

非均匀网格三点四阶紧致差分格式

于 欣

中国科学院力学研究所，北京 100080

摘要 本文对一阶、二阶导数给出非均匀网格上的三点四阶精度紧致差分离散。求解二阶微分方程二维或三维问题，精度高、耗散色散低、计算稳定，适用于湍流直接数值模拟等（见[1], [2]）。

0 引 言

随着电子计算机的发展，越来越多的实际问题数值模拟成为现实，但同时，实际问题对计算的要求也越来越高，有些问题可能要计算多日甚至更长。在保证计算精度的前提下，减少计算时间的一个方法是提高离散精度。

例如对直接数值模拟，计算机容量和速度需要极大，计算方法受到挑战，由于湍流中包含不同尺度的结构，而大小尺度结构相差十分悬殊，这就要求数值计算方法同时具有捕捉大小尺度流动结构的能力，具有高精度，低耗散低色散，计算稳定，具有抑制混淆误差的能力。

近十年来，紧致差分格式得到更广泛的应用，她比传统差分格式具有使用的网格点少，精度高，低耗散低色散，稳定性好等优点，更适合于湍流直接数值模拟。

我们在[3]中给出了交错网格紧致差分格式，他比非交错网格紧致格式计算更稳定。

过去的紧致差分格式通常采用均匀网格。对非均匀网格，通过 Jacobi 变换使计算区域网格均匀。这在物理域网格变化剧烈的情况下会产生较大误差。另外，有时由于计算需要，网格变化很大。L. Garnet 等人于 1999 年提出了基于非均匀网格的对称紧致格式，该格式甚至在随机网格上仍能保持很高精度，见[1]。

1. 本项研究最新进展见：<http://www.cerse.psu.edu/yu/num/>
2. 作者的 Email: yu@cerse.psu.edu 个人主页：<http://www.cfm.brown.edu/faculty/yu/>
3. 作者感谢中国科学院回国人员择优基金的资助

李新亮等人构造了基于非均匀网格的迎风紧致格式[2]，文章用数值实验说明，该方法精度高，对网格要求宽松，能抑制高频非物理振荡，可推广到三维情况，是进行槽道湍流直接数值模拟的有效方法。

我们这里给出的基于非均匀网格的紧致差分格式，

1. 对于一阶导数：与 L. GAMET 文(见[1]) 中的四阶格式相比，精度相同（四阶），系数简单，差分点少（三个差分点，而 L. GAMET 格式五个差分点；李新亮文[2]中的迎风紧致格式为五点五阶）；
2. 对于二阶导数：与[1]中的三阶格式相比，我们这里给出的基于非均匀网格的紧致格式，精度高一阶（四阶），差分点少（三个差分点，而 L. GAMET 格式五个差分点）。

本文给出的紧致差分格式是对一阶和二阶导数的离散，因此可以应用到二阶微分方程和偏微分方程二维和三维问题。

1 非均匀网格三点四阶紧致差分离散

对一阶导数，我们给出如下基于非均匀网格的紧致差分格式：

$$\frac{b_p^2}{(b_m + b_p)^2} u'_m + u' + \frac{b_m^2}{(b_m + b_p)^2} u'_p = \frac{2b_p^2(2b_m + b_p)}{(b_m + b_p)^3} \frac{u - u_m}{b_m h} + \frac{2b_m^2(b_m + 2b_p)}{(b_m + b_p)^3} \frac{u_p - u}{b_p h}$$

其中

$$b_m = h_{i-1}/h = (x_c - x_m)/h$$

$$b_p = h_i/h = (x_p - x_c)/h$$

u_m, u'_m, u''_m 在 $x_{i-1} = x_m$ 点取值

u, u', u'' 在 $x_i = x_c$ 点取值

u_p, u'_p, u''_p 在 $x_{i+1} = x_p$ 点取值

对角占优：

$$1 - \frac{b_p^2}{(b_m + b_p)^2} - \frac{b_m^2}{(b_m + b_p)^2} = \frac{2b_m b_p}{(b_m + b_p)^2}$$

与 L. GAMET 文 [1] 中的四阶格式相比，精度相同（四阶），系数简单，差分点少（三个差分点，而 L. GAMET 格式五个差分点）。

上述一阶导数的差分式中 u_m, u, u_p 也可记为 u_{i-1}, u_i, u_{i+1} ，用光滑函数 u 代入该式得误差（左端减右端）为

$$\frac{1}{120} b_m^2 b_p^2 h^4 u^{(5)} + O(h^5) = O(h^4)$$

对二阶导数，我们给出如下基于非均匀网格的紧致差分格式：

$$s_m u''_m + s_c u'' + s_p u''_p = c_m \frac{u - u_m}{b_m h^2} + c_p \frac{u_p - u}{b_p h^2} + (a_m + a_c q_m) \frac{u'_m}{h} + a_c \frac{u'}{h} + (a_p + a_c q_p) \frac{u'_p}{h}$$

其中 u'_m, u', u'_p 为前面求出的； $a_c = -(a_m e_m + a_p e_p)/e_a$ ， e_m, e_c, e_p 满足

$$q_m e_m + e_c + q_p e_p = e_a$$

$$q_m = (b_p/(b_m + b_p))^2 \quad q_p = (b_m/(b_m + b_p))^2 \quad e_a = b_m^2 b_p^2 / 120$$

$$a_{sm} = \frac{-(b_m b_p (b_m^5 + 2 b_m^4 b_p + 4 b_m^3 b_p^2 + 6 b_m^2 b_p^3 + 720 b_p e_m + 3 b_m (b_p^4 + 120 (e_m - e_p))))}{60}$$

$$a_{sp} = \frac{b_m b_p (3 b_m^4 b_p + 6 b_m^3 b_p^2 + 4 b_m^2 b_p^3 + b_p (b_p^4 - 360 (e_m - e_p)) + 2 b_m (b_p^4 + 360 e_p))}{60}$$

$$\begin{aligned} e_r = & - (b_m^5 b_p^2) - b_m^4 b_p^3 + 120 b_m b_p^2 e_m - 60 b_p^3 e_m \\ & + b_m^3 (b_p^4 + 60 e_p) + b_m^2 (b_p^5 - 120 b_p e_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_a = & - \frac{1}{30} \frac{e_r}{a_{sm}^2 + a_{sp}^2} \quad s_m = a_a a_{sm} \quad s_p = a_a a_{sp} \quad s_c = 1 - s_m - s_p \\ a_m = & - \frac{-2 b_m + 2 b_p + a_p b_m b_p + a_p b_p^2 + 6 b_m s_m - 6 b_p s_p}{b_m (b_m + b_p)} \\ a_p = & \frac{2 (b_m^2 - 2 b_m b_p + 3 b_m b_p s_m + 6 b_m b_p s_p + 3 b_p^2 s_p)}{b_p (b_m + b_p)^2} \end{aligned}$$

系数看上去复杂，但只要计算一次。

与 L. GAMET 文 [1] 中的三阶格式相比，精度高（四阶），差分点少（三个差分点，而 L. GAMET 格式五个差分点）。增加了一阶导数 u' , u' 为前面求出的四阶解。求解 u'' 时用到的是 u'/h ，它只有三阶精度，我们取线性组合 $(a_m + a_c q_m) \frac{u'_m}{h} + a_c \frac{u'}{h} + (a_p + a_c q_p) \frac{u'_p}{h}$ ，适当选取 a_c ，使得此线性组合为四阶精度。

注： s_m, s_p 中的 a_a 可适当选取不同的值，见

<http://www.cerse.psu.edu/yu/num/>

- A1. [6]中倒数第七行第二个减号应为加号，即后面的括号中应与上式右端相同；
- A2. [3][5]中我们给出的交错网格紧致差分格式比非交错网格紧致格式计算更稳定；给出的求解不可压缩 N-S 方程的离散压力 Poisson 方程满足等价性，即：他与离散的动量方程一起，等价于离散的连续方程和离散的动量方程。[4]中对 MAC 格式给出了满足此等价性的离散压力 Poisson 方程。该格式取边界上压力的导数值和辅助速度的导数值均为零，这样的数值边条件只是计算上的需要，不影响计算结果，见[4]6.3.1 节。我们在[3]中给出其一般形式，对有导数边条件的格式，例如紧致差分格式，边界上压力的二阶导数和辅助速度的二阶导数也取零值（这样取法对压力和辅助速度均带来误差，但两误差在差分方程中恰好抵消）。

参 考 文 献

- 1 L. Gamet, F. Ducros, F. Nicoud, T. Poinsot, Compact Finite Difference Schemes on Non-uniform Meshes. Application to Direct Numerical Simulations of Compressible Flows, Inter. J. for Numerical Methods in Fluids **29**, 159-191(1999)
- 2 李新亮, 马延文, 傅德薰, 不可压 N-S 方程数值模拟方法研究及二维槽道流动的非线性行为分析
- 3 于欣, 交错网格紧致差分格式和满足等价性的压力 Poisson 方程, 计算数学 **19**, 1 (1997), 83-90
- 4 R. Peyret, T. D. Taylor, Computational Methods for Fluid Flow, Springer-Verlag, 1983
- 5 Yu Xin, A Staggered Mesh Compact Difference Scheme and a Pressure-Poisson-Equation that Satisfies the Equivalency, Chinese J. of Numerical Mathematics and Application, 1997, 19(2), 73-81
- 6 于欣, 计算数学 **20**, 1 (1998 年 2 月)
- 7 于欣; 王发民; 赵烈, 对外流问题保持 TVD 性质的外边界条件, 第七届全国流体力学数值方法讨论会 (长春, 1995 年) 论文集, p.50
- 8 王发民; 赵烈; 于欣, 一种非定常振荡流的稳定性分析, 应用数学和力学: 1996, 17(3): 271-282
- 9 Yu Xin, An Equivalent Pressure-Poisson-Equation for N-S Equations and Staggered Mesh Compact Difference Schemes, First Asian Computational Fluid Dynamics Conference, 1995, Hong Kong, 937-942
- 10 刘宏, 傅德薰, 马延文, 迎风紧致格式与驱动方腔流动问题的直接数值模拟, 中国科学, A 编, 23: 6, 1993, 657-665
- 11 S. G. Rubin, R. A. Graves, Jr., Viscous Flow Solutions with a Cubic Spline Approximation, Computers and Fluids, 3, 1975, 1-36
- 12 M. Ciment, S. H. Leventhal, Higher Order Compact Implicit Schemes for the Wave Equation, Mathematics of Computation, 29, 1975, 985-994
- 13 Jie Shen, J. of Comput. Physics, 95, 1991, 228
- 14 Bernardo Cockburn, Chi-Wang Shu, Nonlinearly Stable Compact Schemes for Shock Calculations, SIAM, J. Numer. Anal., 31:3, 1994, 607-627
- 15 Fu De-xun, Ma Yan-wen, Liu Hong, Upwind Compact Schemes and Applications, Proc. of the 5th Int. Symp. On Computational Fluid Dynamics, I, Sendai, JSCFD, 1993, 184-190