

悬臂梁在一侧受有液体作用时的自由振动*†

郑哲敏 馬宗魁

(中国科学院力学研究所)

水坝在振动时必定带动水库中的蓄水使之进行相应的运动,因此实际参加振动的质量有所增加,除了坝体自身的质量外,还有流体的质量。同时,如果除去流体表面波的作用和它的可压缩性,这样两个一般说来是影响不大的因素,流体中便不能储存位能。把坝和流体看作一个振动系统,坝体变形的弹性能便是这个系统的全部位能。因此可以认为流体的存在增加了振动系统的质量,而不影响它的弹性恢复力。由此得出结论,水库中的蓄水使水坝的自振频率降低。

为了对液体的作用作出比较定量的估计,本文先以等截面的悬臂梁为例,分别用准确法和 Rayleigh 型的近似法,计算了当梁的一侧受有液体作用时,它的基本自由振动形式和频率。又用 Rayleigh 法对一厚度随直线变化的变截面梁进行了同样的计算。主要的结果列于图 2。最后,介绍了一个小参数法,与 Rayleigh 法相比,前者更适宜于计算较高的自由振动形式和频率。

一、基本方程

所取振动系统如图 1 所示, h 为梁的高度。为了使计算略为简化,我们假设液面的高度也是 h 。

考虑到在自由振动时,所有的变量都按正弦方式随时间 t 变化,我们在所有方程中将有关时间的因子 $e^{i\omega t}$ 消去。令 $w e^{i\omega t}$ 表示梁的挠度,于是 w 满足以下方程和边界条件:

$$EI \frac{d^4 w}{dy^4} - \gamma \omega^2 w = -p|_{x=0}, \quad (1)$$

$$w(0) = w'(0) = w''(h) = w'''(h) = 0.$$

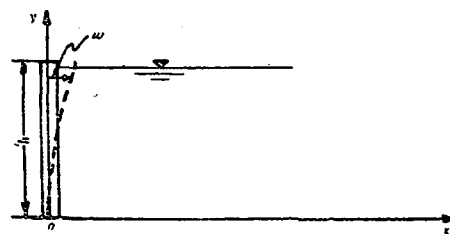


图 1

其中 EI 是梁每单位宽度(与 x, y 相垂直的方向上)的抗弯刚度, γ 是每单位宽度梁的密度。 $p e^{i\omega t}$ 是流体中由于振动而产生的压力变化,显然其中不包括静水压力。 $p|_{x=0}$ 表示在梁和流体接触面上水压力波动的幅度。严格地说,接触面不在 $x=0$,而在 $x = w e^{i\omega t}$ 。由于我们假设梁的挠度很小,近似地取接触面位于 $x=0$ 是可以允许的。

我们假设可以忽略流体的黏性和可压缩性。在这样的假设下,流体的运动可以用位势函数 $\phi e^{i\omega t}$ 表示,位势函数对 x 和 y 的一次偏导数分别表示流体中各质点的速度,同时

* 1959年1月收到。

† 本文大部分曾在1957年12月中国科学院土木建筑研究所召开的关于工程地震的学术报告会上宣读。

它满足二维的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

在梁与流体的接触面上, x 方向的速度必须是一致的, 因此有

$$e^{i\omega t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial t} (\omega e^{i\omega t}),$$

或者

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = i\omega \omega. \quad (2-1)$$

同理, 在底面上有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (2-2)$$

流体中的水压力可以根据 Lagrange 公式计算. 令 P 表示总的水压力, φ 表示位势函数, 则

$$\frac{P}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + gh - gy, \quad (3)$$

其中 u, v 分别表示 x 和 y 方向上流体的速度分量, g 为地心加速度. 显然, 由于梁的挠度很小, 它所引起的流体中速度变化也很小, 因此在上式中可以略去速度的平方项. 于是上式简化为

$$\frac{P}{\rho} = -i\omega \varphi e^{i\omega t} + g(h - y). \quad (4)$$

上式右端的第二项代表静水压力, 因此压力波动的幅度 p 和 φ 有如下的关系:

$$\frac{p}{\rho} = -i\omega \varphi. \quad (5)$$

当液体振动时自由表面上下波动, 以 $\delta e^{i\omega t}$ 表示它的升高. 因此在自由表面上 $y = h + \delta e^{i\omega t}$. 由于在那里压力恒等于零, 从(4)式我们得到

$$i\omega \varphi \Big|_{y=h+\delta e^{i\omega t}} = -g\delta,$$

考虑到 δ 一般远小于 h 这一情况, 上式简化为

$$i\omega \varphi \Big|_{y=h} = -g\delta. \quad (6)$$

自由表面升高的速度可以表示为 $\frac{\partial}{\partial t}(\delta e^{i\omega t})$ 或 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} e^{i\omega t}\right)_{y=h}$, 因此又有

$$i\omega \delta = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=h}. \quad (7)$$

从以上两式消去 δ , 我们得到

$$\left(\omega^2 \varphi - g \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=h} = 0. \quad (8)$$

这个是一般常用的自由表面的公式. Westergaard 在计算地震时坝面上水压力的变化时

會取

$$\varphi = 0 \quad (9)$$

作为自由表面的条件。可以用简单的论证来说明(8)式到(9)式的过渡。流体质点运动的速度与梁的速度是同级大小的数量,因此(8)式中的 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ 与 ωw 是同一级的数量。所以

$$\varphi \Big|_{y=h} \sim \frac{g w}{\omega}.$$

ω 增加时 $\frac{g w}{\omega}$ 减小,于是(9)式是(8)式在 ω 增加到极大时的极限情况。这也就是说,边界条件(9)适用于坝体或梁有较高自振频率的情况。以下讨论将以(9)式为依据。

最后我们要求在 $x \rightarrow \infty$ 时, $\varphi \rightarrow 0$, 因为在距离梁很远的地方,流体受到的干扰应当趋近于零。

综合以上讨论,并鉴于 φ 和 p 间的比例关系 [公式(5)], 关于流体部分的计算归结为决定这样的 p , 它满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

和边界条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \rho \omega^2 w, \\ \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0, \\ p \Big|_{y=h} &= 0, \\ p &\rightarrow 0 \quad \text{当 } x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (10-1)$$

方程(1),(10)和(10-1)是基本方程。

暂设 w 为已知,(10)式的解是

$$p = -\frac{4\rho\omega^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^h \omega(\eta) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2h} \eta d\eta \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi}{2h} y \cdot e^{-\frac{(2n+1)\pi x}{2h}}. \quad (11)$$

代入(1)式,我们得到 w 所需满足的微分积分方程和边界条件,

$$\begin{aligned} EI w^{IV} - \omega^2 \left[\gamma w + \frac{4\rho}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^h \omega(\eta) \cos \frac{(2n+1)\pi\eta}{2h} d\eta \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2h} \right] &= 0, \\ w(0) = w'(0) = w''(h) = w'''(h) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

二、方程(12)的解

当没有流体时,梁的自由振动方程是

$$EI w^{IV} - \gamma \omega^2 w = 0.$$

在方程(12)所规定的边界条件下,上式的解是

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(y) \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

其中

$$Y_i(y) = \alpha_i (\cos k_{iy} - \operatorname{ch} k_{iy}) + \sin k_{iy} - \operatorname{sh} k_{iy}, \quad \alpha_i = -\frac{\sin k_{ih} + \operatorname{sh} k_{ih}}{\cos k_{ih} + \operatorname{ch} k_{ih}}.$$

$k_i h$ 是频率方程

$$\operatorname{ch} k_i h \cdot \cos k_i h = -1$$

的根. 当 $i = 1, 2, 3, \dots$ 时, $k_i h$ 的值分别等于 1.875104, 4.694091, 7.854757, 10.995541, \dots . 与任一振动形式相应的自由振动频率 ω_{0i} 由下式给出:

$$\omega_{0i}^2 = \frac{EI}{\gamma} k_i^4.$$

因此, 我们有

$$\left. \begin{aligned} E I Y_i^{IV} - \omega_{0i}^2 \gamma Y_i &= 0, \\ Y_i(0) = Y_i'(0) = Y_i''(h) = Y_i'''(h) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Y_i 是一套完整的正交函数系. 因此在有流体作用的情况下, 可以将 ω 用 Y_i 展开,

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} A_i Y_i(y). \quad (14)$$

于是, 根据(13)式,

$$\omega^{IV} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i k_i^4 Y_i(y), \quad (15)$$

A_i 是待定的系数. 同理, $\cos \frac{(2n+1)\pi y}{2h}$ 也可以用 $Y_i(y)$ 展开, 我们得到

$$\cos \frac{(2n+1)\pi y}{2h} = \sum_{i=1}^{\infty} B_{in} Y_i(y), \quad (16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} B_{in} &= \frac{1}{D_i} \int_0^h \cos \frac{(2n+1)\pi \eta}{2h} Y_i(\eta) d\eta, \\ D_i &= \int_0^h Y_i^2(\eta) d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

完成上述积分后, 得到

$$\begin{aligned} D_i &= h \left[\frac{\operatorname{ch} k_i h \sin k_i h - \cos k_i h \operatorname{sh} k_i h}{\cos k_i h + \operatorname{ch} k_i h} \right]^2, \\ D_i B_{in} &= 2h \frac{1}{\left[\frac{(2n+1)\pi}{2} \right]^4 - (k_i h)^4} \left[(-1)^n \left(\frac{2n+1}{2} \pi \right)^3 \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\sin k_i h \operatorname{ch} k_i h - \operatorname{sh} k_i h \cos k_i h}{\cos k_i h + \operatorname{ch} k_i h} - (k_i h)^3 \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

将(14), (15), (16)三个表示式代入方程(12), 并比较 $Y_i(y)$ 的系数, 便得出下列方程组,

$$\gamma (\omega_{0i}^2 - \omega^2) A_i - \frac{4\rho\omega^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} B_{in} B_{in} D_i A_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (19)$$

这一系列联立方程的行列式等于零的条件便是计算频率的频率方程. 显然, 这个行列式包含 ∞^2 个元素.

进行数值计算时, 我们取 $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 和 $i = 1, 2, 3, 4$ 各项, 估计略去其余各

项,当仅仅计算第一个和第二个振动频率时,在(19)式中所引进的误差将在 5% 以内。

这样所得的联立方程为

$$\begin{aligned} & \left[\omega_{01}^2 - \left(1 + 0.183 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \right) \omega^2 \right] A_1 - 0.101 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \omega^2 A_2 - 0.0150 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \omega^2 A_3 - 0.0271 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \omega^2 A_4 = 0, \\ & -0.190 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \omega^2 A_1 + \left[\omega_{02}^2 - \omega^2 \left(1 + 0.252 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \right) \right] A_2 - 0.105 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \omega^2 A_3 - 0.0596 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \omega^2 A_4 = 0, \\ & -0.0277 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \omega^2 A_1 - 0.0101 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \omega^2 A_2 + \left[\omega_{03}^2 - \left(1 + 0.145 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \right) \omega^2 \right] A_3 - 0.0335 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \omega^2 A_4 = 0, \\ & -0.0503 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \omega^2 A_1 - 0.0574 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \omega^2 A_2 - 0.0336 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \omega^2 A_3 + \left[\omega_{04}^2 - \left(1 + 0.0815 \frac{4\rho h}{\pi\gamma} \right) \omega^2 \right] A_4 = 0. \end{aligned}$$

已知

$$\omega_{02}^2 = 39.2738 \omega_{01}^2, \quad \omega_{03}^2 = 307.914 \omega_{01}^2, \quad \omega_{04}^2 = 1182.40 \omega_{01}^2.$$

因此,根据不同的 $\frac{\rho h}{\gamma}$ 值,可以计算最低频率和与其相应的振动形式。所得之结果列于表 1。

表 1

$\frac{\rho h}{\gamma}$	ω_1^2/ω_{01}^2	1 : $\frac{A_2}{A_1}$: $\frac{A_3}{A_1}$: $\frac{A_4}{A_1}$
0.5	0.8961	1 : 0.002948 : 0.00005161 : 0.00002438
1	0.8104	1 : 0.005323 : 0.00009344 : 0.00004421
2	0.6807	1 : 0.008931 : 0.0001572 : 0.00007452
3	0.5869	1 : 0.01157 : 0.0002034 : 0.00009671

计算所得之第二个频率值如表 2 所示。

表 2

$\frac{\rho h}{\gamma}$	ω_2^2/ω_{02}^2
1	0.7372
2	0.6433
3	0.5582

三、用 Rayleigh 法求最低频率

以 ω 乘(12)式的两端,并对 y 从 0 到 h 进行积分,借部分积分和边界条件,可得

$$\omega^2 = \frac{\int_0^h EI \left(\frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dy}{\int_0^h \gamma w^2 dy + \frac{4\rho}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\int_0^h w(\eta) \cos \frac{(2n+1)\pi\eta}{2h} d\eta \right]^2}, \quad (20)$$

(20)的分子是两倍最大弹性能。分母的前一项是 $\frac{2}{\omega^2}$ 倍梁的最大动能,第二项是 $\frac{2}{\omega^2}$ 倍流体的最大动能。(20)式实际所表示的是最大动能等于最大位能这一事实,因此可以更简

便的从能量观点推导(20)式,而无需借助于微分方程. 我們有意地将 EI 和 γ 写在积分号之内,使(20)式可以直接应用于变截面的悬臂梁.

在沒有流体时, $\rho = 0$, 因此有

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^h EI \left(\frac{d^2 w}{dy}\right)^2 dy}{\int_0^h \gamma w^2 dy}. \quad (21)$$

比較以上二式,并假設在这两个情况下,振动形式是相似的,我們有

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + \frac{4\rho}{\pi} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\int_0^h w(\eta) \cos \frac{(2n+1)\pi\eta}{2h} d\eta \right]^2}{\int_0^h \gamma w^2 dy}. \quad (22)$$

設 $w = 1 - \cos \frac{\pi y}{2h}$, 則对于一均匀悬臂梁所得到的結果如表 3 所示.

表 3

$\frac{\rho h}{\gamma}$	$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$
0.5	0.9000
1.0	0.8183
2.0	0.6920
3.0	0.5999

表 4

$\frac{\rho h}{\gamma B}$	$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$
1	0.595
2	0.425
3	0.330
4	0.269

在图 2 画出了 $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ 和 $\frac{\rho h}{\gamma}$ 間关系的曲线. Rayleigh 法給出的最低振动频率与“精确”解所給出的是非常接近的.

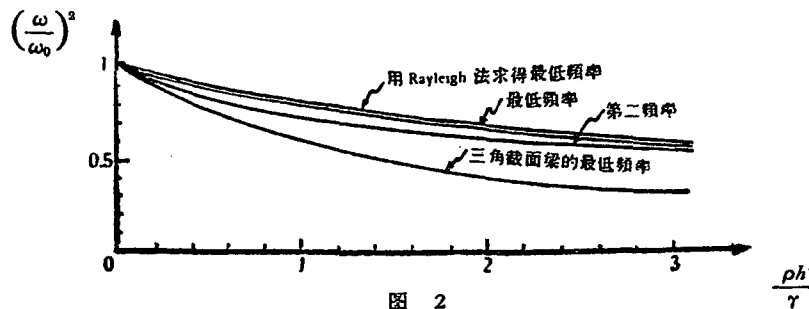


图 2

又設一變截面的悬臂梁,其厚度 b 随直綫变化:

$$b = B - y \tan \theta,$$

如果水的深度不是 h , 而是 $H (\leq h)$, 那么(20)式应该写成

$$\omega^2 = \frac{\int_0^h EI \left(\frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dy}{\int_0^h \gamma w^2 dy + \frac{4\rho}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\int_0^H w(\eta) \cos \frac{(2n+1)\pi\eta}{2H} d\eta \right]^2}, \quad (20)$$

与(22)式相应的公式变成

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1 + \frac{4\rho}{\pi} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\int_0^H w(\eta) \cos \frac{(2n+1)\pi\eta}{2H} d\eta \right]^2}{\int_0^h \gamma w^2 dy}. \quad (22')$$

四、计算水库蓄水对坝体自振特征影响的一个小参数法

在实际问题里, 蓄水对自由振动影响不是很大的情况下, 可以用小参数法近似地计算蓄水的影响。以下我们仍以悬臂梁为例说明本方法的应用。推广到更一般的情况是没有困难的。

为便于讨论, 先将所有物理量按下述变换写作无量纲的形式:

$$\begin{aligned} x &= \xi h, & y &= \eta h, & w &= \zeta h, \\ \lambda^4 &= \frac{\gamma \omega^2 h^4}{EI}, & \varepsilon &= \frac{h\rho}{\gamma}, & p &= \frac{EI}{h^3} \sigma. \end{aligned}$$

代入(1)式和(10), (10-1)式, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \zeta^{IV} - \lambda^4 \zeta &= -\sigma|_{\varepsilon=0} & 0 \leq \eta \leq 1, \\ \zeta(0) = \zeta'(0) = \zeta''(1) = \zeta'''(1) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \eta^2} &= 0, & 0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \eta \leq 1; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \varepsilon \lambda^4 \zeta, & \xi = 0; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = 0, & \eta = 0; \\ \sigma = 0, & \eta = 1; \\ \sigma \rightarrow 0, & \xi \rightarrow \infty; \end{aligned} \right\}$$

我们把 ε 作为小参数, 将未知函数 σ, ζ 和待定频率参数 λ 按 ε 的幂级数展开为

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \zeta_0(\eta) + \varepsilon \zeta_1(\eta) + \dots, \\ \sigma &= \varepsilon \sigma_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 \sigma_2(\xi, \eta) + \dots, \\ \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$\varepsilon = 0$ 相当于库中无水的情况。将这些表示式代入(23)式并比较 $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots$ 各项系数, 我们得到一系列, 依次计算 $\zeta_0, \sigma_1, \zeta_1, \dots$ 的方程和边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0^{IV} - \lambda_0^4 \zeta_0 &= 0, \\ \zeta_0(0) = \zeta_0'(0) = \zeta_0''(1) = \zeta_0'''(1) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} &= \lambda_0^4 \zeta_0, \quad \xi = 0, \quad \sigma_1 \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty; \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \eta} &= 0, \quad \eta = 0; \\ \sigma_1 &= 0, \quad \eta = 1; \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1^{IV} - \lambda_0^4 \zeta_1 &= -\sigma_1|_{\xi=0} + 4\lambda_0^3 \lambda_1 \zeta_0, \\ \zeta_1(0) = \zeta_1'(0) = \zeta_1''(1) = \zeta_1'''(1) &= 0; \\ \dots\dots\dots & \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

第二节中已经给出(25)式的解。令 $Y_i(\eta)$ 表示无水时的振动形式, λ_{0i} 表示与其相应的特征值或频率参数。根据每一个这样的 $\zeta_{0i}(= Y_i)$, (26)式的解是

$$\sigma_1 = -\frac{4\lambda_{0i}^4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^1 Y_i(z) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} z dz \cos \frac{(2n+1)\pi\eta}{2} \cdot e^{-\frac{(2n+1)\pi\xi}{2}}.$$

(27)式的一般解可以写为

$$\zeta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n(\eta).$$

由于 ζ_0 中已经包括了 $Y_i(\eta)$, 可以令 $B_i = 0$ 。将上述二式代入(27), 并比较 $Y_n(\eta)$ 各项的系数, 我们得到

$$\left. \begin{aligned} B_n &= \frac{4\lambda_{0i}^4}{(\lambda_{0n}^4 - \lambda_{0i}^4)\pi} \frac{1}{2n+1} \left[\int_0^1 Y_i \cos \frac{(2n+1)\pi\eta}{2} d\eta \right] \left[\int_0^1 Y_n \cos \frac{(2n+1)\pi\eta}{2} d\eta \right] \frac{1}{D_n} \quad n \neq i, \\ \lambda_1 &= -\frac{\lambda_{0i}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\int_0^1 Y_i \cos \frac{(2n+1)\pi\eta}{2} d\eta \right]^2 \frac{1}{D_i}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

因此

$$\lambda \cong \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 = \lambda_{0i} \left(1 - \frac{1}{D_i} \frac{h\rho}{\gamma\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\int_0^1 Y_i \cos \frac{(2n+1)\pi\eta}{2} d\eta \right]^2 \right). \quad (29)$$

根据这个公式可以直接计算流体对各阶自振频率的影响。

参 考 文 献

Westergaard, M., Water Pressures on Dams During Earthquakes, *ASCE—Proc.* 58 (1932).

VIBRATION OF CANTILEVER BEAM PLACED AGAINST WATER WITH FREE SURFACE

CHENG CHE-MIN, MA ZONG-KUI
(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

An analysis on the effect of water on the vibration characteristics of a cantilever beam is presented. This constitutes a preliminary attempt to assess the influence of impounded water on the vibration of dams and to arrive at an approximate method of analysis within engineering accuracy.

The exact method is based on eigen-function expansions, while the two proposed approximate methods are based respectively on energy considerations and perturbation in terms of a small parameter. Numerical results of frequency computations carried out on the basis of these methods are presented for comparison.