

广义位置函数法在机敏梁振动优化控制中的应用

冯玮¹, 柳春图²

(1. 北京大学博士后流动站, 中国海洋石油研究中心博士后工作站, 北京 100027; 2. 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要: 利用广义位置函数法^[1], 建立了机敏梁结构状态变量描述与各种系统输出构成的线性控制系统, 在定义了以能量消耗及系统状态为基准的二次型性能指标的基础上, 应用李雅普诺夫第二方法求解最佳控制问题。文中给出了算例。

关键词: 机敏结构; 梁; 振动; 优化控制; 广义位置函数

1 前言

用压电材料作为传感器和作动器对结构进行主动控制, 是近些年来越来越受到广泛关注的问题。许多研究者^[2,3,4]讨论了采取粘贴或嵌入形式的压电作动器对结构的影响, 并提出了相应的建模方法; 压电传感器和作动器的位置对于识别和控制结构状态的效果是重要的因素, 目前已经有不少这方面的论述^[5,6]。在控制方法上, 独立模态空间控制法^[7]是将结构运动方程转换到模态坐标, 使高阶微分方程化为低阶微分方程组来求解的常用方法; 自适应控制可以自动检测系统特性, 从而保持系统的性能指标为最优, 国内的研究者^[8]从实验上做了一定的工作; 一些研究者^[9]运用自动控制的有关理论通过状态或输出反馈使被控系统的特性达到预想的状况, 国内也有人^[10]建立了关于压电结构的多输入多输出控制方法。

本文采用广义位置函数法^[11]建模, 在定义了以控制能量消耗及系统状态为基准的二次型性能指标的基础上, 利用李雅普诺夫第二方法求解最佳控制问题。文中给出了算例。

2 系统方程

考虑由若干沿 x 方向离散分布的压电致动元件, 长度、厚度和宽度分别为 L 、 h 、 b , 材料常数为 E 、 μ 的等直梁组成的机敏结构, 压电致动元件对称地粘贴在梁的上、下表面, 其材料常数为 E_p 、 μ_p 。第 i 对作动器的粘贴位置记为 (ξ_{i1}, ξ_{i2}) 。

$V_i(t)$ 分别是每一对压电片上的控制电压, κ 是压电应变系数, h_p 是压电元件厚度。压电元件在外加控制电压 $V_i(t)$ 的作用下, 产生应变 $\varepsilon_p = \kappa \frac{V_i}{h_p}$ 。假定上下表面压电作动器控制电压数值大小相等、符号相反, 以产生拉伸应时电压为正, 则对梁结构的影响是引起横截面上的附加力矩^[2]:

$$S_i(x, t) = V_i(x, t) \kappa (h + h_p) \left(\frac{EhE_p b}{Eh + E_p h_p} \right) = c \cdot V_i(x, t) \quad (1)$$

由于压电作动器是以空间离散形式分布, 在每一对作动器上的控制电压为常数, 所以附加力矩 $S(x, t)$ 与控制电压 $V(x, t)$ 并不是 x 的连续函数, 因此, 引入广义位置函数 $R_i(x)$ (Generalized Location Function) 用

作者简介: 冯玮 (1972.2), 男, 广东新兴人, 博士后, 从事压电机敏结构、结构疲劳寿命、海洋工程结构冰激振动方面的研究。

以表征压电作动器的位置^[1], 定义见(2)式:

$$R_i(x) = \begin{cases} 1 & \xi_{i1} < x < \xi_{i2} \\ 0 & \text{其它位置} \end{cases} \quad (2)$$

其解析形式为:

$$R_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{l}\xi_{i1}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{l}\xi_{i2}\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad (3)$$

由于压电作动器通常以较小的薄膜或贴片形式出现, 而且以空间离散分布, 则在建立系统模型时不考虑其质量和刚度影响。考虑到 $S_i(x, t)$ 的影响, 梁内力矩成为:

$$M(x) = -EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + c \sum_i V_i(t) R_i(x) \quad (4)$$

可得到具有离散分布的压电作动器的机敏梁结构的振动方程:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = c \sum_i \frac{d^2 R_i(x)}{dx^2} V_i(t) \quad (5)$$

梁的挠度函数取为相互正交的模态函数级数形式:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \phi_k(x) \quad (6)$$

将上式代入(5), 并在等号两端乘以 $\phi_m(x, t)$, 沿 $(0, L)$ 积分, 得到:

$$\ddot{u}_m(t) + \omega_m^2 u_m(t) = \sum_i e_{mi} \cdot V_i(t) \quad (7)$$

其中, ω_m 是 m 阶自然频率, 且

$$e_{mi} = \frac{c \int_0^L \frac{d^2 R_i(x)}{dx^2} \phi_m(x) dx}{\rho A \int_0^L \phi_m^2(x) dx} \quad (8)$$

以上过程将微分方程(5)转换成以模态坐标 $u_m(t)$ 为基本未知变量的常微分方程(7), 式中项数 m 应当取到无穷大, 但通常的做法是在某个有限值 M 处截断, 这样, 我们将得到 M 个关于模态坐标 $u_m(t)$ 的二阶常微分方程, 电压 $V_i(t)$ 通过 e_{mi} 对系统起到控制作用。

3 线性控制系统

3.1 状态变量描述

为研究系统的控制效果, 将微分方程组(7)改写成状态方程形式是有益的。假设梁表面共有 P 对压电作动器, 引入状态向量:

$$\begin{cases} \bar{v}(t) = [\dot{u}_1(t) \ \dot{u}_2(t) \ \cdots \ \dot{u}_M(t) \ u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_M(t)]^T \\ \bar{V}(t) = [V_1(t) \ V_2(t) \ \cdots \ V_P(t)]^T \end{cases} \quad (9)$$

引入如下矩阵和记号:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{2M \times 2M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times M} & -\Omega^2_{M \times M} \\ \mathbf{I}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times M} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{2M \times P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_{M \times P} \\ \mathbf{0}_{M \times P} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (10)$$

$$\Omega_{M \times M} = \text{diag}[\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_M]$$

$$\mathbf{B}'_{M \times P} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1P} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2P} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e_{M1} & e_{M2} & \dots & e_{MP} \end{bmatrix} \quad (11)$$

可以将方程组 (7) 改写成:

$$\dot{\bar{v}}(t) = \mathbf{A}\bar{v}(t) + \mathbf{B}\bar{V}(t) \quad (12)$$

3.2 系统输出

机敏结构的重要特性就是能够通过对结构的主动控制使其形状或动态特性达到我们预想的状态, 因此, 必须通过对结构某些参数的测量来确定结构的状态, 传统的方法是测量某些固定位置的位移、速度、应变、应变速率等, 也有许多研究者利用压电元件本身作为传感器, 通过测量其上的电流信号确定结构状态。各种方法本质上讲都是为了从能够直接测量的物理量得到结构形变特征, 但不同方法有具体的特点。

1) 若测量应变, 如果在梁表面粘贴有 Q 个应变传感器, 分别给出 $x_j (j=1,2,\dots,Q)$ 点处的应变值:

$$\varepsilon_j(t) = -y \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=x_j \\ y=y_j}} = -\frac{h}{2} \text{sign}(y_j) \sum_{m=1}^M u_m(t) \phi_m''(x_j) \quad (13)$$

综合 Q 个应变值, 并利用 (9) 式中引入的向量, 可以将上式写为:

$$\bar{U}(t) = \mathbf{C}_{Q \times 2M} \bar{v}(t) = [\mathbf{0}_{Q \times M} \ \mathbf{C}'_{Q \times M}] \bar{v}(t) \quad (14)$$

若得到的是应变速度, 则:

$$\bar{U}(t) = \mathbf{C}_{Q \times 2M} \bar{v}(t) = [\mathbf{C}'_{Q \times M} \ \mathbf{0}_{Q \times M}] \bar{v}(t) \quad (15)$$

$$\mathbf{C}'_{Q \times M} = -\frac{h}{2} \begin{bmatrix} \text{sign}(y_1) \phi'_1(x_1) & \text{sign}(y_1) \phi'_2(x_1) & \dots & \text{sign}(y_1) \phi'_M(x_1) \\ \text{sign}(y_2) \phi'_1(x_2) & \text{sign}(y_2) \phi'_2(x_2) & \dots & \text{sign}(y_2) \phi'_M(x_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \text{sign}(y_Q) \phi'_1(x_Q) & \text{sign}(y_Q) \phi'_2(x_Q) & \dots & \text{sign}(y_Q) \phi'_M(x_Q) \end{bmatrix} \quad (16)$$

2) 若在梁表面有 Q 个位移传感器, 给出 $x_j (j=1,2,\dots,Q)$ 点处的位移值:

$$w_j(t) = w(x_j, t) = \sum_{m=1}^M u_m(t) \phi_m(x_j) \quad (17)$$

此时, 系统输出仍然保持 (14) (输出是速度时为 (15) 式) 的形式, 所不同的仅仅是^[11]:

$$\mathbf{C}'_{Q \times M} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_M(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_M(x_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_1(x_Q) & \phi_2(x_Q) & \dots & \phi_M(x_Q) \end{bmatrix} \quad (18)$$

3) 若在梁表面有 Q 个压电传感器, 在没有外加控制电压时其电位移如下:

$$D_j = \kappa \varepsilon_j(t) = -\frac{h}{2} \text{sign}(y_j) \kappa \sum_{m=1}^M u_m(t) \phi_m''(x_j) \quad (19)$$

矩阵 $\mathbf{C}'_{Q,M}$ 具有与 (16) 式基本相同的形式。

从上面的分析可以看到, 无论采用何种测量方法, 其输出都能够归结为统一的形式, 即 (14) 和 (15) 式。方程 (12) 与输出 (14) 或 (15) 共同构成了关于具有压电作动器的机敏梁结构以外加电压向量 $\bar{V}(t)$ 为控制变量的线性振动控制系统。

4 优化控制

优化控制需要涉及到性能指标的选择。对于由 (12) 描述的机敏梁的振动控制问题, 我们既关心系统状态误差, 也关心控制电压的能量消耗, 所以将性能指标取为:

$$J = \int [\bar{v}'(t) \mathbf{Q} \bar{v}(t) + \bar{V}'(t) \mathbf{R} \bar{V}(t)] dt \quad (20)$$

\mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 是正定矩阵, 它们的选择取决于状态最小误差和控制代价之间的权重。(14) 与 (15) 形式的测量值可以反映梁运动状态, 由此可以得到输出反馈控制信号:

$$\bar{V}(t) = -\mathbf{K}_{P,Q} \bar{U}(t) \quad (21)$$

其中 $\mathbf{K}_{P,Q}$ 是反馈增益矩阵。

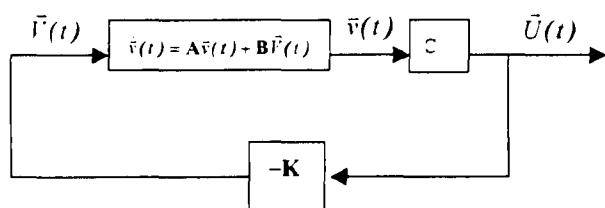


图 1 最优控制系统

优化控制就是针对结构方程 (12) 寻找适当的增益矩阵 $\mathbf{K}_{P,Q}$, 在性能指标 (20) 取极小值的条件下, 使梁的任意初始状态转移到原点 (图 1)。以上优化控制问题可以归结为求解以矩阵 \mathbf{P} 为未知量的 Riccati 方程:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (22)$$

求解上述方程得到 \mathbf{P} , 则:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1} \quad (23)$$

通常情况下, 传感器数量 Q 小于所涉及的模态阶数 M , 由 (18) 可以看到, $(\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1}$ 的逆是存在的。(23) 所给出的反馈增益矩阵就是本文优化问题的解。由以上各式可以看到, 一旦作动器位置和所考虑的模态阶数确定后, 矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 就被确定, 此时反馈系数矩阵 \mathbf{K} 仅仅取决于权矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 的选取方式; 而在权矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 固定不变时, 反馈增益矩阵 \mathbf{K} 将取决于传感器的几何特性及其分布情况。

5 算例

考虑一简支等直梁, 材料常数及有关尺寸见表 1, 其长度为 L , 假定系统输出为 $0.8L$ 处的应变速度值。

表 1 简支梁与作动器参数表

名称	弹性模量	密度	厚度	长度 (位置)	宽度	应变系数
Basic beam	$E=210\text{GPa}$	$\rho=8000 \text{ kg/m}^3$	$h=2\text{mm}$	$L=300\text{mm}$	$b=20\text{mm}$	-
PZT G-1278	$E_p=60\text{GPa}$	$\rho_p=1780 \text{ kg/m}^3$	$h_p=0.2\text{mm}$	$L_p=60\text{mm}$	$b_p=20\text{mm}$	$\kappa=2.5\times 10^{-10}\text{m/v}$

作为对比,本文分析和计算了当压电作动器采用全覆盖、单输入离散分布、多输入离散分布三种方式下机敏梁结构的优化控制问题,在不同分布方式下作动器位置如下:

- (i) 一对压电作动器布置在 0~L 处;
- (ii) 一对压电作动器布置在 0.15L~0.35L 处;
- (iii) 两对压电作动器布置在 0.1L~0.2L 和 0.5L~0.6L 处。

为使计算过程简单,这里仅仅考虑第一阶模态。对三种情况均取性能指标中的权矩阵为:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = [1] \quad (24)$$

由(22)与(23)式得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 1194.32 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_1 &= 15.51 \\ \mathbf{P}_2 &= \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 2068.63 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_2 &= 15.82 \\ \mathbf{P}_3 &= \begin{bmatrix} 0.015 & 0 \\ 0 & 1602.35 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} 13.67 \\ -6.84 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

在以上各种情况下,假定梁结构的初始位移为 0.02t_f,梁中点的运动以及压电作动器上的电压变化分别如图 2、图 3、图 4 所示。

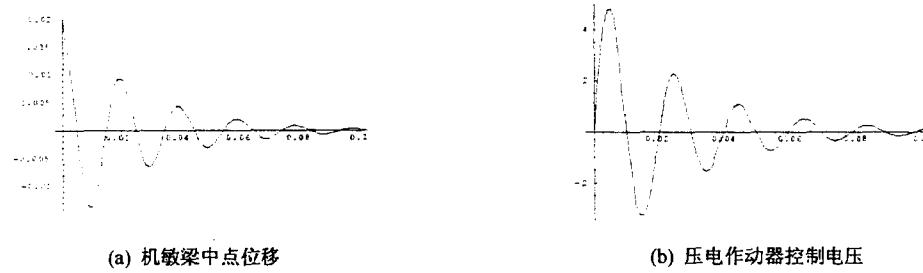


图 2 第(i)种情况下梁中点位移与作动器控制电压

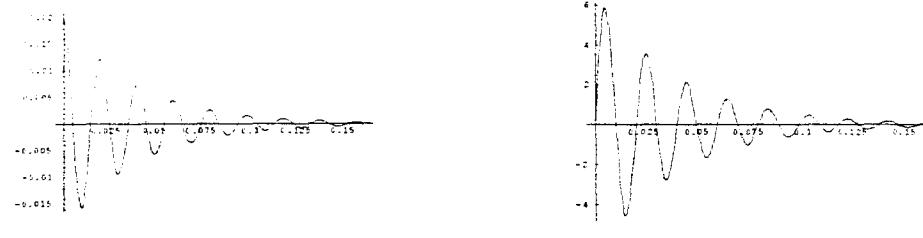


图 3 第(ii)种情况下梁中点位移与作动器控制电压

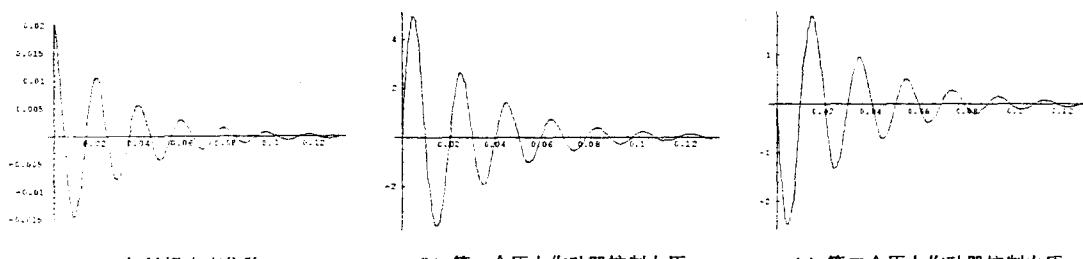


图 4 第(iii)种情况下梁中点位移与作动器控制电压

6 结论

本文利用广义位置函数法，建立了机敏梁结构状态变量描述与各种系统输出构成的线性控制系统，在定义了以控制能量消耗及系统状态为基准的二次型性能指标的基础上，应用李雅普诺夫第二方法求解最佳控制问题。结果表明，广义位置函数法能够以解析形式将压电作动器大小、位置分布状态引入控制系统方程，是进一步讨论作动器大小和位置对主动控制效果影响的有效方法。

本文对作动器大小、数目不同的三种情况进行了计算，从结果中可以看到作动器有效长度和分布位置对控制效果的影响。全覆盖方式由于其有效作动区域较大，则控制作用较大，同时花费的材料代价也大，而多输入控制系统比单输入系统的可调控制参数多，在作动器材料有限时多输入系统在控制效果和能量消耗方面具有明显优势。因此，对于机敏结构的振动控制问题，宜采用离散分布多输入控制方式。

从第 ii 和第 iii 种情况的结果来看，作动器位置的选取对优化控制结果有很大影响。两种情况虽然作动器有效长度保持不变，但其分布方式的不同对反馈增益的解有巨大影响，并且使得作动器控制电压发生较大改变。

机敏结构的主动控制问题中，通过调整反馈增益以达到控制效果最优是通常采用的方法。通过本文的分析可以看到，当作动器位置固定时，反馈增益仅仅取决于性能指标的选取方式；而在固定的性能指标下，反馈增益将取决于传感器/作动器的几何特性及其分布情况。

参考文献：

- [1] 冯伟等. 智能梁振动主动控制的广义位置函数法. 《力学学报》, 2001, 33(02): 258-263.
- [2] Thomas B. and Hubbard J.E., Distributed piezoelectric polymer active vibration control of a cantilever beam, *J. Guidance*, 1985, 8(5): 605-611.
- [3] Crawley E.F. and Javier de Luis, Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures, *AIAA J.*, 1987, 25(10): 1373-1385.
- [4] Seyoung I.M. and Atluri S.N., Effects of a piezo-actuator on a finitely deformed beam subjected to general loading, *AIAA J.*, 1989, 27(12): 1801-1807.
- [5] Sunar M. and Rao S.S., Thermopiezoelectric control design and actuator placement, *AIAA J.*, 1997, 35(3): 534-539.
- [6] Kammer D.C., Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures, *J. Guidance*, 1991, 14(2): 251-259.
- [7] Baz A. and Poh S., Performance of an active control system with piezoelectric actuators, *J. of Sound and Vibration*, 1988, 126(2): 327-341.
- [8] 孙朝辉等. 自适应结构振动的主动控制技术及实验研究. 《振动与冲击》, 1996, 15(1): 18-24.
- [9] Papadopoulos M. and Garcia E., Closed-Loop pole design for vibration suppression, *J. of Guidance, Control and Dynamics*, 1997, 20(2): 333-337.
- [10] 李岳峰等. 压电梁振动的多输入多输出主动控制. 《振动工程学报》, 1998, 11(1): 9-17.
- [11] Balas M.J., Active control of flexible systems, *J. Optimization Theory and Applications*, 1978, 25(3): 415-436.