

# 波流共同作用下旋转振荡圆柱绕流的数值模拟<sup>\*</sup>

鄂学全 柏威

(中国科学院力学研究所,北京 100080)

**摘要** 本文研究了雷诺数  $Re = 1568$ ,  $KC$  数, 波流强度比  $\gamma = 1$ , 线速度比  $a = 2$ , 强迫振荡频率  $f_s = 0.1 \sim 1.0$  时波流共同作用下旋转振荡圆柱的绕流问题。通过基于非结构化同位网格的有限体积法对 Navier-Stokes 方程进行了数值求解。对流项、扩散项和非恒定项的离散格式均具有二阶精度, 利用 SIMPLE 算法处理压力-速度耦合。通过计算发现, 较小的振荡频率会显著改变流场结构。而升力的振荡频率既不是振荡流频率, 也不是自然脱落频率。

**关键词** 波流组合, 旋转振荡圆柱, Navier-Stokes 方程, 非结构化网格

## 1 引言

准确获得波流共同作用下圆柱的尾迹演化和动力载荷可以为海洋结构物的设计提供重要的参考依据。同时运动圆柱被认为是控制圆柱尾迹和减少涡致振动的一种有效手段。对于波流组合问题, 我们可以看成是速度幅值为  $\tilde{U}_1$  的余弦振荡流与速度为  $\tilde{U}_2$  的均匀流的叠加。在波流组合下, 半径为  $\tilde{a}$  的圆柱绕自身轴线做角速度幅值为  $\Omega$  的正弦规律强迫振荡的情况, 是一个情况十分复杂的流体力学问题, 涉及到的控制参数有 5 个之多。它们分别是雷诺数其中  $Re = 2\tilde{U}_{\infty}\tilde{a}/\tilde{\nu}$ , 其中  $\tilde{\nu}$  为运动学粘性系数,  $\tilde{U}_{\infty}$  为  $\tilde{U}_1$  与  $\tilde{U}_2$  两者之和、 $KC$  数  $KC = \tilde{U}_{\infty}\tilde{T}/2\tilde{a}$ ,  $\tilde{T}$  为有量纲的来流振荡周期、波流强度比  $\gamma = \tilde{U}_2/\tilde{U}_1$ 、线速度比  $a = \Omega\tilde{a}/\tilde{U}_{\infty}$  和强迫振荡频率  $f_s = \tilde{f}_s\tilde{a}/\tilde{U}_{\infty}$ , 其中  $\tilde{f}_s$  为有量纲的强迫振荡频率。

以往的研究多集中在振荡流绕静止圆柱流动问题上<sup>[1-4]</sup>。发现在小  $KC$  数下, 流动保持对称和二维的性质, 在每半个振荡周期内都会产生一对新的对称附着涡; 然而随着  $KC$  数的增大, 流动开始呈现非对称的性质, 并且经历一系列涡脱落模态, 而这些模态对应一个周期内脱落的旋涡数量。而对于旋转振荡圆柱, 一般是研究均匀流的情况<sup>[5-7]</sup>。发现圆柱尾迹主要呈现“同步”、“竞争”和“自然脱落”三种不同的模态。在较低振荡频率下, 圆柱尾迹涡脱落被强迫振荡所同步; 振荡频率的增加将导致涡脱落进入一种竞争模式, 尾迹变得不规则; 振荡频率较高时, 尾迹的涡将交替脱落, 形成 Karman 涡街。

以往的数值计算大多建立在非正交坐标系下, 并引入涡量作为未知变量。这些理论对复杂计算边界的适应能力不是十分强壮, 而且很难精确定义边界条件。本文则采用基于非结构

\* 国家自然科学基金项目(19972068)资助课题

化同位网格的有限体积法求解 Navier-Stokes 方程,此方法是建立在直角坐标系下,对计算域的适应性强,同时物理概念清晰、直观。本文对波流组合下旋转振荡圆柱绕流问题做了尝试性的研究,给出了不同振荡频率下的流场结构和流体载荷,并对作用力系数做了一些分析。

## 2 控制方程和边界条件

定义一个右手直角坐标系  $\tilde{o}\tilde{x}\tilde{y}$ , 则二维、不可压缩、粘性流体的运动可以由原始变量的连续方程和 Navier-Stokes 方程描述。定义下面的无量纲变量

$$x = \tilde{x}/\tilde{a}, u = \tilde{u}/\tilde{U}_\infty, v = \tilde{v}/\tilde{U}_\infty, p = \tilde{p}/\rho\tilde{U}_\infty^2, t = \tilde{t}\tilde{U}_\infty/\tilde{a} \quad (1)$$

其中,上标的波浪线表示有量纲变量。 $\tilde{x}(=\tilde{x}, \tilde{y})$  为位置坐标;  $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{u}$  分别为流体在  $\tilde{x}$  方向上的速度分量; $\tilde{\rho}$  为流体密度; $\tilde{p}$ ;  $\tilde{t}$  为时间。则相应的无量纲连续方程和动量守恒方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

要使封闭方程有唯一的解,还需要满足一些边界条件:在进口边界,流体的速度预先给定;在固体边界,层流流动情况下可以采用无滑移条件;在出口边界,边界条件应该使出口是“透明”的,即无论出口边界设在何处,对其他计算区域的数值解都没有影响。

## 3 动量方程的离散

对于任意一个三角形控制体  $P_0$ , 动量方程的积分形式如下,

$$V_{P_0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{P_0} + \sum_{j=1}^3 \int_{S_j} \left( u \varphi - \frac{2}{Re} \nabla \varphi \right) \cdot dS = -V_{P_0} \nabla p_{P_0} \quad (5)$$

式中,  $\varphi$  为通用变量, 表示  $u$  或  $v$ ;  $V_{P_0}$  为控制体  $P_0$  的体积;  $S$  由  $S_1, S_2$  和  $S_3$  构成,  $S_j (j = 1, 2, 3)$  为控制体  $P_0$  的面积矢量, 正方向与外法向单位矢量一致。

对于对流项的离散,一阶迎风格式有严重的数值耗散,计算精度低。二阶中心格式虽然精度较高,可是计算的稳定性差。本文采用二阶迎风格式离散对流项,界面上的物理量  $\varphi_j$  可表示为

$$\varphi_j = \begin{cases} \varphi_{P_0} + (\nabla \varphi)_{P_0} \cdot \Delta r_{j,P_0} & F_j \geq 0 \\ \varphi_{P_j} + (\nabla \varphi)_{P_j} \cdot \Delta r_{j,P_j} & F_j < 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $P_j$  表示和控制体  $P_0$  相邻的第  $j$  个控制体;  $\Delta r_{j,P_0}$  和  $\Delta r_{j,P_j}$  分别为边界中点  $j$  与节点  $P_0$  和  $P_j$  之间的距离矢量;  $F_j$  为界面的质量流。

对于扩散项的离散, 设  $d_j$  为节点  $P_0$  与  $P_j$  之间的距离矢量, 则控制体  $P_0$  第  $j$  个界面上的扩散项可进一步分解为沿  $d_j$  传递法向扩散和垂直  $d_j$  传递的交叉扩散。在式(5)中需要对压力梯度项进行离散, 应用 Gauss 定理, 则可得如下关系式

$$V_{P_0} \nabla p_{P_0} = \sum_{j=1}^3 p_j S_j \quad (7)$$

式中, 控制体  $P_0$  第  $j$  个界面上的压力值  $p_j$  通过与界面相邻的两节点压力经线性插值得到。

对于时间导数项, 采用具有二阶精度的三步隐格式进行离散。在第一个计算时刻, 由于只已知上一时刻的结果, 所以此时刻的时间导数项采用一阶隐式欧拉格式进行离散。上述两种格式可以统一表达为

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{(1+0.5\lambda)\varphi^n - (1+\lambda)\varphi^{n-1} + 0.5\lambda)\varphi^{n-2}}{\Delta t} \quad (8)$$

式中,  $\lambda = 1$  为三步隐格式;  $\lambda = 0$  为欧拉隐格式;  $\Delta t$  为时间间隔; 上标  $n$  表示本时刻的结果; 上标  $n-1$  表示上一时刻的结果; 上标  $n-2$  表示再上一时刻的结果。

综上所述, 将前面讨论的离散关系表达式代入式(5), 可得关于控制体  $P_0$  的动量离散方程

$$a_0 \varphi_{P_0} = \sum_{j=1}^3 a_j \varphi_{P_j} + b_0 \quad (9)$$

其中:

$$a_j = -\min[F_j, 0] + \frac{2}{Re} \frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} \quad (10)$$

$$a_0 = \sum_{j=1}^3 a_j + \frac{\rho V_{P_0}}{\Delta t} (1+0.5\lambda) \quad (11)$$

$$b_0 = \sum_{j=1}^3 \left[ -p_j S_j - F_j (\varphi_j^{UDS} - \varphi_j^{UDS})^{n-1} + \frac{2}{Re} \left( \frac{\varphi_{c_2} - \varphi_{c_1}}{l_{c_1, c_2}} \frac{N_j}{|N_j|} \right) \cdot S_j \right] + \quad (12)$$

式中,  $N_j$  为距离矢量  $d_j$  的共轭;  $l_{c_1, c_2}$  为控制体  $P_0$  第  $j$  个界面上两顶点  $c_1, c_2$  的距离;  $\varphi_{c_1}, \varphi_{c_2}$  为  $\varphi$  在两顶点  $c_1, c_2$  上的值, 需要从相邻单元中心节点的  $\varphi$  值通过插值获得; 上标  $UDS$  表示

变量按一阶迎风格式确定;上标 SUDS 表示变量按二阶迎风格式确定;上标  $n-1$  表示括号中的项采用上一层次计算的结果。式(10)中第一项为界面对流,后一项为交叉扩散;式(11)中第一项为邻点的贡献,后一项为时间导数;式(12)中第一项为压力梯度,第二项为延迟修正处理产生的源项,第三项为交叉扩散,第四项为时间离散所产生的源项。

## 4 压力修正方程的离散

将上一层次计算得出的压力场  $P_0^*$  作为本层次的压力初始值,求解动量方程得到满足动量方程的速度初始值  $u_{P_0}^*$ ,但这个初始速度并不一定满足连续方程,所以需要迭代地对压力初始值和速度初始值进行修正。应用 SIMPLE 算法,可得到关于压力修正值  $p_{P_0}'$  的离散方程

$$a_0^p p_{P_0}' = \sum_{j=1}^3 a_j^p p_{P_j}' + b_0^p \quad (13)$$

式中,上角标  $p$  表示压力修正方程中的系数。其中,

$$a_j^p = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{V}{a_0^*} \right)_{P_0} + \left( \frac{V}{a_0^*} \right)_{P_j} \right] \frac{|S_j|}{d_j} \quad (14)$$

$$a_0^p = \sum_{j=1}^3 a_j^p \quad (15)$$

$$b_0^p = - \sum_{j=1}^3 F_j \quad (16)$$

式中,  $p_{P_0}'$  和  $p_{P_j}'$  分别为控制体  $P_0$  和  $P_j$  的压力修正值;  $a_0^*$  动量方程的主对角元系数,以区别于压力修正方程的主对角元系数。这里的  $b_0^p$  表示流进控制体  $P_0$  的净质量流。

在获得压力修正值  $p_{P_0}'$  以后,按以下方式修正压力和速度:

$$p_{P_0} = p_{P_0}^* + p_{P_0}' \quad (17)$$

$$u_{P_0} = u_{P_0}^* - \frac{V_{P_0}}{a_0^*} \nabla p_{P_0}' = u_{P_0}^* - \sum_{j=1}^3 \frac{p_{P_j}' S_j}{a_0^*} \quad (18)$$

## 5 出口边界条件的数值处理

出口边界条件是计算流体力学中一个重要的研究课题,它直接关系到数值结果准确与否和模拟时间的长短。本文采用法向速度满足局部质量守恒、切向速度满足齐次 Neumann 条

件(Li 和 Tao, 1993)的出口边界条件。

首先确定满足齐次 Neumann 条件的  $v$  分量, 这可以很容易写出如下的表达式,

$$v_j = v_{P_0}^{-1} \quad (19)$$

式中,  $v_j$  为边界节点  $j$  的  $v$  速度分量;  $v_{P_0}$  为与边界节点  $j$  相邻控制体  $P_0$  的  $v$  速度分量; 上标  $n - 1$  表示上一层次计算的结果。然后对控制体  $P_0$  进行局部质量守恒计算, 得到边界节点  $j$  的法向速度分量为

$$u_j^* = \frac{1}{S_{ix}} \left( - \sum_{i=1}^2 u_i \cdot S_i - v_j S_{iy} \right) \quad (20)$$

式中,  $S_{ix}$  和  $S_{iy}$  分别为面积矢量  $S_i$  在  $x$  和  $y$  方向上的分量。

在采用上述方法确定出口边界处的流速后, 该边界上的法向速度分布还需满足总体质量守恒的要求。一般采用对法向流速  $u_j^*$  加一个常数  $C$  的方法加以修正。

## 6 数值结果

圆柱的圆心选取在坐标系原点, 左右边界与原点的距离设为  $30\bar{a}$ ; 上下边界与原点的距离设为  $10\bar{a}$ 。利用 Delaunay 三角形化方法对计算区域进行网格划分, 并在圆柱附近采取网格局部加密以保证计算的精度, 计算共采用了 12 580 个三角形计算单元。计算选用的时间步长  $\Delta t$  为 0.02。利用数值计算的结果, 可以很方便地得到升力系数和纵向力系数, 它们由摩擦力和压力组成。为了方便地与他人实验和计算结果进行比较, 下面定义一个新的组合参数  $\beta = Re/KC$ 。我们还需要进一步处理计算得到的作用力系数, 根据 Morison 公式, 定义  $C_M$  和  $C_D$  代表惯性力系数和阻力系数, 它们可以通过对计算得到的作用力时间序列采用最小二乘法得到。为了突出研究重点, 本文固定 4 个控制参数:  $\beta = 196$ ,  $KC = 8$ , 波流强度比  $\gamma = 1$ , 线速度比  $a = 2$ , 而主要研究强迫振荡频率  $f_s = 0.1 \sim 1.0$  时的旋转振荡圆柱绕流问题。

图 1 为  $f_s = 0.1$  时的瞬时流线图。图 1(a) 为振荡流一个周期的开始时刻。在图 1(b) 中, 圆柱开始逆时针旋转, 在它的下部产生两个靠近的旋涡, 并在上部产生一个旋涡。随着时间的推移, 这 3 个旋涡均在发展。到了图 1(d) 时, 上部的涡向上游发展, 而下部的两个涡逐渐合并为一。在图 1(e) 中, 来流速度在减小, 上部和下部的涡继续向上游移动。到了图 1(f) 时刻, 圆柱已经改变旋转方向, 位于圆柱下部的涡首先消失, 而上部的涡一分为二。在图 1(g) 中, 圆柱完成一个振荡周期, 而图 1(h) 和(i) 显示了一个振荡流周期结尾时刻的流场。

增大振荡频率到  $f_s = 0.5$  时, 图 2 给出了流场结构, 情况变得很不规则。从图中可以看到圆柱下部的旋涡一分为二, 又合而为一的过程。而圆柱上部的涡基本上先是向上游发展, 而后随着来流速度的增大又逐渐减弱。当振荡频率增大到  $f_s = 1.0$  时, 如图 3 所示, 此时圆柱振荡的频率很高。高频振荡的圆柱对流场结构基本没有什么改变, 只是旋涡的位置稍有不同。

图 4 为不同振荡频率下的阻力随时间的变化过程。可以看出阻力的振荡比较规则, 但在  $f_s = 0.1$  时存在一些高频分量。阻力的振荡频率与振荡流频率基本相同, 而且振荡幅值在  $f_s$

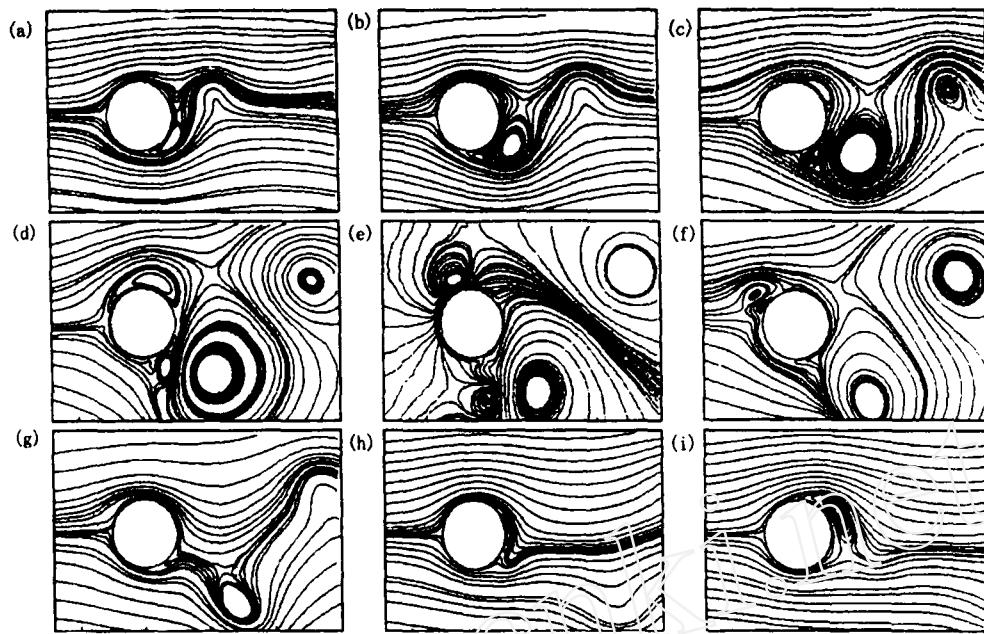


图1  $\rho=196, KC=8, \gamma=1, \alpha=2, f_r=0.1$  情况的瞬时流线图:

(a)  $t = 48.0$ , (b)  $50.0$ , (c)  $52.0$ , (d)  $54.0$ , (e)  $56.0$ , (f)  $58.0$ , (g)  $60.0$ , (h)  $62.0$ , (i)  $64.0$

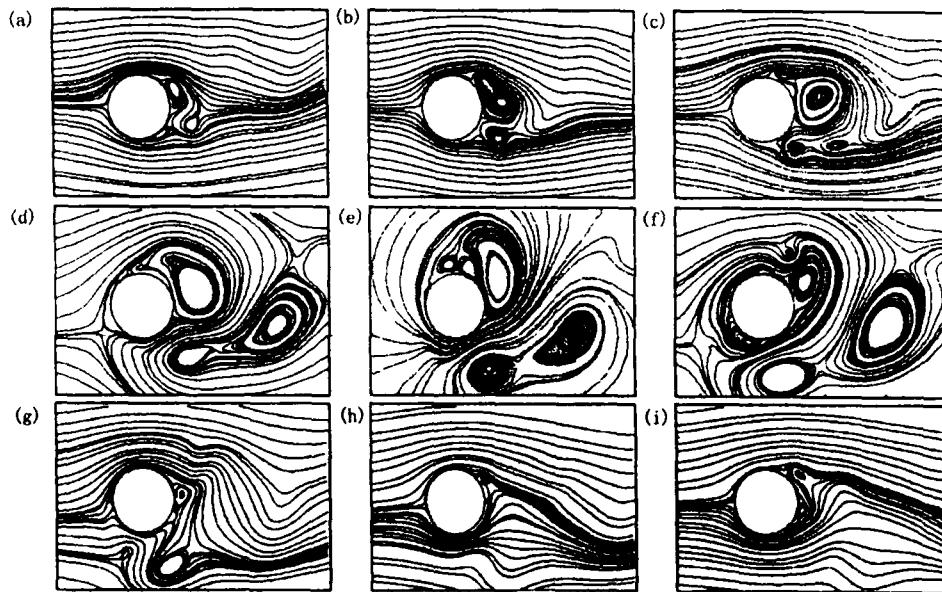


图2  $\beta=196, KC=8, \gamma=1, \alpha=2, f_r=0.5$  情况的瞬时流线图:

(a)  $t = 48.0$ , (b)  $50.0$ , (c)  $52.0$ , (d)  $54.0$ , (e)  $56.0$ , (f)  $58.0$ , (g)  $60.0$ , (h)  $62.0$ , (i)  $64.0$

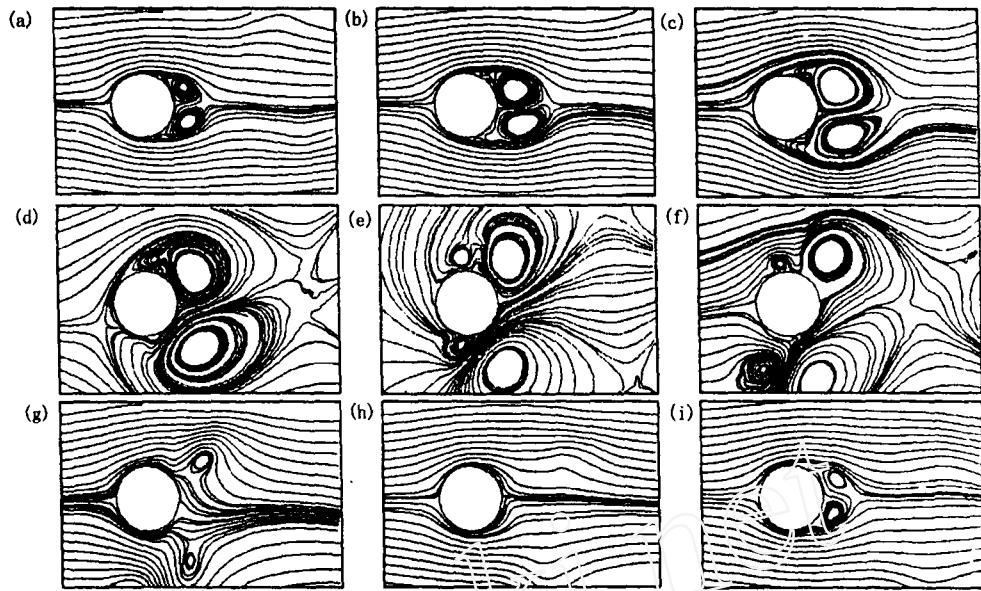


图 3  $\beta = 196, KC = 8, \gamma = 1, \alpha = 2, f_r = 1.0$  情况的瞬时流线图:  
 (a)  $t = 48.0$ , (b)  $50.0$ , (c)  $52.0$ , (d)  $54.0$ , (e)  $56.0$ , (f)  $58.0$ , (g)  $60.0$ , (h)  $62.0$ , (i)  $64.0$

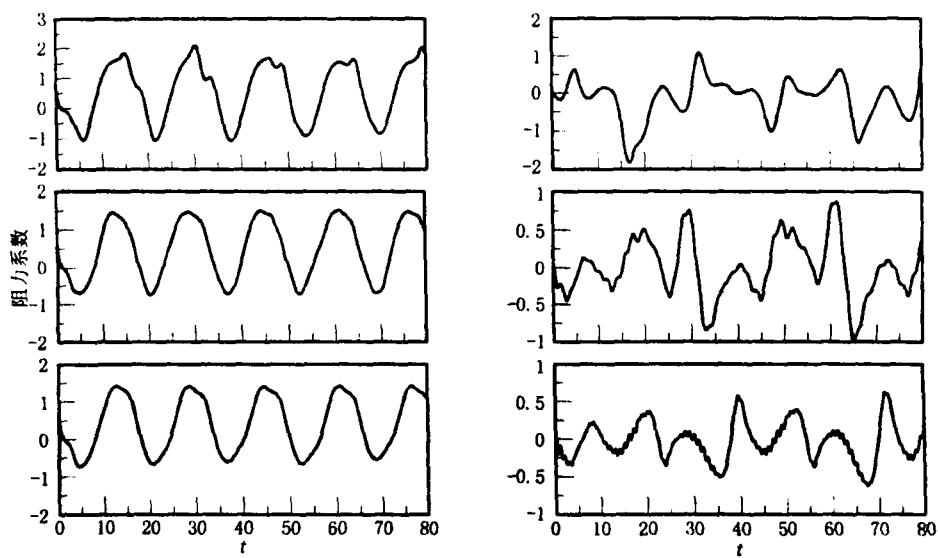


图 4  $\beta = 196, KC = 8, \gamma = 1, \alpha = 2$  情况下  
 纵向力系数随  $f_r$  和时间的变化:  
 (a)  $f_r = 1$ , (b)  $0.5$ , (c)  $1.0$

图 5  $\beta = 196, KC = 8, \gamma = 1, \alpha = 2$  情况下  
 纵升力系数随  $f_r$  和时间的变化:  
 (a)  $f_r = 1$ , (b)  $0.5$ , (c)  $1.0$

$\alpha = 0.1$  时最大。图 5 为不同振荡频率下的升力随时间的变化过程。可以看出与静止圆柱情况的差别较大。图 5 中(b)和(c)的趋势基本相同,但均存在一些小的波动。而这些高频分量都是与各自的振荡频率相对应的。

图 6 和图 7 分别为阻力和惯性力系数,升力的均方根值和极大值随振荡频率的变化规律。可以看出,各种力系数在  $f_s = 1$  附近存在一个极大值,而其他的振荡频率只使它们做很小的波动。

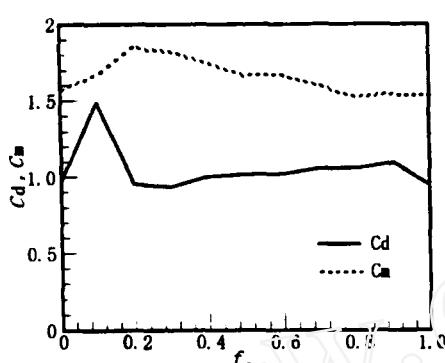


图 6  $\beta = 196, KC = 8, \gamma = 1, \alpha = 2$  情况  
下计算的阻力系数和惯性力系数

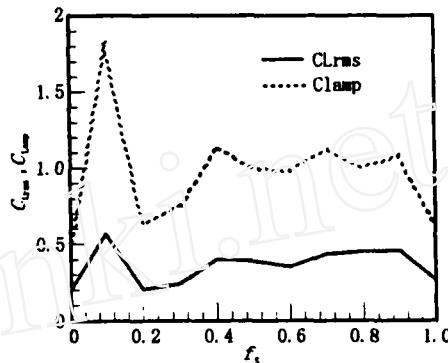


图 7  $\beta = 196, KC = 8, \gamma = 1, \alpha = 2$  情况  
下计算的横向作用力系数

图 8 为不同升力系数的频谱分析。当  $f_s = 0$  时,占优的频率为振荡流频率和自然脱落频率。但当  $f_s \neq 0$  时,占优的频率分别在 0.035 和 0.1 附近,这既不是振荡流频率,也不是自然脱落频率。同时,在强迫振荡频率及其周围的一些频率上均出现峰值,而这些频率与强迫振荡频率并不成倍数关系。这些问题都有待于进一步的研究来解决。

## 7 结论

本文研究了  $\beta = 196, KC = 8, \gamma = 1, \alpha = 2, f_s = 0.1 \sim 1.0$  时波流共同作用下旋转振荡圆柱的流场和动力特性,得到了以下主要结论:

- (1) 在振荡频率较小时,圆柱的近尾迹结构发生很大变化,而较大的振荡频率并不会明显改变流场结构。
- (2) 阻力的振荡比较规则,频率与振荡流频率基本相同。在较大振荡频率时,升力中会有一些与振荡频率对应的高频分量。而且各种力系数在  $f_s = 0.1$  附近存在一个极大值。
- (3) 通过对升力系数的频谱分析,发现占优的频率既不是振荡流频率,也不是自然脱落频率。同时,在强迫振荡频率及其周围的一些频率上均出现峰值,而这些频率与强迫振荡频率并不成倍数关系。

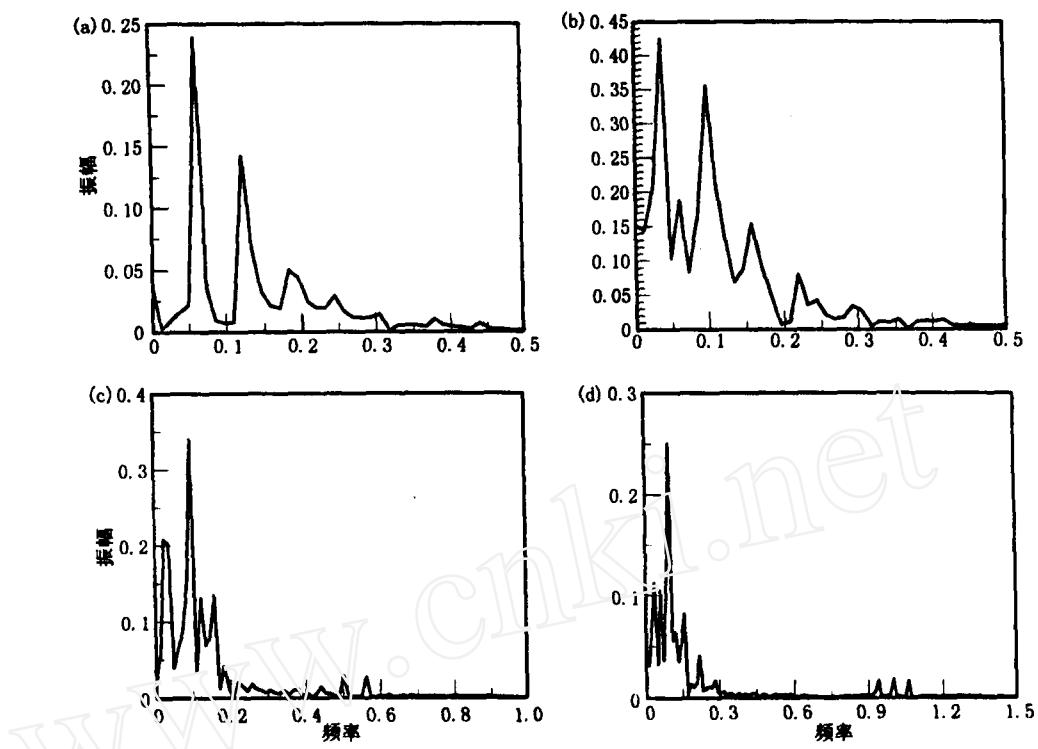


图8  $\beta=196$ ,  $KC=8$ ,  $\gamma=1$ ,  $\alpha=2$  情况不同  $f_l$  下升力系数的频谱分析:

(a)  $f_l=0.0$ , (b)  $0.1$ , (c)  $0.5$ , (d)  $1.0$

## 参考文献

- 1 Williamson, C. H. K. Sinusoidal flow relative to circular cylinders. *Jour. Fluid Mech.*, 1985, 155: 141-174.
- 2 Wang X, Dalton C. Oscillating flow past a rigid circular cylinder; A finite difference calculation. *Trans. ASME I: Jour. Fluids Eng.*, 1991, 113: 377-383.
- 3 Justesen, P. A numerical study of oscillating flow around a circular cylinder. *Jour. Fluid Mech.*, 1991, 222: 157-196.
- 4 Badr, H. M., Dennis, S. C. R., Kocabiyik, S., Nguyen P. Viscous oscillatory flow about a circular cylinder at small to moderate Strouhal number. *Jour. Fluid Mech.*, 1995, 303: 215-232.
- 5 Tokumaru, P. T., Dimotakis P E. Rotary oscillation control of a cylinder wake. *Jour. Fluid Mech.*, 1991, 224: 77-90.

- 6 Baek, S. J., Sung, H. J. Numerical simulation of the flow behind a rotary oscillating circular cylinder. *Physics of Fluids*, 1998, 10(4): 869-876.
- 7 赵宇, 王徽, 鄂学全. 旋转振荡圆柱绕流中的频率耦合现象研究. 水动力学研究与进展, A辑, 2001, 16(4): 435-441.

## Numerical Simulation of the Wake and Dynamics Feature of the Wave-Current past a Rotary Oscillating Circular Cylinder

E Xuequan, Bai Wei

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract** In this paper, the wave-current flow past a rotary oscillating circular cylinder for  $Re = 1568$ ,  $KC = 8$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 2$ ,  $f_s = 0.1 \sim 1.0$  is investigated. Numerical solutions of the Navier Stokes equations is obtained by finite volume method based on unstructured collocated meshes. The discretized schemes of the convective fluxes, diffusive fluxes and unsteady term are all of second-order accuracy. The SIMPLE algorithm is adopted to deal with the pressure-velocity coupling. The numerical results show that the lower forced oscillating frequency influences the flow structure prominently, and the oscillating frequency of the lift force is neither the frequency of the oscillating flow, nor the natural shedding frequency.

**Key words** wave-current flow, rotary oscillating circular cylinder, Navier-Stokes equations, unstructured meshes.