t) = -\rho a \frac{dw}{dt}, \quad (3.4)$$

$$\rho_s \delta \frac{d^2 w}{dt^2} + \rho a \frac{dw}{dt} = 2P_m e^{-t/\theta_m} - \frac{2\sigma \delta}{R}. \quad (3.5)$$

在后一方程式里 ρ_s 是板料密度， $\rho_s \delta$ 是单位面积板料的质量。解微分方程 (3.5) 的两个起始条件显然是

$$w(0) = \frac{dw}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

令 $\frac{\rho_s \delta}{\rho a} = \theta_s$ ，我们解得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{e^{-t/\theta_m} - e^{-t/\theta_s}}{1 - \theta_s/\theta_m} - \frac{\sigma \delta}{P_m R} (1 - e^{-t/\theta_s}), \\ \frac{w}{2P_m \theta_m / \rho a} &= 1 - \frac{\theta_m e^{-t/\theta_m} - \theta_s e^{-t/\theta_s}}{\theta_m - \theta_s} - \frac{\sigma \delta}{P_m R} \left[\frac{t}{\theta_m} - \frac{\theta_s}{\theta_m} (1 - e^{-t/\theta_s}) \right], \end{aligned} \right\} (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{p(y, t)}{2P_m} &= \frac{1}{2} e^{-\left(t - \frac{y}{a}\right)/\theta_m} - \frac{1 + \frac{\theta_s}{\theta_m}}{2\left(1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}\right)} e^{-\left(t + \frac{y}{a}\right)/\theta_m} \\ &+ \frac{\left[1 - \left(1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}\right) \frac{\sigma \delta}{P_m R}\right]}{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}} e^{-\left(t + \frac{y}{a}\right)/\theta_s} + \frac{\sigma \delta}{P_m R}. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{v(y, t)}{\frac{2P_m}{\rho a}} &= \frac{1}{2} e^{-\left(t - \frac{y}{a}\right)/\theta_m} + \frac{1 + \frac{\theta_s}{\theta_m}}{2\left(1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}\right)} e^{-\left(t + \frac{y}{a}\right)/\theta_m} \\ &\quad - \frac{\left[1 - \left(1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}\right) \frac{\sigma\delta}{P_m R}\right]}{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}} e^{-\left(t + \frac{y}{a}\right)/\theta_s} - \frac{\sigma\delta}{P_m R} \end{aligned} \right\} (3.7)$$

$t \geq -\frac{y}{a}, y \leq 0.$

水中出现空化的条件是

$$\left. \begin{aligned} p(y, t) &= -p_v, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &< 0. \end{aligned} \right\} (3.8)$$

对于最早出现空化的质点（或部位），还有另一个附加条件

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (3.9)$$

设最先出现空化的时间是 t_1^* ，它的位置在 y_1 。令

$$\zeta_1 = \frac{t_1^*}{\theta_m} + \frac{y_1}{a\theta_m}, \quad \lambda_1 = \frac{t_1^*}{\theta_m} - \frac{y_1}{a\theta_m}. \quad (3.10)$$

从 (3.8) 的第一式和 (3.9) 得

$$\left. \begin{aligned} e^{-\zeta_1} - \frac{\theta_m}{\theta_s} \left[1 - \left(1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}\right) \frac{\sigma\delta}{P_m R}\right] e^{-\zeta_1 \frac{\theta_m}{\theta_s}} - \frac{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}}{1 + \frac{\theta_s}{\theta_m}} \frac{\sigma\delta}{P_m R} \left(1 + \frac{p_v R}{2\sigma\delta}\right) &= 0, \\ \text{及} \\ e^{-\lambda_1} &= e^{-\zeta_1} - \frac{2}{1 + \frac{\theta_s}{\theta_m}} \frac{\sigma\delta}{P_m R} \left(1 + \frac{p_v R}{2\sigma\delta}\right). \end{aligned} \right\} (3.11)$$

在 $\frac{\sigma\delta}{P_m R}$ 充分小的情况下，可将 ζ_1 表示为

$$\zeta_1 = \zeta_1^{(0)} + \mu \zeta_1^{(1)} + \mu^2 \zeta_1^{(2)} + \dots, \quad (3.12)$$

其中

$$\mu = \frac{\sigma\delta}{P_m R}. \quad (3.13)$$

从 (3.11) 第一式解得

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1^{(0)} &= \frac{1}{\frac{\theta_m}{\theta_s} - 1} \ln \frac{\theta_m}{\theta_s}, \\ \zeta_1^{(1)} &= \frac{\theta_s}{\theta_m} \left\{ e^{\zeta_1^{(0)}} \frac{1 + \frac{p_v R}{2\sigma\delta}}{1 + \frac{\theta_s}{\theta_m}} - 1 \right\}, \\ \zeta_1^{(2)} &= \zeta_1^{(1)} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_m}{\theta_s} + 1 \right) \zeta_1^{(1)} \right\}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} (3.14)$$

同理, λ_1 可表示为

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(0)} + \mu \lambda_1^{(1)} + \mu^2 \lambda_1^{(2)} + \dots \quad (3.15)$$

从 (3.11) 第二式解得

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1^{(0)} &= \zeta_1^{(0)}, \\ \lambda_1^{(1)} &= \zeta_1^{(1)} + \frac{2e^{\zeta_1^{(0)}}}{1 + \frac{\theta_s}{\theta_m}} \left(1 + \frac{p_v R}{2\sigma\delta} \right), \\ \lambda_1^{(2)} &= \zeta_1^{(2)} + \frac{2 \left(1 + \frac{p_v R}{2\sigma\delta} \right) e^{\zeta_1^{(0)}}}{1 + \frac{\theta_s}{\theta_m}} \left\{ e^{\zeta_1^{(0)}} \left(1 + \frac{p_v R}{2\sigma\delta} \right) - \frac{\theta_s}{\theta_m} \right\}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

因此,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{y_1}{a\theta_m} &= \mu \frac{e^{\zeta_1^{(0)}} \left(1 + \frac{p_v R}{2\sigma\delta} \right)}{1 + \frac{\theta_s}{\theta_m}} \left\{ 1 + \mu \left[e^{\zeta_1^{(0)}} \left(1 + \frac{p_v R}{2\sigma\delta} \right) - \frac{\theta_s}{\theta_m} \right] \dots \right\}, \\ \frac{t_1^*}{\theta_m} &= \frac{1}{\frac{\theta_m}{\theta_s} - 1} \log \frac{\theta_m}{\theta_s} + \frac{\mu}{2} (\zeta_1^{(1)} + \lambda_1^{(1)}) + \frac{\mu^2}{2} (\zeta_1^{(2)} + \lambda_1^{(2)}) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

(3.17) 第一式右端, 当 $\mu \rightarrow 0$, 显然取正值。

容易证明 (3.8) 的第二个条件, 在 $t = t_1^*$, $y = y_1$, 也是被满足的。这就证明了空化首先出现在水的内部, 在 μ 小的情况下, 这个部位距板面很近。

现在讨论空化区是怎样形成的。根据 (3.7) 的第一式, 在 $y-t$ 平面上, 压力等于 $-p_v$ 的曲线是

$$\begin{aligned} e^{-(t^* - \frac{y}{a})/\theta_m} - \frac{1 + \frac{\theta_s}{\theta_m}}{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}} e^{-(t^* + \frac{y}{a})/\theta_m} - \frac{2 \left[1 - \mu \left(1 - \frac{\theta_s}{\theta_m} \right) \right]}{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}} e^{-(t^* + \frac{y}{a})/\theta_s} \\ + 2\mu \left(1 + \frac{p_v R}{2\sigma\delta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

在 $t^* = t_1^*$, $y = y_1$, 由于 $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, 所以这条曲线的斜率 $\frac{dt^*}{dy} = 0$ 。当 $t^* \rightarrow \infty$, $y \rightarrow -\infty$, (3.18) 式

左端的第一项趋于零, 因此 (3.18) 式的渐近线是 $t^* + \frac{y}{a} = \text{const.} < t_1^* + \frac{y_1}{a}$ 。(3.18) 所确定的

曲线如图 3 中的 $AO'B$ 所示。沿这条曲线有

$$\frac{\theta_m}{2P_m} \frac{\partial p}{\partial t^*} = \frac{\theta_m}{2P_m} \left(\frac{\partial p}{\partial t^*} \right)_{t^*=t_1^*} + \frac{\theta_m}{\theta_s} \left[1 - \mu \left(1 - \frac{\theta_s}{\theta_m} \right) \right] \left[e^{-(t_1^* + \frac{y_1}{a})/\theta_s} - e^{-(t_1^* + \frac{y_1}{a})/\theta_m} \right]. \quad (3.19)$$

沿 $O'A$ 我们有 $t^* + \frac{y}{a} \leq t_1^* + \frac{y_1}{a}$, 于是有 $\frac{\partial p}{\partial t^*} < 0$ 。因此沿 $O'A$, 满足了 (3.8) 所规定的两个空化条件。我们称 $O'A$ 为空化区的内边界。

以 $v^* = v(y, t^*)$ 表示空化水的速度, 则根据 (3.7) 的第二式有

$$\frac{v^*}{\rho a} = e^{-(t^* - \frac{y}{a})/\theta_m} + \frac{p_v}{2P_m} \approx e^{-(t^* - \frac{y}{a})/\theta_m}. \quad (3.20)$$

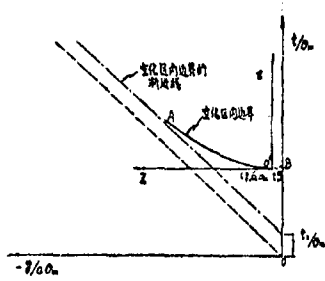


图 8

这说明沿O'A, 空化水的速度是不断减少的, 只有当先空化的水被板料所阻, 变为附加水后, 才能被后空化的水追赶上。因此, 附加水和空化水的分界面是空化区的另一边, 称为外边界, 在内、外边界之间, 是空化区。

根据假设(5), 我们将不仔细分析O'与板料之间, 空化的发生和消失, 单纯的认为, 在 $t=t_1^*$, 就形成了一个厚度为 $|y_1|$ 的附加水层。这部分水与板料以同一速度运动。以 $v_0(t) = \frac{dw}{dt}$ 表示板料的速度, 我们取

$$v_0(t_1^*) = v^*(y_1, t_1^*) = \frac{2P_m}{\rho a} e^{-(t_1^* - \frac{y_1}{a})/\theta_m} \quad (3.21)$$

根据上述假设, 空化区的外边界由O'点开始。

为便于计算, 我们将空化区内边界的方程(3.18)写成参数表达式。首先, 将坐标原点从O移至O', 即令

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{\theta_m} - \frac{t_1^*}{\theta_m}, \quad \tau^* = \frac{t^*}{\theta_m} - \frac{t_1^*}{\theta_m}, \\ z &= -\frac{y - y_1}{a\theta_m}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

然后引入参数 ζ 和 λ ,

$$\begin{aligned} \zeta &= -\tau^* + z \geq 0, \\ \lambda &= -(\tau^* + z). \end{aligned} \quad (3.23)$$

于是(3.18)就可写为

$$\begin{aligned} \lambda &= \ln \frac{e^{\lambda} - 1}{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}} \left\{ \left(1 + \frac{\theta_s}{\theta_m} \right) e^{\zeta - \zeta_1} - 2 \left[1 - \mu \left(1 - \frac{\theta_s}{\theta_m} \right) \right] e^{(\zeta - \zeta_1) \frac{\theta_m}{\theta_s}} \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{\theta_s}{\theta_m} \right) 2\mu \left(1 + \frac{P_v R}{2\sigma \delta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

同时有

$$\begin{aligned} z(\zeta) &= \frac{1}{2}(\zeta - \lambda), \\ \tau^*(\zeta) &= -\frac{1}{2}(\zeta + \lambda). \end{aligned} \quad (3.25)$$

(3.24)和(3.25)就是空化区内边界的参数表达式。

再引入无量纲的空化水速度 $u^*(\zeta)$ 和板料的速度 $u_0^*(\tau)$, 即

$$\begin{aligned} u^*(\zeta) &= \frac{v^*}{\frac{2P_m}{\rho a}} e^{(t_1^* - \frac{y_1}{a})/\theta_m} = \frac{v^* e^{\lambda} - 1}{\frac{2P_m}{\rho a}}, \\ u_0(\tau) &= \frac{v_0}{\frac{2P_m}{\rho a}} e^{(t_1^* - \frac{y_1}{a})/\theta_m} = \frac{v_0 e^{\lambda} - 1}{\frac{2P_m}{\rho a}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

显然, 我们有

$$\begin{aligned} \text{在 } \zeta=0, \quad z(0) = \tau^*(0) = 0, \quad u^*(0) = 1, \\ \text{在 } \tau=0, \quad u_0(0) = 1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

并且

$$u^*(\zeta) = e^\lambda. \quad (3.28)$$

附带引入两个在积分下一节中的微分方程组 (4,5) 时屡次用到的关系式, 即

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\zeta u^* \frac{dz}{d\zeta} d\zeta &= \frac{\theta_s}{\theta_m} \left[u^* \frac{dz}{d\zeta} - \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_0 \right] - K\zeta, \\ \frac{d}{d\zeta} \left(u^* \frac{dz}{d\zeta} \right) &= \frac{\theta_m}{\theta_s} \left(u^* \frac{dz}{d\zeta} + K \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

其中

$$\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_0 = \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta=0} = e^{-2\eta_1} - \frac{2}{1 + \frac{\theta_s}{\theta_m}} K, \quad (3.30)$$

$$K = \mu e^\lambda \left(1 + \frac{p_v R}{2\sigma \delta} \right),$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2} (\lambda_1 - \zeta_1) = -\frac{y_1}{a\theta_m}.$$

最后我们给出空化发生前, $t \leq t_1^*$, 板料的位移

$$\frac{w}{2F_m \theta_m} = 1 - \frac{e^{-t/\theta_m} - \frac{\theta_s}{\theta_m} e^{-t/\theta_s}}{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}} - \mu \left[\frac{t}{\theta_m} - \frac{\theta_s}{\theta_m} (1 - e^{-t/\theta_s}) \right]. \quad (3.31)$$

四、空化水对板料的冲击, 附加水的形成和板料的运动

现在讨论空化发生后板料的运动。讨论这个问题所依据的基本方程共有两个, 即水的连续方程和动量方程。首先推导水的连续方程。

根据前一节的符号, 位于 y 的质点, 在时间 t^* 开始空化, 并以速度 v^* 冲向板料。现在令 t 表示这个质点变为附加水的时间。根据附加水是不可压缩的假设, $-y$ 就是在时间 t 附加水的厚度。由此可见, 这个水质点的位移必须等于板料的位移。前者由两部分相加而成, 即自由波到达 y 至 t^* 所经历的位

移 $\int_{y/a}^{t^*} v(y, t) dt$ 加上空化后的位移 $v^*(t - t^*)$; 板料的位移等于 $w(t) = \int_0^t v_0(t) dt$ 。因此有

$$\int_{y/a}^{t^*} v(y, t) dt + v^*(t - t^*) = \int_0^t v_0 dt. \quad (4.1)$$

取上式对 y 的导数, 得

$$-\frac{1}{a} v\left(y, \frac{y}{a}\right) + v(y, t^*) \frac{dt^*}{dy} + \int_{y/a}^{t^*} \frac{\partial v}{\partial y} dt + (t - t^*) \frac{dv^*}{dy} + v^* \frac{dt}{dy} - v^* \frac{dt^*}{dy} = v_0 \frac{dt}{dy}.$$

然而

$$\begin{aligned} v\left(y, \frac{y}{a}\right) &= \frac{P_m}{\rho a}, \\ v(y, t^*) &= v^*, \\ \int_{y/a}^{t^*} \frac{\partial v}{\partial y} dt &= -\frac{1}{a^2 \rho} \int_{y/a}^{t^*} \frac{\partial p}{\partial t} dt = \frac{1}{a^2 \rho} (P_m + p_v) \approx \frac{P_m}{a^2 \rho}. \end{aligned}$$

因此, 连续方程简化为

$$v^* - v_0 = -\frac{dv^*}{dt}(t - t^*). \quad (4.2)$$

现在推导动量方程。在时间 t , 板料与附加水的动量是 $(\rho_s \delta - \rho y) v_0$, dt 时间之后, 它们的动量是 $(\rho_s \delta - \rho y - \rho dy)(v_0 + dv_0)$ 。在这个时间间隔内, 由空化水所提供的动量是 $-\rho v^* dy$ 。作用的外力等于 $-\left(\frac{2\sigma\delta}{R} + p_v\right)$ 。因此动量方程是

$$(\rho_s \delta - y\rho) \frac{dv_0}{dt} + \rho(v^* - v_0) \frac{dy}{dt} = -\left(\frac{2\sigma\delta}{R} + p_v\right). \quad (4.3)$$

v^* , t^* 可以看作是 y 的函数。因此可以将(4.2)和(4.3)看作是 v_0 和 y 的一阶微分方程组, 自变量是 t 。解这组微分方程的起始条件是,

$$t = t_1^*, \quad v_0 = \frac{2P_m}{\rho a} e^{-\lambda_1}, \quad y = y_1. \quad (4.4)$$

为便于积分, 我们取 ζ 为自变数。于是(4.2)和(4.3)可写为下述无量纲的形式,

$$\begin{aligned} (u^* - u_0) \frac{d\tau}{d\zeta} &= -\frac{du^*}{d\zeta}(\tau - \tau^*), \\ \frac{d}{d\zeta} \left[u_0 \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z \right) \right] - u^* \frac{dz}{d\zeta} &= -K \frac{d\tau}{d\zeta}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} u^*(\zeta) &= \frac{e^{\lambda_1}}{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}} \left\{ \left(1 + \frac{\theta_s}{\theta_m} \right) e^{\zeta - \zeta_1 - 2} \left[1 - \mu \left(1 - \frac{\theta_s}{\theta_m} \right) \right] e^{\frac{\theta_m}{\theta_s}(\zeta - \zeta_1)} \right\} - 2K, \\ z(\zeta) &= \frac{1}{2}(\zeta - \lambda), \\ \tau^*(\zeta) &= -\frac{1}{2}(\zeta + \lambda), \\ \lambda(\zeta) &= \ln u^*. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

方程组的未知函数是 $u_0(\zeta)$ 和 $\tau(\zeta)$, 起始条件是

$$\zeta = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad \tau(0) = 0. \quad (4.7)$$

(4.5)的第二个方程可直接积分。使用关系式(3.29), 我们得

$$u_0 \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z \right) - \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 \right) - \frac{\theta_s}{\theta_m} \left[u^* \frac{dz}{d\zeta} - \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_0 \right] + K\zeta = -K\tau. \quad (4.8)$$

从(4.5)的第一式和(4.8)式消去 τ , 得

$$\begin{aligned} -u^* - u_0 \left\{ \frac{d}{d\zeta} \left[u_0 \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z \right) \right] - u^* \frac{dz}{d\zeta} \right\} &= \\ = \frac{du^*}{d\zeta} \left\{ u_0 \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z \right) - \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 \right) - \frac{\theta_s}{\theta_m} \left[u^* \frac{dz}{d\zeta} - \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_0 \right] + K\zeta + K\tau^* \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

不难看出, 这个一阶微分方程有积分因子

$$\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z.$$

经过一些运算, 得出 (4.9) 的积分如下

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(u^* - u_0)^2 \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z \right)^2 = \\ & = \frac{1}{2} \left[u^* \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z \right) - \frac{\theta_s}{\theta_m} u^* \frac{dz}{d\zeta} - \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 \right) + \frac{\theta_s}{\theta_m} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_0 + K\zeta \right]^2 + K\mathcal{G}(\zeta), \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\zeta) &= \int_0^\zeta \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z \right) \tau^* \frac{d\tau^*}{d\zeta} d\zeta = u^* \tau^* \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 \right) (1 - u^*) - \\ & - \frac{1}{2} (u^* \ln u^* - u^* + 1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 \right) \int_0^\zeta u^* d\zeta + \frac{1}{2} \int_0^\zeta \zeta u^* d\zeta. \end{aligned} \quad (4.11)$$

根据 (4.6), 又有

$$\begin{aligned} \int_0^\zeta u^* d\zeta &= \frac{e^{\lambda_1}}{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}} \left\{ \left(1 + \frac{\theta_s}{\theta_m} \right) e^{-\zeta_1} (e^\zeta - 1) - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\theta_s}{\theta_m} \left[1 - \mu \left(1 - \frac{\theta_s}{\theta_m} \right) \right] e^{-\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta_1} \left(e^{\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta} - 1 \right) \right\} - \gamma K \zeta, \\ \int_0^\zeta \zeta u^* d\zeta &= \frac{e^{\lambda_1}}{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}} \left\{ \left(1 + \frac{\theta_s}{\theta_m} \right) e^{-\zeta_1} (\zeta e^\zeta - e^\zeta + 1) - \right. \\ & \left. - 2 \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} \right)^2 \left[1 - \mu \left(1 - \frac{\theta_s}{\theta_m} \right) \right] e^{-\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta_1} \left(\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta e^{\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta} - e^{\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta} + 1 \right) \right\} - K \zeta^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

(4.10) 和 (4.8) 就是基本方程 (4.5), 在起始条件 (4.7) 下的解。给定 ζ , 由 (4.10) 得出 u_0 , 再代入 (4.8) 就得出 τ 。

当 $u_0 = 0$, 变形过程就结束了。以脚注 c 表示变形结束时的各种量, 于是根据 (4.10), ζ_c 应当是下述方程的根,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_c^{*2} \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z_c \right)^2 &= \frac{1}{2} \left[u_c^* \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z_c \right) - \frac{\theta_s}{\theta_m} u_c^* \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_c - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 \right) + \frac{\theta_s}{\theta_m} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_0 + K \zeta_c \right]^2 + K \mathcal{G}(\zeta_c). \end{aligned} \quad (4.13)$$

现在再来求板料的位移 $w(t)$ 。用 $v_0 = \frac{dw}{dt}$ 乘动量方程并进行积分, 我们得

$$\begin{aligned} - \left(\frac{2\sigma\delta}{R} + p_v \right) (w - w_1) &= \frac{1}{2} (\rho_s \delta - y^\rho) v_0^2 - \frac{1}{2} (\rho_s \delta - y_1^\rho) v_0^2(t_1^*) - \\ & - \frac{1}{2} \rho \int_{\nu_1}^{\nu} (v_0 - v^*)^2 dy + \frac{1}{2} \rho \int_{\nu_1}^{\nu} v^{*2} dy, \end{aligned} \quad (4.14)$$

其中 $w_1 = w(t_1^*)$ 。(4.14) 就是能量方程, 其中每一项的物理意义是很明确的, 例如 $-\frac{1}{2} \rho \int_{\nu_1}^{\nu} v^{*2} dy$

代表由空化水所带给板料和附加水的动能, $-\frac{1}{2} \rho \int_{u_1}^u (v_0 - v^*)^2 dy$ 代表冲击时能量的耗损。

引入无量纲变数

$$\bar{w} = \frac{w}{\frac{2\rho_m \theta_m}{\rho a}}, \quad (4.15)$$

则可将 (4.14) 写为

$$\begin{aligned} -K(\bar{w} - \bar{w}_1) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z \right) u_0^2 - \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\zeta (u^* - u_0)^2 \frac{dz}{d\zeta} d\zeta - \frac{1}{2} \int_0^\zeta u^{*2} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta. \end{aligned}$$

利用 (4.10), 得

$$\begin{aligned} \bar{w} - \bar{w}_1 &= h(\zeta) + \frac{1}{2K} \left\{ \left[\frac{\theta_s}{\theta_m} u^* \frac{dz}{d\zeta} + \frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 - \frac{\theta_s}{\theta_m} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_0 - K\zeta \right]^2 - \right. \\ &\left. - u_0^2 \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z \right)^2 \right\} \frac{1}{\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

其中

$$h(\zeta) = \frac{g(\zeta)}{\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z} - \int_0^\zeta \tau^* \frac{du^*}{d\zeta} d\zeta = \frac{g(\zeta)}{\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z} - u^* \tau^* + \frac{1}{2} (1 - u^*) - \frac{1}{2} \int_0^\zeta u^* d\zeta. \quad (4.17)$$

以 \bar{w}_c 表示板料的终了位移, 则有

$$\bar{w}_c - \bar{w}_1 = h(\zeta_c) + \frac{1}{2K} \left\{ \frac{\theta_s}{\theta_m} u_c^* \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_c + \frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 - \frac{\theta_s}{\theta_m} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_0 - K\zeta_c \right\}^2 \frac{1}{\left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 + z_c \right)}. \quad (4.18)$$

由 (4.8) 得

$$\tau_c = \frac{1}{K} \left\{ \frac{\theta_s}{\theta_m} + \eta_1 - K\zeta_c + \frac{\theta_s}{\theta_m} u_c^* \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_c - \frac{\theta_s}{\theta_m} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_0 \right\}. \quad (4.19)$$

这样, 计算问题便得到解决。

板料停止运动后, 将继续受到空化水的冲击, 因此附加水的厚度将进一步增加。令 $u_0 = 0$, 积分 (4.5) 的第一式, 即得板料停止运动后, τ 与 ζ 的关系。我们得

$$u^* \tau = u_c^* \tau_c + u^* \tau^* - u_c^* \tau_c^* + \frac{1}{2} \int_c^\zeta u^* d\zeta - \frac{1}{2} (u_c^* - u^*). \quad (4.20)$$

$u^*(\zeta)$, $z(\zeta)$, $\tau^*(\zeta)$ 等仍由 (4.6) 确定。

现在讨论 $\mu = \frac{\sigma_0}{\rho_m R}$ 很小的情况。由 (3.7) 得

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= -\frac{y_1}{a\theta_m} = 0, \\ \lambda_1 = \zeta_1 &= \frac{t_1^*}{\theta_m} = \frac{1}{\frac{\theta_m}{\theta_s} - 1} \ln \frac{\theta_m}{\theta_s}. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

由 (4.6) 得

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \frac{1}{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}} \left\{ \left(1 + \frac{\theta_s}{\theta_m} \right) e^{\zeta} - 2 \frac{\theta_s}{\theta_m} e^{\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta} \right\}, \\ u^* \frac{dz}{d\zeta} &= e^{\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta}. \end{aligned} \right\}$$

由 (4.10)、(4.16) 和 (4.8) 得,

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= 2u^* - \frac{\frac{\theta_s}{\theta_m} e^{\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta}}{\frac{\theta_s}{\theta_m} + z}, \\ \bar{w} - \bar{w}_1 &= \frac{1}{2K \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + z \right)} \left\{ \frac{\theta_s^2}{\theta_m^2} e^{2\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta} - u_0^2 \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + z \right)^2 \right\}, \\ K\tau &= \frac{\theta_s}{\theta_m} e^{\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta} - u_0 \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + z \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

ζ_c 由下式确定,

$$\left. \begin{aligned} u_c^* &= \frac{1}{2} \frac{\frac{\theta_s}{\theta_m} e^{\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta_c}}{\frac{\theta_s}{\theta_m} + z_c}, \\ K\tau_c &= \frac{\theta_s}{\theta_m} e^{\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta_c}, \\ \bar{w}_c - \bar{w}_1 &= \frac{\frac{\theta_s^2}{\theta_m^2} e^{2\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta_c}}{2K \left(\frac{\theta_s}{\theta_m} + z_c \right)} = u_c^* \tau_c. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

由这些式子可见, 在 μ (或 K) 很小的情况下, 作为一次近似, ζ_c 与 K 无关 (从而 z_c 、 τ_c 也与 K 无关), \bar{w} 、 \bar{w}_c 、 τ 和 τ_c 都反比于 K 。由于 $K\tau \rightarrow 0$, $K\tau$ 有限, 因此 $\tau \gg \tau^*$, $\frac{t}{\theta_m} = \tau + \tau^* \approx \tau$, $\frac{t_c}{\theta_m} \approx \tau_c$ 。

(4.23) 有一个简单而有兴趣的物理意义。我们设想在 $t=t_1^*$, 突然形成一厚度为 z_c 的附加水, 而且在 $t > t_1^*$, 它的厚度保持不变, z_c 由下式给出,

$$z_c = \frac{1}{2} (\zeta_c - \ln u_c^*) = z_c, \quad (4.24)$$

其中 ζ_c 仍是 (4.23) 第一式的根。又设想在 $t=t_1^*$, 附加水与板料的速度为

$$u_c = \frac{\frac{\theta_s}{\theta_m} e^{\frac{\theta_m}{\theta_s} \zeta_c}}{\frac{\theta_s}{\theta_m} + z_c} = 2u_c^*. \quad (4.25)$$

根据这个图片, 考虑到阻力 $\frac{2\sigma\delta}{R} \left(1 + \frac{\rho_s R}{2\sigma\delta} \right)$, 可以很容易的根据能量和动量关系, 求得板料运动的

时间 τ_c 和最大位移 \bar{w}_c ,其结果恰好和(4.23)相同。因此在 K 小的情况下,可以用(4.24)所规定的有效附加水厚度(或质量)及(4.25)所规定的有效初速度,计算变形时间和最大变形。

五、算例

这里给出 $\frac{\theta_m}{\theta_s}=10$, $\mu=\frac{\sigma\delta}{P_m R}=\frac{1}{50}$, $p_v=0$ (即 $K=\mu e^{\lambda_1}$)情况下的计算结果。采用的计算方法是差分法直接积分(4.9)式,另外还采用了一个近似,即在空化发生以前将 μ 作为小量忽略。这相当

$$\eta_1=0, \quad \frac{t^*}{\theta_m}=\frac{1}{\frac{\theta_m}{\theta_s}-1}\ln\frac{\theta_m}{\theta_s},$$

$$u^*=\frac{1}{1-\frac{\theta_s}{\theta_m}}\left\{\left(1+\frac{\theta_s}{\theta_m}\right)e^{\zeta}-2\frac{\theta_s}{\theta_m}e^{\frac{\theta_m}{\theta_s}\zeta}\right\}.$$

于取除此而外,在积分(4.9)式时,即在计算空化发生后的运动时,并不假设 μ 是小量。表1和图4给出计算结果。

由表1或图4可见, τ^* 与 τ 相比确实很小,因此,上节末所讨论的近似方法是适用的。由(4.23)的第一式解得,

$$\zeta_c=0.157,$$

代入第二和第三式得,

$$\tau_c=18.6\approx\frac{t_c}{\theta_m}.$$

$$\bar{w}_c=5.21.$$

由此可见,考虑到差分法中误差的积累,近似计算($K\rightarrow 0$)结果与较严格的计算结果是符合的。如 $\mu=\frac{1}{25}$,则 $\tau_c=\frac{18.6}{2}=9.3$, $\bar{w}_c=\frac{5.21}{2}=26.1$, μ 等于其他数值时(只要充分小), τ_c , \bar{w}_c 可按比例

表 1.

ζ	u_c	τ	τ^*	z	\bar{w} ($\bar{w}_1=0.146$)
0.005	0.7664	0.04096	0.00014065	0.0051407	0.1776
0.010	0.7585	0.08505	0.00057485	0.010575	0.2113
0.015	0.7488	0.14261	0.0013232	0.016323	0.2541
0.020	0.7388	0.2065	0.0024080	0.022408	0.301
0.030	0.7175	0.3582	0.0056827	0.035683	0.412
0.040	0.6926	0.5582	0.0106248	0.050625	0.555
0.050	0.6640	0.8213	0.0175043	0.067504	0.732
0.060	0.6316	1.1598	0.026649	0.086649	0.950
0.070	0.5948	1.5960	0.038472	0.10847	1.225
0.080	0.5534	2.1554	0.053494	0.13350	1.543
0.090	0.5088	2.8734	0.072390	0.16239	1.870
0.100	0.4547	3.7940	0.096045	0.19605	2.313
0.110	0.3964	4.9769	0.125681	0.23568	2.810
0.120	0.3317	6.5017	0.162950	0.28295	3.375
0.130	0.2602	8.4775	0.21040	0.34040	3.958
0.140	0.1815	11.0517	0.27870	0.41188	4.523
0.150	0.0954	14.4700	0.35392	0.50392	4.997
0.160	0.0035		(0.466)	(0.626)	5.198

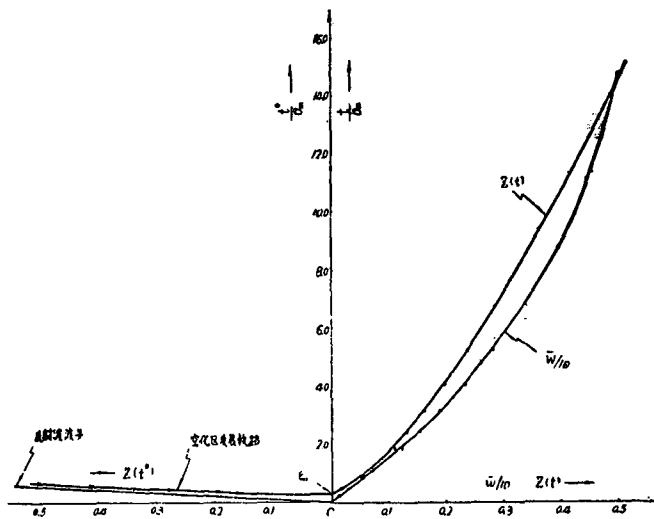


图 4

换标。

现在比较一下考虑与不考虑空化时，板料的不同位移。如果水是能够承受拉力而不空化的话，不难证明 w_c 的极限值是 $2\left(\frac{\theta_m}{\theta_s} \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0\right)$ 。在 $\frac{\theta_m}{\theta_s} = 10, \mu = \frac{1}{50}$ 的条件下，根据第三节中的公式可以求得 $w_c = 0.90$ ，这仅是有空化时的 5.96 分之一。

入射击波的总能量是 $\frac{P_m^2 \theta_m}{2\rho a}$ 。用于板料的变形功是 $\frac{2\sigma\delta}{R} w_c$ 。因此，击波能量的利用率 η ，在顾及空化的情况下为 83.3%，在忽略空化的条件下为 14.4%。表 2 给出这两种情况下，几个主要数据的对比。

表 2 $\mu = \frac{1}{50}, p_v = 0, \frac{\theta_m}{\theta_s} = 10$

	w_c	t_c/θ_m	z_c	$\eta\%$
考虑空化	5.21	18.6	0.587	83.3
不计空化	0.90	3.90	—	14.4

$z_c = 0.587$ ，因此在变形始了时，附加水的厚度是击波波长 $a\theta_m$ 的 0.587 倍，它的质量是板料的 5.87 倍。

现在再对能量和冲量的分配问题作进一步的讨论。入射击波的能量除用于使板料变形外，一部分为反射波所携走，另一部分则在空化水对板料的冲击过程中损失掉。冲量的分配也有三部分，一部分为反射波所携走，一部分用于克服变形阻力，另一部分消耗于板料停止运动后，空化水对板料的冲击。

在忽略 μ （空化发生以前）的情况下，可以容易地求得反射波所携走的能量和动量。所谓反射波是指反射波头与空化区内边界的渐近线之间的，指向水的内部的波（见图 3）。根据 (3.7) 式，如以 $p_r(y, t)$ 表示反射波的压力，有

$$\frac{p_r(y, t)}{2P_m} = -\frac{1 + \frac{\theta_s}{\theta_m}}{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}} e^{-\frac{t + \frac{y}{a}}{\theta_m}} + \frac{2}{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}} e^{-\frac{t + \frac{y}{a}}{\theta_s}}$$

由反射波所引起的质点速度 u_r 是

$$u_r = -\frac{p_r}{\rho_a}$$

以 E_r 表示反射波的能量, 则显然有

$$E_r = -\int_0^{t_2} (p_r u_r)_{y=0} dt,$$

其中 t_2/θ_m 是渐近线在 t/θ_m 轴上的截距(见图3)。积分后得,

$$E_r = \frac{P_m^2 \theta_m}{2\rho_a} \left\{ 1 - \frac{\left(1 + \frac{\theta_s}{\theta_m}\right)^2 e^{-2\frac{t_2}{\theta_m}} - 8\frac{\theta_s}{\theta_m} e^{-\frac{t_2}{\theta_m}} \left(1 + \frac{\theta_m}{\theta_s}\right) + 4e^{-2\frac{\theta_m}{\theta_s} \frac{t_2}{\theta_m}}}{\left(1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}\right)^2} \right\}$$

括号()中的量即代表能量的反射效率 η_r 。在 $\frac{\theta_m}{\theta_s} = 10$ 的条件下, 得 $\eta_r = 0.0374$ 。因此, 冲击损失占总能量的百分比是 $1.00 - 0.833 - 0.037 = 13\%$ 。

入射击波的动量 I 等于 $P_m \theta_m$ 。反射波所携走的动量 I_r 等于在 $y=0$, 反射波压力 $p_r(0, t)$ 对时间的积分,

$$\begin{aligned} I_r &= \int_0^{t/2} p_r(0, t) dt \\ &= I \left[1 - \frac{\left(1 + \frac{\theta_s}{\theta_m}\right) e^{-\frac{t_2}{\theta_m}} - 2\frac{\theta_s}{\theta_m} e^{-\frac{t_2}{\theta_m}}}{1 - \frac{\theta_s}{\theta_m}} \right] \end{aligned}$$

以 $\frac{\theta_m}{\theta_s} = 10$ 代入得 $I_r = -0.0294I$ 。用于克服板料变形阻力 $\frac{2\sigma\delta}{R}$ 的动量 I_p 是

$$I_p = \frac{2\sigma\delta}{R} t_c = 2 \frac{\sigma\delta}{P_m R} \frac{t_c}{\theta_m} I$$

因此当 $\frac{\theta_m}{\theta_s} = 10$, $I_p = 0.752I$ 。总的动量应当是守恒的, 根据这一原则得出, 在板料停止运动后, 继续冲向板料的空化水的动量 I_s 为

$$I_s = I - I_r - I_p = 0.277I$$

这部分动量不足以产生足够的压力来克服板料的变形阻力。表3列出能量和动量的分配情况。

表3 $\mu = \frac{1}{50}, p_v = 0, \frac{\theta_m}{\theta_s} = 10$

	入射波	反射波	利用部分	损失或其他未利用部分
能 量	1.00	0.037	0.833	0.13
动 量	1.00	-0.0294	0.752	0.277

这个例子一方面说明计算法，一方面说明空化对增加击波作用效果的显著影响。从爆炸成型角度看， $\frac{\theta_m}{\theta_s} = 10$ 取得大了些。如 $\frac{\theta_m}{\theta_s}$ 较小，空化作用会有所减弱，但无疑，考虑空化与不计空化仍将有显著差别。

六、結 束 語

本文比较详细地分析了，当击波正入射到一个具有变形阻力的平板时，空化所起的作用。经过分析，明确了空化作用的基本机制，并对平板问题提供了计算板料位移的方法。

水中爆炸波对板或壳的作用，可以分为两部分处理，一是击波作用，一是滞后流（或气球膨胀所引起的不可压缩流体的运动）的作用。这两种作用是通过空化区而互相联系的。因此这里所提供的关于空化作用的基本机制，将有助于分析其他条件下的击波作用和滞后流的作用问题。

参 考 资 料

- (1) 郑哲敏，爆炸成型模形律，中国科学院力学研究所研究报告（1962）。