饱和土在反平面剪切条件下的应变局部化分析 1)

鲁晓兵 * 王义华 * 王淑云 * 崔鹏 †
* (中国科学院力学研究所, 北京 100080)
† (中国科学院成都山地所, 成都 610041)

摘 要 对反平面剪切条件下饱和土中单个剪切带的空间发展进行了分析. 结果表明, 如果比例加载路径与局部化方向的夹角 $\Delta\theta = \pi/2$, 则变形是稳定的, 这相当于中性加载. $\Delta\theta > \pi/2$ 的情况相当于弹性卸载. $\Delta\theta < \pi/2$ 的情况相当于加载, 且当 $\Delta\theta$ 等于零时, 失稳发展最快. 扰动频率 α 为正值的条件是要求孔压软化效应超过应变硬化效应.

关键词 局部化, 饱和土, 反平面剪切, 小扰动分析

引 言

剪切带是饱和土中经常出现的现象, 该现象与材料性质和局部应变密切相关 [1]. 例如, 当孔隙压力软化效应超过应变硬化效应时 [2], 应变局部化将产生. Vadoulakis 等 [3,4] 研究了简单剪切和二维应力条件下的剪切带产生条件, 考虑了水可压、颗粒不可压的情况.

饱和土中剪切应变局部化现象是理论和实验研究的焦点. 理论研究主要采用与局部化失效模式的失稳和分岔分析有关 [1~4]. 典型的是用小扰动方法分析失稳条件. 这种情况下由经典的连续得到关于孔小扰动的扩散方程 [1,2], 进而由方程性质转变条件求得失稳条件. 或者, 将饱和孔隙介质中的局部化视为分岔问题 [3,4] 求失稳条件. 实验研究主要是通过常规三轴实验 [5,6]、以及平面应变压缩实验进行的 [7]. 研究表明, 均匀的响应经常伴随扩散的、非均匀的变形模式, 随后明显的剪切带就产生了. 但是, 该问题经常是在惯性自由和不排水条件下进行的 [1,8~10].

鉴于此, 我们将研究反平面剪切条件下单个剪切带的发展, 以便对该问题中的失稳现象有深刻的理解. 由于同时考虑水及颗粒可压将增加较大难度, 在该文中只考虑颗粒可压, 水不可压情形.

1 控制方程

考虑反平面剪切变形 [11], 运动可表示为如下的形式

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z + w(x, y) \tag{1}$$

其中 x, y, z 是 Lagrangian 坐标, w 是 z 平面垂直方向的位移.

动量平衡方程为 (Lu 2001)

$$(1-n)\rho_s \ddot{w}_s - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -kn^2(\dot{w} - \dot{w}_s) \tag{2}$$

1) 国家自然科学杰出青年基金 (40025103) 和国家自然科学基金 (10202024) 资助项目

其中 ρ_s 是颗粒密度，n 是孔隙率，τ_{xz}, τ_{yz} 是剪应力，K 定义为相间阻力系数，$\dot{w}_s$ 是颗粒沿 z 方向的速度.

将式 (2) 对 x 进行微分，则有

$$(1-n)\rho_s\ddot{\gamma}_{xz} - \frac{\partial^2\tau_{xz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y\partial x} = -kn^2\dot{\gamma}_{xz} \tag{3}$$

骨架的质量守恒方程是 [12]

$$\frac{1}{1-n}\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial v_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{sy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \tag{4}$$

孔隙水的质量守恒方程为 [12]

$$-\frac{\partial}{\partial x}[n(v_{wx}-v_{sx})] - \frac{\partial}{\partial y}[n(v_{wy}-v_{sy})] = \frac{\partial v_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{sy}}{\partial y} + \frac{1-n}{\rho_s}\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{n}{\rho_w}\frac{\partial \rho_w}{\partial t} \tag{5}$$

假设 ρ_w =const, 则上述方程可简化为

$$\frac{1}{1-n}\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon_{sv}}{\partial t} \tag{6}$$

其中 $\frac{\partial \varepsilon_{sv}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial v_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{sy}}{\partial x}\right)$, 且

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} = -\frac{n}{\rho_s}\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{1}{1-n}\frac{\partial n}{\partial t} \tag{7}$$

其中 $q_x = [n(v_{wx}-v_{sx})]$, $q_y = [n(v_{wy}-v_{sy})]$.

根据 Darcy 定律，得到流量与孔隙压力梯度的关系

$$q_x = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad q_y = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{8}$$

我们将分析已经发生塑性变形的剪切变形区，故可假设塑性应变率分量较弹性应变率大得多，且孔隙的变化主要是剪切引起的，这样，就可以得到如下的孔隙变化与外力功的关系 (剪胀律)

$$-\frac{1}{1-n}\frac{\partial n}{\partial t} = C_1(\tau_{yz}\dot{\gamma}_{xz} + \tau_{yz}\dot{\gamma}_{yz}) \tag{9}$$

其中 C_1 是材料参数，可以由简单剪切实验得到.

假设颗粒压缩主要是由于孔隙压力引起的，就可以得到如下的方程

$$-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{1}{E_r}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{10}$$

其中 E_r 是颗粒的压缩模量.

这样，总的质量守恒方程为

$$-\frac{1}{E_r}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{Kn}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = -c_1(\tau_{xz}\dot{\gamma}_{xz} + \tau_{yz}\dot{\gamma}_{yz}) \tag{11}$$

其中 p 是孔隙压力.

2 小扰动分析

取

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz}&=\tau_{xz}^0+\tau_{xz}^*\mathrm{e}^{\alpha t+\mathrm{i}\beta_1 x+\mathrm{i}\beta_2 y}\\ \tau_{yz}&=\tau_{yz}^0+\tau_{yz}^*\mathrm{e}^{\alpha t+\mathrm{i}\beta_1 x+\mathrm{i}\beta_2 y}\\ \gamma_{xz}&=\gamma_{xz}^0+\gamma_{xz}^*\mathrm{e}^{\alpha t+\mathrm{i}\beta_1 x+\mathrm{i}\beta_2 y}\\ \gamma_{yz}&=\gamma_{yz}^0+\gamma_{yz}^*\mathrm{e}^{\alpha t+\mathrm{i}\beta_1 x+\mathrm{i}\beta_2 y}\\ p&=p^0+p^*\mathrm{e}^{\alpha t+\mathrm{i}\beta_1 x+\mathrm{i}\beta_2 y}\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

其中 $\tau_{xz}^0,\tau_{yz}^0,\gamma_{xz}^0,\gamma_{yz}^0,p^0$ 是方程式 (3) 和 (11) 的一组解，且较 $\tau_{xz}^*,\tau_{yz}^*,\gamma_{xz}^*,\gamma_{yz}^*,p^*$ 大得多，上式右边第二项是小扰动量，α 是小扰动频率，β_1,β_2 分别为 x 和 y 方向的波数.

将方程式 (12) 代入控制方程 (3) 和 (12)，保留一阶项，则得到如下方程组

$$\begin{aligned}&-\left(\frac{\alpha}{E_r}+\frac{k_1^2+k_2^2}{Kn}\right)p^*+c_1(\tau_{xz}^0\dot{\gamma}_{xz}^*+\tau_{xz}^*\dot{\gamma}_{xz}^0+\tau_{yz}^0\dot{\gamma}_{yz}^*+\tau_{yz}^*\dot{\gamma}_{yz}^0)\times\\ &[Kn^2\alpha+(1-n)\rho_s\alpha^2]\gamma_{xz}^*-\beta_1^2\tau_{xz}^*-\beta_2^2\tau_{yz}^*=0\end{aligned}\tag{13}$$

将应力分量 τ_{xz}^0,τ_{yz}^0, 扰动应变分量 $\gamma_{xz}^*,\gamma_{yz}^*$ 扰动波数 β_1,β_2 分别写成方向角 $\theta_0,\theta_1,\theta_2$ 与总量的关系可以使分析更方便 [11]. 即有

$$\sigma_{xz}^0=\tau^0\cos\theta_0,\quad \sigma_{yz}^0=\tau^0\sin\theta_0,\quad \dot{\gamma}_{xz}^0=\dot{\gamma}^0\cos\theta_0,\quad \dot{\gamma}_{yz}^0=\dot{\gamma}^0\sin\theta_0\tag{14}$$

$$\gamma_{xz}^*=\gamma^*\cos\theta_1,\quad \gamma_{yz}^*=\gamma^*\sin\theta_1,\quad \beta_1=\beta\cos\theta_2,\quad \beta_2=\beta\sin\theta_2\tag{15}$$

上述分解可保证塑性应变方向与应力方向一致.

根据位移和应变的关系，可以得到如下的相容性方程

$$\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}=\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\tag{16}$$

从式 (16) 和小扰动假设式 (12), 可以得到

$$\frac{\partial\gamma_{xz}^0}{\partial y}+\mathrm{i}\beta_2\gamma_{xz}^*\exp(\alpha t+\mathrm{i}\beta_1 x+\mathrm{i}\beta_2 y)=\frac{\partial\gamma_{yz}^0}{\partial x}+\mathrm{i}\beta_1\gamma_{yz}^*\exp(\alpha t+\mathrm{i}\beta_1 x+i\beta_2 y)\tag{17}$$

将式 (15) 的最后两式代入上式，则得到

$$\gamma_{xz}^*\sin\theta_2=\gamma_{yz}^*\cos\theta_2\tag{18}$$

将式 (15) 的前两式代入式 (18), 则有

$$\theta_1=\theta_2\tag{19}$$

因为小扰动寻找的是塑性变形状态的增量，我们可以忽略弹性应变增量，则有

$$\sigma_{xz}^*=\tau^*\cos\theta_1,\quad \sigma_{yz}^*=\tau^*\sin\theta_1\tag{20}$$

将式 (14), 式 (15), 式 (19) 和式 (20) 代入式 (13), 就得到

$$\left.\begin{aligned}&C_1[\alpha\tau_0\gamma^*+\dot{\gamma}_0\tau^*]\cos\Delta\theta\gamma^*-\left(\frac{\alpha}{E_r}+\frac{\beta^2}{Kn}\right)p^*=0\\&[(1-n)\rho_s\alpha^2+Kn^2\alpha]\gamma^*+\beta^2\tau^*=0\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

其中 $\Delta\theta=\theta_0-\theta_1$.

假设屈服应力 τ_0 是应变、应变率和孔压的函数，即

$$\tau_0=f(\varepsilon,\dot{\varepsilon},p)\tag{22}$$

这样就得到

$$\begin{aligned}\tau^*=\mathrm{d}\tau_0=\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\right)_0\mathrm{d}\varepsilon+\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{\varepsilon}}\right)_0\mathrm{d}\dot{\varepsilon}-\left(-\frac{\partial f}{\partial p}\right)_0\mathrm{d}p=\\R_0\gamma^*+H_0\alpha\gamma^*-Q_0p^*\end{aligned}\tag{23}$$

该式定义了应变硬化参数 R_0, 应变率硬化参数 Q_0, 孔压软化系数 H_0. 于是我们可以将式 (21) 写成

$$\left.\begin{aligned}&C_1[\alpha\tau_0+\dot{\gamma}_0(R_0+H_0\alpha)]\cos\Delta\theta\gamma^*-\left(\frac{\alpha}{E_r}+\frac{\beta^2}{Kn}+C_1Q_0\dot{\gamma}_0\cos\Delta\theta\right)p^*=0\\&[(1-n)\rho_s\alpha^2+Kn^2\alpha+\beta^2(R_0+H_0\alpha)]\gamma^*-\beta^2Q_0p^*=0\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

该齐次方程要有解，系数矩阵行列式应等于零. 这样就得到 α

$$\begin{aligned}&(1-n)\rho_s\alpha^3+\left[Kn^2+H_0\beta^2+\frac{E_r(1-n)\rho_s\beta^2}{Kn}+E_rC_1Q_0\dot{\gamma}_0(1-n)\rho_s\cos\Delta\theta\right]\alpha^2+\\&C_2\alpha+\frac{E_rR_0}{Kn}\beta^4=0\end{aligned}\tag{25}$$

其中

$$C_2=R_0\beta^2+nE_r\beta^2+\frac{E_rH_0}{Kn}\beta^4+C_1Q_0E_r\dot{\gamma}_0Kn^2\cos\Delta\beta-C_1\tau_0Q_0E_r\beta^2\cos\Delta\theta$$

为分析方便，我们采用如下的无量纲变量将上面方程无量纲化

$$\begin{aligned}&\alpha=\frac{1}{\rho_sk_1}\bar{\alpha},\quad\beta^2=\frac{1}{\rho_sR_0k_1^2}\bar{\beta}^2,\quad k_1=\frac{1}{K},\quad A=\frac{R_0}{E_r},\quad B=\frac{H_0}{\rho_sk_1E_r}\\&C=C_1Q_0,\quad D=CQ_0\dot{\gamma}_0\rho_sR_0k_1n\cos\Delta\theta\end{aligned}\tag{26}$$

这样，特征方程式 (25) 可以简化为如下的形式

$$\begin{aligned}&n(1-n)A\bar{\alpha}^3+[(1-n)\bar{\beta}^2+nB\bar{\beta}^2+An^3+(1-n)D]\bar{\alpha}^2+\\&[(n^2+nA-C\cos\Delta\theta)\bar{\beta}^2+nAB\bar{\beta}^4+n^2D]\bar{\alpha}+\bar{\beta}^4=0\end{aligned}\tag{27}$$

该方程有两个极限解

(1) 对长波情况 ($\beta\to0$), 方程式 (27) 有两个解

$$\bar{\alpha}=0\quad\text{or}\quad\bar{\alpha}=-\frac{n}{1-n}\tag{28}$$

这两个解分别是零和负值，即变形总是稳定的.

(2) 对短波情况 ($\beta \to \infty$), 方程式 (27) 只有一个解

$$\bar{\alpha} = -\frac{1}{AB}$$

该解也是负的, 即变形也是稳定的.

但是我们可以看到式 (27) 中有一个负项 $-nS^2C_1\bar{\beta}^2\bar{\alpha}$, 该项可以导致正 α 值的出现, 即失稳的产生. 我们可以用文献 [2,13] 中的方法得到失稳条件为

$$\frac{A}{C\cos\Delta\theta} = \frac{R_0}{C_1E_r\tau_0Q_0\cos\Delta\theta} < 1 \tag{29}$$

这表明失稳是孔压软化效应超过应变硬化效应的结果.

3 结 语

形成局部化的最佳方向是沿比例加载路径. 在均匀变形情况下, 剪切带很可能与最大剪应力面平行. 如果比例加载路径与局部化方向的夹角 $\Delta\beta = \pi/2$, 则变形是稳定的, 这相当于中性加载. $\Delta\beta > \pi/2$ 的情况相当于弹性卸载, 于是方程式 (11) 和 (24) 均无效. 因为分析中假设方程式 (24) 中的依赖于时间的系数是常数, α 为正的解需要孔压软化效应超过应变硬化效应.

参 考 文 献

1 Rice J R. On the stability of dilatant hardening for saturated rock masses. *J Geophy Res*, 1975, 80(11): 1531~1536

2 Lu Xiaobing. On the shear instability of saturated soil. *Int J Engrg Science*, 2001, 39: 963~972

3 Vardoulakis I. Stability and bifurcation of undrained, plane rectilinear deformations on water-saturated granular soils. *Int J Num Anal Meth Geomech*, 1985, 9: 399~414

4 Vardoulakis I. Dynamic stability analysis of undrained simple shear on water-saturated soils. *Int J Num Anal Meth Geomech*, 1986, 10: 177~190

5 Loret B, Provest J H. Dynamic strain localization in fluid-saturated porous media. *J Engrg Mech, ASCE*, 1991, 117(11): 907~922

6 Lade P V, Nelson R B, Ito Y M. Instability of granular materials with nonassociated flow. *J Engrg Mech, ASCE*, 1988, 114(12): 2173~2191

7 Lade P V. Instability and liquefaction of granular material. *Comp & Geotechnics*, 1994, 16(2): 123~151

8 Vardoulakis I, Graf B. Calibration of constitutive models for granular materials using data from biaxial experiments. *Geotechnique*, 1985, 35: 299~317

9 Pietruszczak S, Niu X. On the description of localized deformation. *Int J Num Anal Meth Geomech*, 1993, 17: 791~805

10 Pietruszczak S. Undrained responses of granular soil involving localized deformation. *J Engrg Mech, ASCE*, 1995, 121(12): 1292~1297

11 Douglas A S, Chen H Tz. Adiabatic localization of plastic strain in anti-plane shear. *Scripta Metallurgica*, 1985, 19: 1277~1280

12 Vardoulakis I, Sulem J. Bifurcation Analysis in Geomechanics. Chapman & Hall, 1995

13 Bai Y L. Thermo-plastic instability in simple shear. *J Mech Phys Solids*, 1985, 30(4): 195~206