第 2 卷 第 1 期 力 学 学 报 Vol. 2, No. 1
1958 年 1 月 ACTA MECHANICA SINICA Jan., 1958

# 平板在流体作用下的振动*

郑 哲 敏

（中国科学院力学研究所）

本文討論平板在流体中的一个振动問題：我們假設平板在 $x$ 方向是無限長的（見圖 1），而且在等間隔上裝有簡支鉸座，因而在这些簡支綫上平板的位移等于零．在板和与其平行的牆之間，有一不可压縮和無粘性的水流，它在 $x$ 方向的流速是 $U$．

这样一个由板和流体構成的振动体系具有一些特殊的振动特性．我們在本文討論这个体系的自由振动問題．除了給出它的自由振动形式和相应的頻率外，并將分析在不同流速下振动的稳定性．

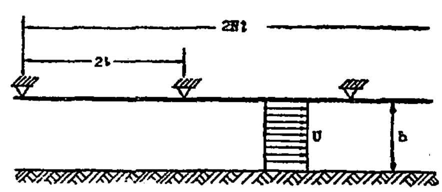


圖 1.

板的运动方程式可以写作

$$B\frac{d^4w}{dx^4}-\rho h\omega^2 w=P, \qquad (1)$$

其中 $we^{i\omega t}$ 是板的撓度，$t$ 为时間，$\omega$ 是尙待决定的自由振动圓周頻率，$B$ 是板的每單位寬度的抗弯剛度，$h$ 是板的厚度，$\rho$ 是密度．$Pe^{i\omega t}$ 表示作用在板上的正压力．$Pe^{i\omega t}$ 中除了包含水压力 $Pe^{i\omega t}$ 之外，还包含支点的作用力．这些作用力应当認为是綫載荷．

当振动發生后，流体中的速度場發生改变．在微小振动的假定下，这些改变可以視作小量．因此，如果令 $\varphi e^{i\omega t}$ 表示扰动位勢函数，$p$ 由下式給出

$$\frac{p}{\gamma}=-i\omega\varphi-U\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ (y=0), \qquad (2)$$

$\gamma$ 是流体的密度．$\varphi$ 滿足拉氏方程式

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \qquad (3)$$

而且在 $y=0$ 和 $y=-h$ 处分別滿足以下的边界条件，

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0}=i\omega w+U\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad (4)$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=-h}=0. \qquad (5)$$

我們可以假定 $w$ 和 $\varphi$ 是 $x$ 的周期函数其周期为 $2Nl$（$N$＝任意正整数），而無損于解的一般性．由是，我們可以用富氏級数將 $w$，$\varphi$ 和 $P$ 表示如下：

*本文是 1956 年 9 月在第九屆国际应用力学会議上所提出报告的一部分，原題为"流体彈性力学"．

$$w=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\frac{n\pi x}{Nl}} \tag{6}$$

$$\varphi=\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n(y) e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}, \tag{7}$$

$$P=p+\sum_{k=0}^{N-1} R_k\delta(x-2kl), \quad 0\leqslant x<2Nl;$$

$$=p+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{R_k}{2Nl} e^{-i\frac{2nk\pi}{N}+i\frac{n\pi x}{Nl}}, -\infty<x<\infty. \tag{8}$$

上式中 $R_k(k=0,\cdots,N-1)$ 代表支座加于板的綫載荷，它們也是 $x$ 的周期函数．$\delta$ 是狄拉克函数．

$w$ 的表示式必須在支座上滿足撓度恆等于零的条件．因此我們有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\frac{2ns\pi}{N}}=0, \qquad s=0,1,\cdots N-1. \tag{9}$$

其次，因为流体假定为不可压縮的，在任意 $N$ 个跨度内板与牆之間的体积必須保持不变．因此我們取

$$A_0=0. \tag{10}$$

本問題的求解过程在于系数 $A_n$, $R_k$ 和圓周頻率 $\omega$ 的决定．首先，根据方程式(3)和边界条件(4)和(5)，$\varphi$ 可以用 $A_n$ 表示．將 $\varphi$ 代入(2)，我們得到 $p$ 的表示式如下：

$$\frac{p}{\gamma}=\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\omega+U\frac{n\pi}{Nl}\right)^2\frac{Nl}{n\pi}A_n e^{i\frac{n\pi x}{Nl}}\coth\frac{n\pi h}{Nl}. \tag{11}$$

再將上式代入(8)式，幷將 $P$ 代入(1)式．比較富氏級数的諸項系数即得 $A_n$ 与 $R_k$ 的关系如下：

$$A_n=F_{\frac{n}{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{R_k}{2Nl} e^{-i\frac{2k\pi n}{N}}, \tag{12}$$

其中

$$F_{\frac{n}{N}}=F_{\frac{n}{N}}(\omega)=\left\{B\left(\frac{n}{N}\right)^4\frac{\pi^4}{l^4}-\rho h\omega^2-\frac{\gamma l}{\pi\left(\frac{n}{N}\right)}\left[\omega+\frac{\pi U}{l}\frac{n}{N}\right]^2\coth\left(\frac{\pi h}{l}\frac{n}{N}\right)\right\}^{-1}, \tag{13}$$

如將(12)式代入撓度在支座上等于零的条件(公式9)，便得到决定 $R_k$ 的齐次綫性联立方程式．这組联立方程式的行列式等于零的条件便是决定 $\omega$ 的頻率方程式．

我們用下述綫性轉換以簡化以上的联立方程：令

$$n=Nq+s, \qquad s=0,1,\cdots,N-1, \qquad q=\cdots-1,0,+1,\cdots. \tag{14}$$

于是(12)式可以写作

$$A_{Nq+s}=T_{\frac{s}{N}}F_{q+\frac{s}{N}}, \tag{15}$$

其中

$$T_{\frac{s}{N}}=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{R_k}{2Nl} e^{-i\frac{2ks\pi}{N}}. \tag{16}$$

用同样替換，(9)式变为

$$\sum_{s'=0}^{N-1} e^{i\frac{2ss'\pi}{N}}\sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{Nq+s}=0.$$

上式的唯一解是

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{Nq+s}=0.$$

將表示式(15)代入上式卽得

$$T_{\frac{s}{N}}\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+\frac{s}{N}}=0, \qquad s=0, 1, \cdots, N-1. \tag{17}$$

这便是經过綫性轉換(16)之后的联立方程組．事实上通过这样的轉換，它們已經成为互不相关的正則形式了．它們的解或者是 $T_{\frac{s}{N}}=0$, $s=0, 1, \cdots, N-1$；或者是

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+\frac{s}{N}}=0,\\&T_{\frac{s}{N}}\neq 0;\end{aligned}\right\} \tag{18.a}$$

$$T_{\frac{s'}{N}}=0, \qquad s'\neq s. \tag{18.b}$$

在第二种情况下，(18.a)便是頻率方程．如果 $\omega$ 是(18.a)的一个根，与其相应的 $w$ 便是

$$w=T_{\frac{s}{N}}e^{i\frac{s\pi x}{Nl}}\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+\frac{s}{N}}e^{i\frac{q\pi x}{l}}. \tag{19}$$

从(16)式又得到

$$R_k=2lT_{\frac{s}{N}}e^{i\frac{2ks\pi}{N}}. \tag{20}$$

在第一种情况下，通常 $w\equiv 0$．这也就是說沒有振动．但也有例外的情况．后者可以作为(18)的一个 $T_{\frac{s}{N}}\to 0$ 的特殊情况，因而無需分别討論．

现在就以下几方面討論所得的解：

(一)观察公式(13)和(18.a)可見，在一般情况下，而且对一定的 $\frac{s}{N}$ 而言，如果 $\omega$ 是一个根，$-\omega$ 便不是根．但是 $-\omega$ 却是另一个，以 $1-\frac{s}{N}$ 代替了 $\frac{s}{N}$ 之后的頻率方程式的根．这是因为

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+\left(1-\frac{s}{N}\right)}(-\omega)=\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{-q-\left(1-\frac{s}{N}\right)}(-\omega)=\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+\frac{s}{N}}(\omega)=0. \tag{21}$$

因此，为了求得所有的頻率值，我們仅需令 $\frac{s}{N}$ 为 0 与 $\frac{1}{2}$ 之間的任一分数．

(二)板的撓度是 $we^{i\omega t}$．由于(18)式所給出的 $w$ 通常是 $x$ 的复函数，撓度不能表示为 $e^{i\omega t}f(x)$，其中 $f(x)$ 为实函数．因此，沿 $x$ 方向板上各点的运动，虽然具有共同的周期，却有着不同的相差．例外的情形分别發生于 $U=0$ 和 $\omega=0$．

(三)就一定的 $\frac{s}{N}$ 值，(18.a)有無穷多个分离的根．当 $\frac{s}{N}$ 取 0 与 $\frac{1}{2}$ 之間之任意值时，所有的根便分别坐落在通常是互相分离的間隔里．在这些間隔里根的分布是密集的．这一点最容易用沒有流体的情况($\gamma=0$)說明．

当 $\gamma=0$(18.a)式变为

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(q+\frac{s}{N}\right)^4-\Omega^2}=0,$$

其中，$\Omega^2=\rho h\omega^2l^4/B\pi^4$. 借余数法，上式可以写作

$$\cos\frac{2\pi s}{N}=\frac{\sin\mathrm{h}2\pi\sqrt{\Omega}\cos2\pi\sqrt{\Omega}-\cos\mathrm{h}2\pi\sqrt{\Omega}\sin\ 2\pi\sqrt{\Omega}}{\sin\mathrm{h}2\pi\sqrt{\Omega}-\sin2\pi\sqrt{\Omega}}. \tag{22}$$

当 $\Omega$ 較大时，可以漸近地將上式写作

$$\cos\frac{2\pi k}{N}=\sqrt{2}\cos 2\pi\left(\sqrt{\Omega}+\frac{1}{8}\right). \tag{23}$$

作为上式的一个根，$\Omega$ 显然只能存在于某些特定的互不相連的間隔內，而且在这些間隔中根的分布是密集的。当 $\frac{k}{N}=\frac{1}{2}$, 0.10, 和 $\frac{k}{N}\to0$ 时，最小的根是 $\Omega=\frac{1}{4}$, 0.519, 和 0.568.

(四) 由于流体的單向流动，同一波長的正弦列波有不同的順流和逆流前进的速度。因此当流速 $U\neq0$ 时，兩个同样波長的正弦列波不能形成固定的結点，更不能滿足在支撑点上板的撓度等于零的条件。但在某些特定的流速，不同波長，但是波長成簡單倍数的正弦列波却可以在簡支的位置上形成結点。这时显然 $R_k=0$ 而且板上各点作不同相角的簡諧振动。

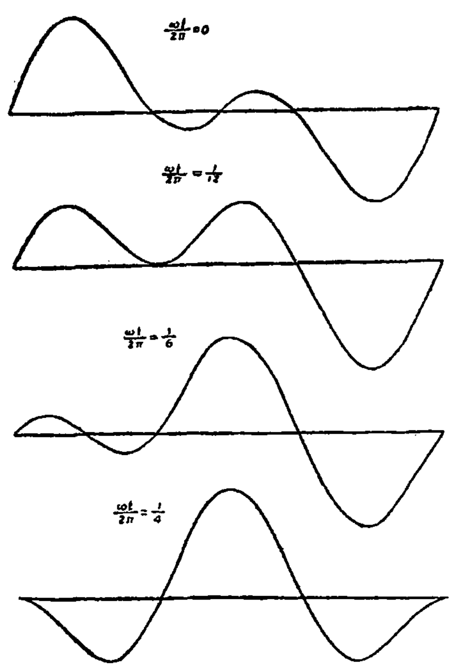


圖 2.

作为上述情况的一个例子，我們可以有这样的一个解

$$we^{i\omega t}=e^{i\omega t-i\frac{\pi x}{3l}}\left(1-e^{i\frac{\pi x}{l}}\right). \tag{24}$$

它滿足支撑点位置等于零的要求。根据(18)式我們要求 $\omega$ 滿足下列方程式

$$1/F_{-\frac{1}{3}}=-1/F_{\frac{2}{3}}=0.$$

这样的联立方程同时决定了 $\omega$ 和 $U$ 的值。因此，我們說，只有在特定的流速下，像(24)式那样的簡單解方才成立。在一般情况下，解必然包含(19)式中所有各項。圖 2 表示在 $\frac{1}{4}$ 周期間板的振动，所根据的公式是(24)式。

(五) 流体的存在卽使在流速等于零的情况下，对頻率，尤其是較低的頻率，有显著的影响。取 $\gamma l/\rho h=90$, $H/l=0.40$. 这时，相应于 $\frac{s}{N}=\frac{1}{2}$, 0.10 和 $\frac{s}{N}\to0$ 的最低頻率值各为 $\Omega=$ $=0.0245$, 0.0137, 和 0. 最低的頻率值趋近于零，当 $\frac{s}{N}\to0$, 是由于 $\coth\frac{\pi h}{l}\frac{s}{N}\to\infty$ 的結果，因而与流体密度的数值無关。

当 $U=0$ 时，板上各个的运动便沒有相角差。

(六)当流速增加时，$\omega$ 的值随之改变．仍取 $\gamma l/\rho h=90$，$H/l=0.40$，$\frac{s}{N}=0.5$ 及 $0.10$，我們計算了 $\Omega$ 与 $U$ 之間的函数关系如圖 3 所示．

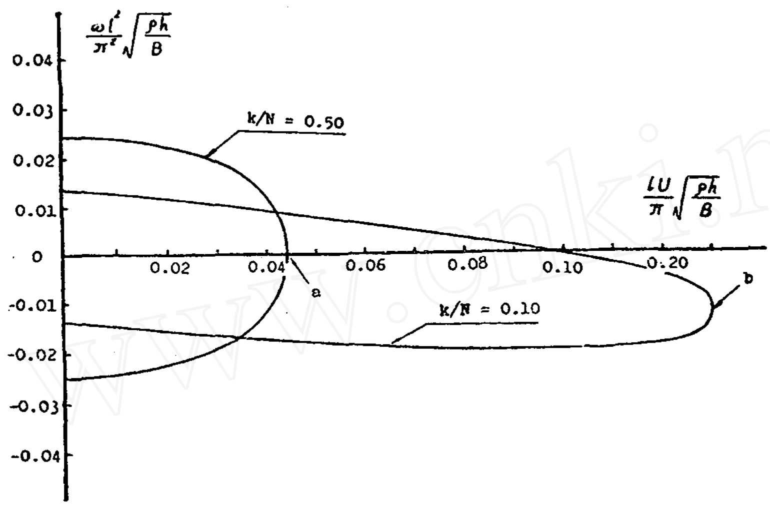


圖 3.

特别有兴趣的是圖 3 中的 $a$ 点和 $b$ 点．在这些点上，代表频率的曲綫有垂直的切綫．在 $a$，$b$ 点的左边，(18.a)式的最小根是实数，在 $a$，$b$ 点的右边，根便分别是虚数或复数．由于 $\pm\omega$ 都是頻率方程的根(虽然一般說来，相应于不同的 $\frac{s}{N}$ 值)当 $\omega$ 为虚数或复数时，相应的振动便不是稳定的了．可以証明，当流速不大于 $a$ 点所表示的速度时，沒有不稳定的振动．因此，$a$ 点的流速可以称为临界流速．临界流速的一般公式是，

$$U^2=\frac{1}{\gamma}B\left(\frac{\pi}{2l}\right)^3\tanh\frac{\pi H}{2l}. \tag{25}$$

这个公式是由 $\omega=0$ 和 $1/F_{\frac{1}{2}}=0$ 得出的．