

断裂力学中的局部-整体法¹⁾

柳春图

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 详细阐述了局部-整体法的内涵、力学特点以及研究的求解步骤, 并以含裂纹板壳作为典型结构进行实例分析, 分析计算结果表明在断裂力学中特别是在有限尺寸的断裂分析中, 局部-整体法是在掌握问题主要力学特性基础上的一个精确而又实用的分析方法, 最后简述了今后局部-整体法进一步的研究途径。

关键词 局部-整体法, 板壳断裂力学, 应力强度因子

前 言

自从 20 世纪 50 年代断裂力学问世以来, 含裂纹的分析计算方法就同时随之跟踪发展, 很自然地把固体力学的一套分析方法移植过来, 由于问题的复杂, 初期只是对于无限大的典型结构进行分析计算, 随着有限元计算的发展, 对于有限结构开始进行有限元分析计算, 为了提高准确性在分析计算方法上也由一般有限元分析发展到等参元分析, 即使如此, 也由于问题的复杂带来计算的复杂, 有代表性的是作者 J.C. Newman 和 I.S. Raju^[1], 对于含椭圆形表面裂纹平板应力强度因子的计算中用了近万个自由度, 计算工作量巨大。

在固体力学分析计算方法中, 按力学问题性质来分可分为两种方法, 一类叫整体法例如求解梁、板的临界载荷和梁、板振动的固有频率, 由于这类力学问题是总体问题, 因此应用整体方法就特别有效; 对于另一类力学问题如求解板壳在集中载荷下作用点附近的内力, 这就是局部问题, 如果用解决总体问题的方法来求解必然是少慢差费, 因此不同的力学问题需要寻求不同的分析计算和理论。除上述两类问题外, 还有另一类问题如一个带有裂纹的物体在受外载荷情况下求解它的断裂参量应力强度因子的问题, 如单纯应用上述两种类型的任何一种分析计算方法都会带来不少的困难, 这就是说这类问题既具有局部性质又需要考虑整体性能, 这就是第三种类型, 对于这种情况采用局部-整体法对求解问题是有效的。局部-整体法的总体思想是在重要的局部要尽量的细致描述, 而相对次要的部位则可以应用比较粗糙的方法来处理。本文是以含裂纹板壳为实例内容来阐述局部-整体法。

1 含裂纹板

对于含裂纹板有限尺寸的断裂参量的计算, 1971 年见到第一篇应用有限元计算平板弯曲断裂的文章^[2], 该文采用 Kirchhoff 板元求解, 其物理基础存在缺陷, R. S. Barsoum^[3]采用厚板退化元配合畸变等参元的方法, G. Yagawa^[4]采用奇异项上叠加有限元模式的方法都用来讨论 I 型问题, 本文将基于局部-整体法来讨论含裂纹板的问题。

1.1 局部解

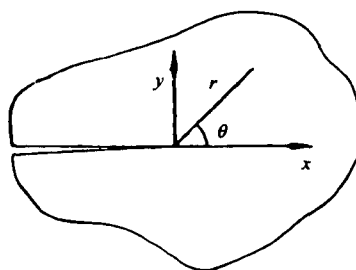


图 1

1) 国家自然科学基金委员会资助项目

考虑一块含有半无限穿透裂纹的受弯平板，取裂纹尖端为坐标原点，其 x, y 轴如图 1 示。我们采用 Reissner 理论，求解上述问题最后可求得裂纹尖端附近的广义位移和广义应力以级数形式表示的局部解

1.2 局部-整体法

在上节我们得到了裂纹尖端应力应变场的一般展开式为发展 Reissner 板的精度高又实用的局部-整体法提供了理论基础，如何计算断裂参量应力强度因子我们在这里介绍两种方法。

1) 以上述裂纹尖端位移场展开式为位移模式所构造的裂纹尖端高阶奇异元和常规元相结合的方法^[5, 6]。

由于我们在裂纹尖端附近采用的是基本符合真实位移和应力的模式，当然可预期获得好的效果，这也是一种半解析半数值的方法，如图 2，我们可在 Reissner 板裂纹尖端位移场展开式截取前若干项加上三个板的刚体位移构成尖端奇异元的位移模式，在外部可用普通常规元，在其接合部位，根据位于奇异单元边界的常规单元的节点处两单元的广义位移相等的条件，导出一个常规单元刚度矩阵的转换矩阵，然后将位于奇异元边界的常规元节点位移用奇异元的广义位移代替，这是连接的一个常用方法。

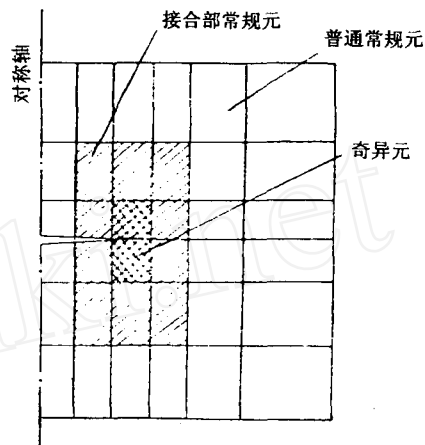


图 2

算例：有限尺寸板受均匀弯矩作用，边界为 $2L$ 的正方板，中心裂纹为 $2a$ ，周边受到均匀弯矩 M 作用。

不同板厚时应力强度因子 K_I 值为

表 1 不同板厚时应力强度因子的数值

h/a	$\phi(1)$	$K_I(\text{kg/cm}^{3/2})$ (本文)	K_I (文献[16])	相对误差
0.1	0.470	484.0218	499.832	3.16%
0.5	0.693	28.61372	29.4794	2.79%
1	0.744	7.818764	7.9181	1.25%
2	0.815	2.162566	2.1668	0.195%

由计算结果可以看出，对于无限大板本文结果与精确解的误差很小，而文献[3]应用等参单元计算的结果在 $h/a=0.04$ 薄板情况下， $\phi(1)=0.372$ 误差达 13%，在有限尺寸可能还有较大变化，这就看出若采用局部-整体法可以获得精度高而实用的解。

2) 裂纹尖端位移展开式与能量法相结合的方法^[7]。

能量法是求解固体力学整体问题中常用的一种工程实用分析方法，对于 Reissner 板我们写出它的势能表达式

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_C (Q_n w - M_n \psi_n - M_{ns} \psi_s) ds - \int_C (\bar{Q}_n w - \bar{M}_n \psi_n - \bar{M}_{ns} \psi_s) ds \quad (1.1)$$

边界条件为 $M_\theta = 0, \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + Q_\theta = 0$

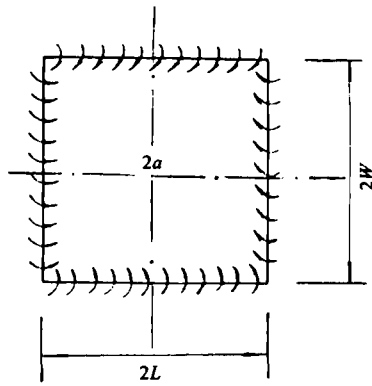


图 3

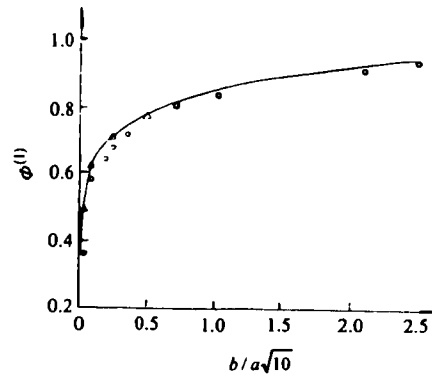


图 4

○文献[17], △本文, —文献[16]

算例：中心裂纹板，四边受均匀弯矩作用，设 $a/L = 1/10$ ，其应力强度因子值见下表

表 2 四边自由的不同厚度中心裂纹板应力强度因子

h/a	K_I 本文	精确解 ^[5]
0.5	29.28	28.61
1	7.44	7.82

$a = 1\text{cm}$, $L = 10\text{cm}$, K 单位为 $\text{kN/cm}^{3/2}$

由上表可以看出由本文的能量法求得的解精度好而方法简单，实用。

1.3 复合型应力强度因子计算

考虑一块边长为 $2L$ 中心裂纹为 $2a$ 的方板，四周受到均匀扭矩作用。我们要求解其应力强度因子 K_{II} 和 K_{III} 。在扭矩作用下， K_{II} 和 K_{III} 是耦合在一起的，过去^[8]曾应用积分变换解过无限大板的问题，我们通过局部-整体法求得如下结果。

表 3 无量纲应力强度因子 \tilde{K}_2 和 \tilde{K}_3 对照

方法	$a/h = 0.5$		$a/h = 0.625$		$a/h = 1$		$a/h = 2$	
	\tilde{K}_2	\tilde{K}_3	\tilde{K}_2	\tilde{K}_3	\tilde{K}_2	\tilde{K}_3	\tilde{K}_2	\tilde{K}_3
局部-整体法	0.727	-0.034	0.676	-0.044	0.547	-0.067	0.369	-0.087
解析法	0.705	-0.036	0.659	-0.045	0.521	-0.070	0.352	-0.091
相对误差 (%)	3.0	4.9	1.7	0.3	4.9	3.9	4.8	4.3

注：取 $2L = 2W = 200a$ ，无量纲应力强度因子 $\tilde{K}_2 = K_2 / (6M_{xy} \sqrt{\pi a} / h^2)$ ， $\tilde{K}_3 = K_3 / (6M_{xy} \sqrt{\pi a} / h^2)$

需要指出的，对于复合型问题位移模式的阶数需要取得更多一些才能取得 I 型同样的效果，这就可看出采用局部解的作用对于求解复合型应力强度因子更为重要。

2 含裂纹壳体的局部-整体法

在常用的工程结构中壳体是一个重要的结构形式。壳体的断裂问题一直得到工程界的重视。由于 Kirchhoff 经典壳体断裂理论的缺陷，Sih^[9]和 Delale^[10]分别用积分变换的方法研究了无限大含裂纹球壳受对称载荷的问题，由于仅仅给出裂纹尖端场的首项表达式，只针对含裂纹无限大扁壳，整个场的力学结构特性不清楚，很难深入进行，工程中使用范围有限。我们为了得到符合实际的壳体断裂状况，首先求解裂纹尖端附近的力学特性，以此为基础通过局

部-整体法获得壳体的断裂参量:

2.1 球壳局部-整体法

如图 5 所示球壳, 其中面半径为 R , 厚度为 h , 底面半径为 L , 壳体内裂纹长度为 $2a$ 。由 Reissner 球壳的基本方程和边界条件, 通过类似上节的推导和运算可得到球壳裂纹尖端应力应变场的一般展开式, 与含裂纹板局部-整体法同样做法求得应力强度因子。

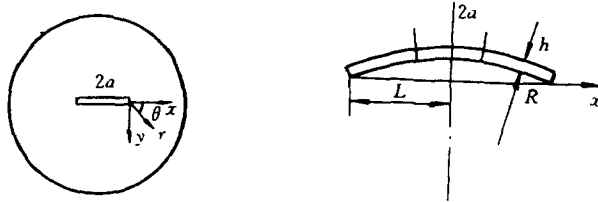


图 5

算例^[11]: 边界受均布弯矩时的应力强度因子计算结果如表 4 所示。

表 4 边界受均布弯矩时的应力强度因子

Δ	应力强度因子 ($K_I / M_0 \sqrt{\pi a} / h^2$)			
	$a/L=0^{①}$	$a/L=0.1$	$a/L=0.25$	$a/L=0.5$
$0^{②}$	0.744	0.741	0.757	0.870
0.25	0.703	0.680	0.701	0.781
0.5	0.619	0.433	0.613	0.727

注: 计算对象见图 5, 取 $\nu=0.3$, $a/h=1$

① 注无限大扁球壳结果取自解析解^[9];

② 曲率为零的球壳的结果取自对 Reissner 型平板的计算结果^[6]。

由表中数值可看到在无限大时两者是吻合的, 而用有限尺寸的影响是较大的。我们还可以通过局部-整体法获得其它有意义的力学特性和其它力学问题如应力强度因子随厚度比的变化; 偏心裂纹情况不同支承条件下受均匀内压含裂纹球壳等。

边界受均匀扭矩的有限尺寸球壳, 见文献[12]中表 10.4 和 10.5。

2.2 鼓胀系数

这是压力容器行业中的专有名词, Folias^[15]首先用 Kirchhoff 经典壳体弯曲断裂理论研究了鼓胀动应问题, 对于受内压的含裂纹球壳应力强度因子可以表示为

$$K_I = M\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.1)$$

其中 M 称为鼓胀系数, 它表示球壳的应力强度因子与对应受拉伸平板的应力强度因子之比。通过研究提出了鼓胀系数的公式

$$M = (1 + 0.59\lambda^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

$$\lambda = \sqrt[3]{12(1-\nu^2)} a / RH$$

以上公式在国际工程界中得到广泛应用并纳入有关标准中。

由于上述公式采用的经典壳理论存在一定缺陷, 我们基于考虑剪切变形 Reissner 球壳采用了局部-整体法计算了鼓胀系数, 其数值结果如图 6 所示, 其中 $\delta = D/(ca^2)$, D 为弯曲刚

度, C 为剪切刚度, a 为裂纹半长。由分析计算提出了鼓胀系数的一个新的近似公式

$$M(\lambda, \delta) = (1 + 0.59\lambda^2)^{\frac{1}{2}} (1 + 1.2\delta^3 \lambda e^{-\lambda}) \quad (2.3)$$

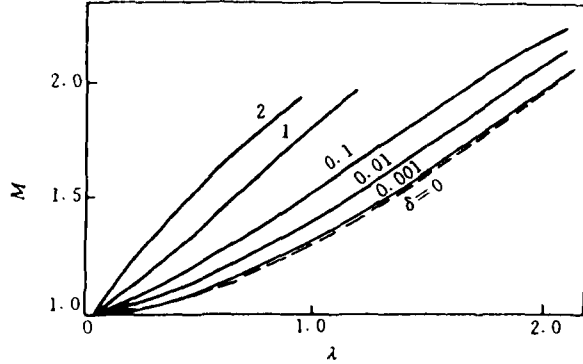


图6 鼓胀系数随 λ 和 δ 的变化

通过本节讨论可以看出由于求得了含裂纹球壳的局部解, 在以此为基础通过局部-整体法可以精确地求得球壳断裂分析的各种问题包括尚未解决的问题。对于圆柱壳同样可处理各类问题, 这里不再叙述了。

3 表面裂纹

表面裂纹是工程中经常遇到的一种裂纹形式, 由于是三维问题, 其计算量很大。Newman 和 Raju^[1] 曾采用近万自由度的大型三维有限元计算了含半椭圆表面裂纹受拉伸与弯曲载荷的 I 型问题并得到了国际普遍认可的结果。文献[13]采用了局部-整体法进行了分析,

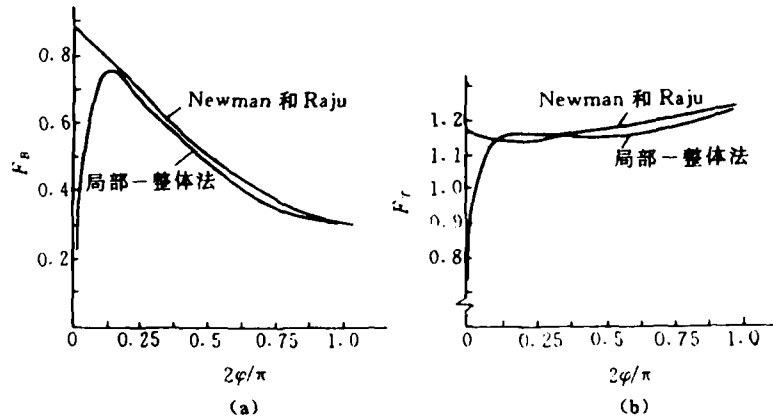


图7 局部整体法与 Newman 和 Raju 的结果比较

不仅计算了 I 型, 还计算了 II, III 复合型, 并进行了实验研究。结果如图 7。

讨论

1) 两种方法计算的结果基本上吻合, 在裂纹最深点 ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) 对于拉伸载荷两者相差 0.37%, 对于弯曲载荷两者相差 1.81%。Newman 等采用了近万个自由度, 而局部-整体法仅用其 1/10 的自由度在 Univac-1100 系统用十几分钟即可完成。

2) Newman 等的计算结果在趋于自由表面角点时, 应力强度因子值平稳增加, 而局部-整

体法的结果在靠近自由表面的角点区域应力强度因子值急剧下降。文献[14]的光弹性实验结果也表明在趋近自由边界时应力强度因子急剧下降,这说明局部-整体法更为合理。

3) 通过局部-整体法来分析难度较大的问题如复合型等。在对复合型分析中发现局部解中需要截取比 I 型取到更高一些项才能达到较好的结果。可看出选择局部-整体法的优越性所在。

4 展 望

1) 由于精确掌握含裂纹体的主要矛盾即裂纹尖端应力应变场在此基础上形成的局部-整体法就必然是求解断裂问题的一个准确而实用的工具,此方法可以推广到含各类缺陷、不均匀材料、复合材料等力学性能有突变的结构问题。

2) 在整体和局部分析中可根据不同问题采用不同方法以求实用。

3) 考虑更好的联结形式使其准确、方便。

参 考 文 献

- 1 Newman JC and Raju IS. Analyses of surface crack in finite plate under tension or bending loads. NASA TP-1578, 1979
- 2 Wilson WK and Thompson DG. On the finite element method for calculating stress intensity factors for cracked plates in bending. *Engng Fracture Mech*, 1971, 3: 2
- 3 Barsoum RS. A degenerate solid element for linear fracture analysis of plate bending and general shells. *Int J Num Meth Engng*, 1976, 10: 551~564
- 4 Yagawa G. Finite element analysis of stress intensity factors for plate extension and plate bending problems. *Int J Num Meth Engng*, 1979, 14: 5
- 5 柳春图, 李英治. Reissner 型平板弯曲断裂分析. *力学学报*, 1983, 15(4): 366~375
- 6 李英治, 柳春图. Reissner 型板裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算. *力学学报*, 1984, 16(4): 351~362
- 7 柳春图, 张瑞重. Reissner 型板中应力强度因子的近似方程和近似解法. *力学学报*, 1988, 20(6): 515~521
- 8 Dalale F and Erdogan F. The effect of transverse shear in a cracked plate under skew-symmetric loading. *J Appl Mech*, 1979, 46(3): 618~624
- 9 Sih GC and Hagendorf HC. A new theory of spherical shell with cracks. *Thin Shell Structure*. 1974, 365~375
- 10 Dalale F and Erdogan F. Effect of transverse shear and material orthotropy in a cracked spherical cap. *Int J Solids Structures*, 1979, 15: 907~926
- 11 Liu CT, Wu X J and Li Y Z. Study on cracked spherical shells. *Scientia Sinica(Series A)*. 1987, 15(9): 944~954
- 12 柳春图, 蒋持平. 板壳断裂力学. 北京: 国防工业出版社, 2000
- 13 李英治, 李敏华, 柳春图, 何明元. 含表面裂纹三维体裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算. *中国科学*, 1988
- 14 黎之奇, 柳春图, 胡振威. 含表面裂纹尖端应力强度因子的三维光弹分析. *实验力学*, 1991, 6(4): 347~354
- 15 Folias ES. A finite line crack in a pressurized spherical shell. *Int J Fracture Mech*, 1965, 1: 20~46
- 16 Hartanft RJ and Sih GC. Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks. *J Math And Phy*, 1968, 47, 276~291
- 17 Barsoum RS. A degenerate solid element for linear fracture analysis of plate bending and general shells. *Int J Num Meth In Eng*, 1976, 10, 551~564