

垂向荷载作用下饱和砂土的稳定性分析*

鲁晓兵 王淑云 张金来

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 用小扰动方法作了饱和砂土在垂向荷载作用下的稳定性分析。结果表明, 一般情况下, 有两种失稳形式: 软化失稳和渗透失稳。饱和砂土的稳定性主要受到孔隙率、骨架模量和孔隙压力梯度的影响。这三个量与颗粒密度可以组成一个无量纲量 η , 该量的大小决定了饱和砂土是否会失稳。

关键词 垂向载荷; 饱和砂土; 稳定性

1 前言

饱和砂土的稳定性问题不仅具有理论研究价值, 而且对于地质灾害防治具有重要意义。近年来该问题引起了许多学者的关注^[1,2], 研究主要针对的是水平剪切条件。在受到垂向荷载作用时, 饱和砂土应力应变状态将发生变化, 这种变化是否会导致砂土的失稳? 如果是, 则找到失稳条件对工程实践有重要的意义, 可以采取适当的措施防止失稳的发生。本文的目的就是探讨饱和砂土受到垂向荷载作用时是否存在失稳条件。

讨论的问题是垂向一维条件下的饱和砂土, 即砂层在水平向无限而垂直向有限, 砂土中的各变量及参数在同一水平面上的值相等。顶端面作用为自由面, 底端面受到垂向荷载的作用时, 砂土中有效应力、孔隙水压及骨架参数将发生变化, 这些变化发展到一定的条件时, 可能造成饱和砂土的失稳。下面就用小扰动方法, 讨论垂向荷载作用下饱和砂土的稳定性。

2 数学表述

在垂向荷载作用下, 饱和砂土的一维模型为^[3]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nv_w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial n}{\partial t} - (1-n) \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial n}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial n\rho_w v_w}{\partial t} + \frac{\partial n\rho_w v_w^2}{\partial x} + n \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -H + n\rho_w g \\ (1-n) \rho_s \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial x} \right) + (1-n) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_e}{\partial x} &= H + (1-n) \rho_s g \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 n 为孔隙率; v_w , v_s 分别为水和颗粒的速度; ρ_w , ρ_s 分别为水和颗粒的密

* 该项研究得到中国杰出青年基金 (基金号: 40025103) 和中国自然科学基金资助项目 (10202024) 的支持。

度； ρ 为孔隙压力； σ_e 为有效应力； g 为重力加速度； β 是水的可压缩系数； $H = n^2 (v_w - v_s) / K$ ； K 为相间作用力系数且 $K = k/\mu$ ； μ 为水的粘性系数； k 为砂土的渗透率。

有效应力应变关系写成如下的形式

$$\sigma_e = f(n) \quad (2)$$

这样，就有

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_e}{\partial n} = -E \frac{\partial n}{\partial x} \quad (3)$$

3 小扰动分析

小扰动分析方法是稳定性分析的有用的工具之一^[4]。本文将采用该方法分析垂向荷载作用下饱和砂土的稳定性。

设 v_{u0} , v_{s0} , n_0 , p_0 为满足上面控制方程和初边界条件的一组解。

设小扰动对应的解为

$$\begin{cases} v_u = v_{u0} + v'_u, & |v_{u0}| \gg |v'_u| \\ v_s = v_{s0} + v'_s, & |v_{s0}| \gg |v'_s| \\ P = P_0 + P', & |P_0| \gg |P'| \\ n = n_0 + n', & |n_0| \gg |n'| \end{cases}, \quad \begin{cases} v'_u = v'_u e^{at + i\omega t} \\ v'_s = v'_s e^{at + i\omega t} \\ P' = P'_u e^{at + i\omega t} \\ n' = n'_u e^{at + i\omega t} \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\alpha = c + id \quad (5)$$

这样，将上述两个方程代入控制方程中并考虑方程 (1)，有

$$\begin{vmatrix} \alpha & i\beta n_0 + \frac{\partial n_0}{\partial x} & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \frac{\partial n_0}{\partial x} - (1-n_0)i\beta & 0 \\ \frac{\partial P_0}{\partial x} - P_w g & P_u n_0 \alpha + \frac{n_0^2}{K} & -n_0^2/K & n_0 \\ -Ei\beta - \frac{\partial P_0}{\partial x} - P_w g & -n_0^2/K & P_u (1-n_0) \alpha + \frac{n_0^2}{K} & 1-n_0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} n' \\ v'_u \\ v'_s \\ P' \end{Bmatrix} = 0 \quad (6)$$

要使上面方程有解，方程的系数矩阵应为零，假使砂土为小变形，设 $\frac{\partial v_{u0}}{\partial x} \approx 0$, $\frac{\partial v_{s0}}{\partial x} \approx 0$,

$\frac{\partial n_0}{\partial x} \approx 0$ 整理后得到

$$(1-n_0) [(1-n_0) \rho_u + n_0 \rho_s] \alpha^2 + \frac{n_0}{K} \alpha + \beta^2 (1-n_0) n_0 E - n_0 (1-n_0) \left[\frac{\partial P}{\partial x} - (1-n_0) \rho_w g - n_0 \rho_s g \right] i\beta = 0 \quad (7)$$

α 有正实根的条件是 $E < 0$ or $\frac{\partial P}{\partial x} - (1-n_0) \rho_w g - n_0 \rho_s g < 0$ ，即软化失稳或渗透失稳。通常情况下，两个影响因素同时存在，但不同时满足，这时的条件是什么？

下面给出了 α 的实部 c 与砂土渗透率、骨架模量的关系（图 1、图 2）。可以看到，在其他

参数给定的情况下, 随着砂土渗透率的增加, 砂土的稳定性越来越差; 骨架模量的绝对值越小, 砂土的稳定性越差; 孔隙压力梯度越高, 稳定性越差。

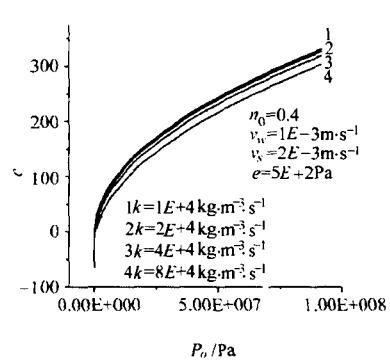


图1 渗透系数的影响
($P_{0x} = \partial P / \partial x$)

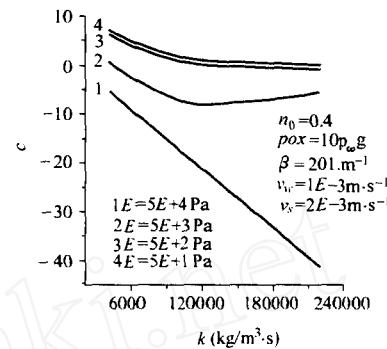


图2 模量的影响

从这个结果可以想到, 是否存在一个无量纲量, 这个量决定 c 的数值的大小。为此作量纲分析, 主定量有: 颗粒的密度 ρ_s 、初始孔隙率 n_0 、颗粒的速度 v_s 、砂土骨架的模量 E 、水的密度 ρ_w 、水的速度 v_w 、相间作用力系数 K 、扰动波数 β 、孔隙压力梯度 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 、重力加速度 g 。待定量为扰动频率 α 的实部 c 。有

$$cK\rho_s = f \left(\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 \rho_s K^2}{E}, \frac{v_s}{\sqrt{E/\rho_s}}, \frac{\rho_w}{P_s}, \frac{v_w}{\sqrt{E/\rho_s}}, \beta K \sqrt{\rho_s E}, \frac{g K P_s^2}{\rho_s E}, n_0 \right) \quad (18)$$

因为 P_w , g 是常数, 一般情况下 $v_w \sim 10^{-2 \sim -4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_w \sim 10^{-2 \sim -4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\beta \sim 10^{0 \sim -1} \text{ m}^{-1}$, $K \sim 10^{-3 \sim -5} \text{ m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$, $|E| \sim 10^{0 \sim 5} \text{ Pa}$, $\frac{\partial P}{\partial x} > 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。经过量级比较, $\frac{v_s}{\sqrt{E/\rho_s}}$, $\frac{\rho_w}{P_s}$, $\frac{v_w}{\sqrt{E/\rho_s}}$, n_0 , 均远小于 $\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 \rho_s K^2 / E$ 。这样, 式 (18) 就可以简化为

$$\frac{cP_s}{K} = f \left(E / \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 \rho_s K^2 \right) \quad (19)$$

可以看到, c 的值决定于 $\frac{\partial P}{\partial x}$, K , E 三个量, 分别表示孔隙压力梯度、渗透阻力和模量。如果 $\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 \rho_s K^2 \gg 1$, 表示孔隙水渗流起决定作用, 反之, 则强度起决定作用。现在取如下参数进行计算: $\rho_s = 2600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $P_w = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\beta = 101 \cdot \text{s}^{-1}$, $n_0 = 0.4$, $v_w = -1.0 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_s = -2.0 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\frac{\partial P}{\partial x} = 1.0 \times 10^4 \text{ Pa} \sim 1.98 \times 10^5 \text{ Pa}$, $K = 5.0 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1} \sim 2.0 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$, $E = 5.0 \times 10^4 \text{ Pa} \sim 2.0 \times 10^4 \text{ Pa}$ 。根据式 (6) 求 c 的实部, 然后按照式 (9), 将结果绘于图 3。从图 3 可以看到, 随着无量纲量 $E / \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 \rho_s K^2$ 增加, 无量纲量 $\frac{cP_s}{K}$ 由正值逐渐减小到负值, 且可以看到, $\frac{cP_s}{K}$ 由正到负的临界值约等于 0.4。

$$\eta = CK\rho_s, \quad \eta = \frac{E}{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 \rho_s K^2}$$

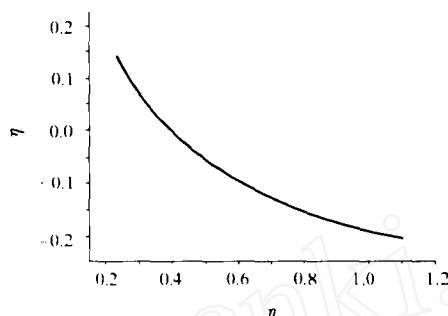


图 3 稳定性的范围

4 结语

在本文中用小扰动方法作了饱和砂土在垂向荷载作用下的稳定性分析。结果表明，一般情况下，有两种失稳形式：软化失稳和渗透失稳。饱和砂土的稳定性主要受到孔隙率、骨架模量和孔隙压力梯度的影响。这三个量与颗粒密度可以组成一个无量纲量 η ，该量的大小决定了饱和砂土是否会失稳。通过这三个量的不同组合进行计算，在本文给定的情况下，求得临界值的大小越等于 0.4，当 η 小于 0.4 时，饱和砂土就会失稳。

参 考 文 献

- [1] J. R. Rice, On the Stability of Dilatant Hardening for Saturated Rock Masses, *J. Geophys. Res.*, 1975, **80** (11): 1531~1536.
- [2] I. Vardoulakis, Stability and Bifurcation of Undrained, Plane Rectilinear Deformations on Water-Saturated Granular Soils, *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 1985, 9: 399~414..
- [3] 鲁晓兵, 谈庆明, 余善柄, 郑哲敏. 垂向载荷作用下饱和砂土的液化分析. *力学学报*, 2001, 5: 612~620
- [4] C. C. Lin, *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge at The University Press, 1995, 1~30