

# 止屈器对地基梁屈曲传播抑制的有限元分析与数值模拟

乐东义 刘志宏\* 黄玉盈

(华中理工大学力学系, 武汉 430074)

**提 要** 本文着重考虑了梁质量惯性的影响, 采用动力有限元和带预测的弧长控制技术相结合的方法, 计算和分析了止屈器对地基梁屈曲传播抑制的作用。大量算例表明: 计及动态得到的止屈效果和前人的准静态结果相比有显著不同。

**关键词** 屈曲传播, 有限元法, 止屈, 非线性地基梁

## 一、引 言

1991年, S.K.Youn首次用有限元法研究了止屈器对非线性弹性地基梁屈曲传播的抑制问题, 得到了一些有意义的结论<sup>[1]</sup>。但是, 他的结果是以准静态为前提, 没有考虑动态过程的影响。这对于屈曲传播速度较快的情况, 是不符合工程实际的。

本文从梁的动态屈曲传播抑制方程出发, 通过局部加大地基的刚度模拟止屈器的作用, 利用动力有限元和带预测的弧长控制相结合的方法, 计算和分析了止屈器对屈曲传播的抑制性能。算例表明: 计及梁的质量惯性以后, 对于同样大小的止屈器, 算得的止屈效率比Youn的结果要低。这说明基于准静态设计止屈器会带来很大危害。

## 二、控制方程和有限元解

由[2]知地基梁在均布动压力作用下, 屈曲传播的动态控制方程(图1)是:

$$\bar{m} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + k(W, x)W = p(t) \quad (1)$$

边界条件和初始条件分别是

- 国家自然科学基金资助项目
- 中国科学院力学研究所, 北京100080

$$x \rightarrow \pm \infty, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0; \quad W(x,0) = \frac{\partial W}{\partial t}(x,0) = 0 \quad (2)$$

式中各符号见 [2] 说明。为了实现屈曲传播，第一，需要在梁地基中部附近生成初始缺陷（即刚度削弱）：

$$k(W,x) = k(W)[1 - \eta \exp(\lambda \xi^2)] \quad (3a)$$

$$k(W) = k_0 [1 - 4.5 \frac{W}{H} + 5.25 (\frac{W}{H})^2] \quad (3b)$$

$\eta$  与  $\lambda$  为缺陷参数， $\xi = (EI/k_0)^{-1/4} x$  为无量纲坐标；第二， $p(t)$  要精心设计，没有止屈器时，[2] 已得到了它的值，如图 2 所示。在该横向动压力作用下，算得的  $W-t$  时程曲线清楚反映了梁的屈曲传播过程 ([2] 中的图 4)，其中  $p_1$  就是所求的屈曲传播压力。

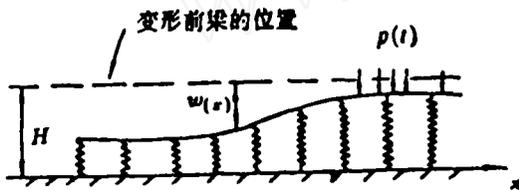


图1

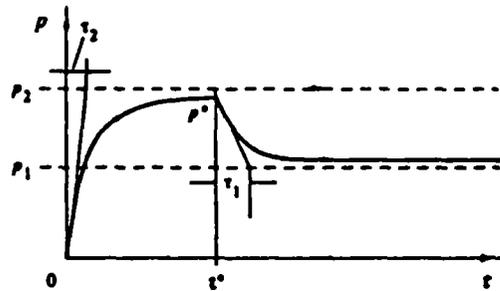


图2

本文着重研究动态止屈问题，因此在止屈器存在的情况下，必须通过逐次加大恒压  $p_1$ ，分别进行动态计算，直至屈曲能穿越止屈器为止。这时的  $p_1$  称为穿越压力，常用  $P_0$  表示。由 [3] 可知衡量止屈器止屈的优劣是依靠止屈效率  $\eta_0$  来判断，它的定义是

$$\eta_0 = \frac{(P_0 / P_c) - 1}{(P_c / P_c) - 1} \quad (4)$$

式中  $P_c$  和  $P_0$  分别表示屈曲传播压力和屈曲诱发压力（临界压力）。

设止屈器沿梁长对称安放两个，坐标原点取在梁的跨中，用  $\pm \bar{\xi}$  表示止屈器的位置，则止屈器附近地基刚度有突变，可写成

$$k(W,x) = \begin{cases} k(W), & |\xi| < \bar{\xi} \text{ 或 } |\xi| > \bar{\xi} + \bar{L} \\ \bar{k}k(W), & \bar{\xi} \leq |\xi| \leq \bar{\xi} + \bar{L} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $\bar{L}$  为止屈器的无量纲宽度， $\bar{k} (= k(W,x)/k(W))$  表示止屈器的无量纲刚度。注意由于止屈器距原点有足够距离 ( $\bar{\xi} \gg 1$ )，故止屈器附近地基的初始缺陷早已消失。

现在的问题是针对 (3,5) 式给出的地基刚度分布，对方程 (1) 和初边值条件 (2) 进行动力有限元求解。

方程 (1) 通过有限元离散，坐标和时间分别采用 *Hermite* 和线性插值，最后可得：

$$[M]\{a\} + [K_s]\{W\} = p(t)\{P\} \quad (6)$$

式中， $[M]$  为线性梁单元的质量矩阵， $\{a\}$  为加速度列阵， $[K_s]$  为梁-地基混合单元的割线刚度矩阵， $[K_s] = [K] + [K_p]$ ， $[K]$  为线性梁的单元刚度矩阵， $[K_p]$  为非线性弹性地基的

割线刚度矩阵, 它们的元素为

$$(K_r)_{ij} = \int_0^l k(W, \bar{x}) N_i(\bar{x}) N_j(\bar{x}) d\bar{x} = C_0 \beta_{ij}^0 + C_1 \beta_{ijm}^1 W_m + C_2 \beta_{ijmn}^2 W_m W_n \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{ij}^0 &= \int_0^l \alpha(\bar{x}) N_i(\bar{x}) N_j(\bar{x}) d\bar{x} \\ \beta_{ijm}^1 &= \int_0^l \alpha(\bar{x}) N_i(\bar{x}) N_j(\bar{x}) N_m(\bar{x}) d\bar{x} \\ \beta_{ijmn}^2 &= \int_0^l \alpha(\bar{x}) N_i(\bar{x}) N_j(\bar{x}) N_m(\bar{x}) N_n(\bar{x}) d\bar{x} \\ \alpha(\bar{x}) &= 1 - \eta \exp\left[-\lambda \sqrt{\frac{k_0}{EI}} (x_s + \bar{x})^2\right] \\ C_0 &= \bar{k} k_0, \quad C_1 = -\frac{4.5}{H} \bar{k} k_0, \quad C_2 = \frac{5.25}{H^2} \bar{k} k_0 \\ \bar{k} &= \begin{cases} 1, & \text{在非止屈器处} \\ \bar{k}, & \text{在止屈器处} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

这里,  $l$  表示梁单元的长度;  $N_i(x)$  为 Hermite 插值函数;  $x_s$  表示梁单元左节点到坐标原点的距离;  $i, j, m, n = 1, 2, 3, 4$ , 而且 Einstein 求和约定被采用;  $\{P\}$  为单位均布力产生的节点力。

对时间积分采用梯形法则, 当时间步长  $\Delta t$  取得足够小时有

$$W^{n+1} = W^n + \frac{1}{2} \Delta t (V^{n+1} + V^n) \quad (9a)$$

$$V^{n+1} = V^n + \frac{1}{2} \Delta t (a^{n+1} + a^n) \quad (9b)$$

式中  $V$  和  $a$  分别表示速度和加速度。合并上述两式可得

$$W^{n+1} = \tilde{W}^n + \frac{1}{4} (\Delta t)^2 a^{n+1} \quad (10a)$$

$$\tilde{W}^n = W^n + \Delta t V^n + \frac{1}{4} (\Delta t)^2 a^n \quad (10b)$$

这表明当前步的加速度可用当前步的位移和前一步的各已知量来表示。

将(10a,b)式代入方程(6)中的  $\{a\}$ , 组装以后则有

$$[M_D + K_s] \{W\}_{n+1} = p_{n+1} \{P\} + [M_D] \{\tilde{W}\}_n \quad (11)$$

式中  $[M_D] = \frac{4}{(\Delta t)^2} [M]$ 。对于每一时间增量步, 方程(11)的右边为已知, 故用熟知的

Newton-Raphson 迭代方法能够确定  $\{W\}_{n+1}$ 。设  $\{W\}_{n+1} = \{W\}_n + \{\Delta W\}_n$ , 那么第  $n+1$  步梁挠度的增量可以写成

$$\{\Delta W\}_n = -[K_s^D]^{-1} \{\psi\}_n \quad (12a)$$

$$\{\psi\}_n = [K_s^D] \{W\}_n - p_{n+1} \{P\} - [M_D] \{\tilde{W}\}_n \quad (12b)$$

其中,  $[K_s^D]$  和  $[K_r^D]$  分别为动力地基梁系统的割线和切线刚度矩阵, 它们可按式确定:

$$[K_s^D] = [M_D] + [K_s] \quad (13a)$$

$$[K_r^D] = [M_D] + [K_r] \quad (13b)$$

$[K_s]$ 按前面给出的关系  $[K_s] = [K] + [K_r]$  计算；由非线性有限元理论， $[K_r]_{i,j}$  的元素为

$$(K_r)_{ij} = (K_s)_{ij} + C_1 \beta_{i,j} W_m + 2C_2 \beta_{i,j}^2 W_m W_m \quad (14)$$

有了上述有限元迭代格式(12-14)，再参照图2的加载路径(其中各参数值见[2])，就可以计算梁各点挠度的时程曲线。

### 三、动态止屈计算与结论

为了便于和准静态条件下算得的止屈效率比较，这里仍采用[4]列出的止屈器参数： $\bar{L} = 0.6484$ ， $\bar{k} = 4.40$ ，地基缺陷参数  $\eta = 0.2$ ， $\lambda = 1/6$ 。两个止屈器对称放置，位置在  $\bar{\xi} = \pm 30$ 。文献[4]已算得这种情况下的屈曲诱发压力无量纲量  $P_c / (k_0 H) = 0.06647$ ；屈曲传播压力无量纲量  $P_p / (k_0 H) = 0.0408$ ；准静态下的穿越压力无量纲量  $P_o / (k_0 H) = P_c / (k_0 H) = 0.06647$ 。就是说这种参数的止屈器，其止屈效率  $\eta_0 = 100\%$ 。它意味着再加大止屈器刚度将无意义，因为屈曲诱发压力将会使梁全长内产生屈曲。

可是考虑梁惯性的影响，用本文前面导得的动态止屈有限元算式，算得的穿越压力无量纲量  $P_o / (k_0 H) = 0.04389$ 。由(4)式计算得到动态止屈效率只有  $\eta^{dy} = 12\%$ ，较准静态结果明显下降。下面给出按动态算得的两幅图：图3表示当  $p_1 / (k_0 H) = 0.04279$  (比穿越压力小) 时，梁屈曲传播路径受阻的情况。从该图可清楚看到传播前沿达到止屈器位置 ( $\bar{\xi} = 30$ )，很快被挡了回去。图4表示当  $p_1$  增大到  $p_1 / (k_0 H) = 0.04389$  时，屈曲能够穿越止屈器继续传播。

另外，和拟静态条件下的止屈情况相似，止屈器的宽度  $\bar{L}$  和刚度  $\bar{k}$  也有一个匹配问题。通过计算，得到的动态匹配曲线如图5所示。这条曲线对应的动态止屈效率为  $\eta^{dy} = 74.73\%$ 。

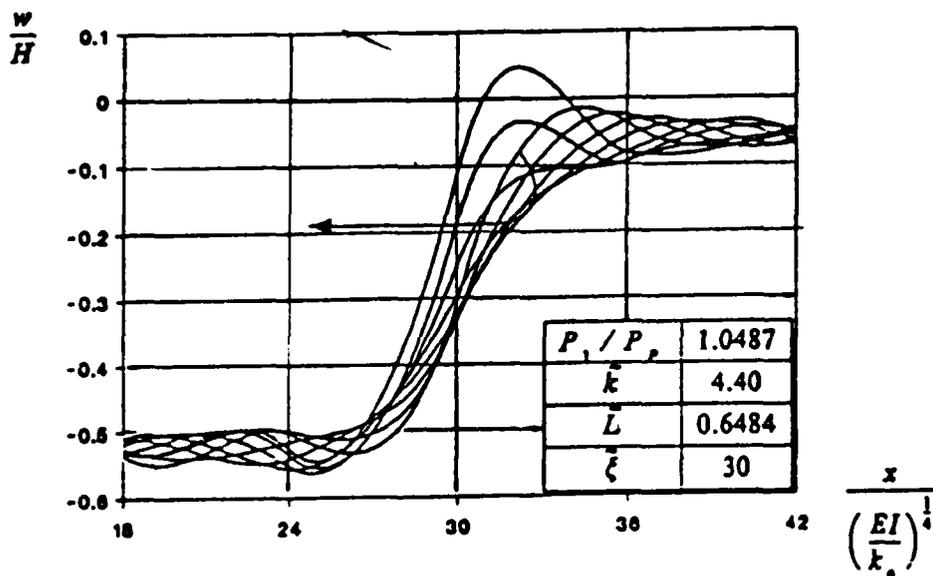


图3

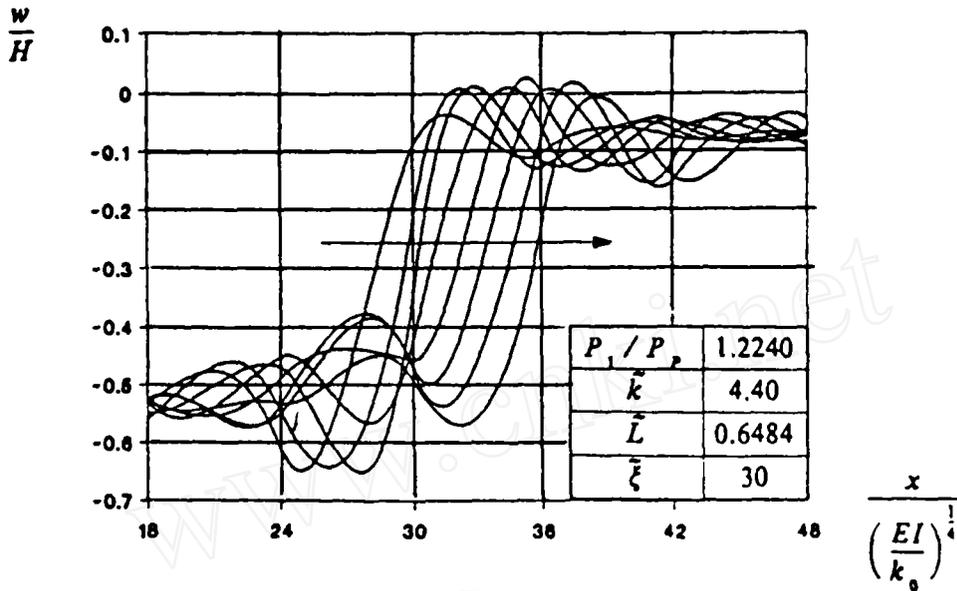


图 4

由上可以得出结论: 第一, 考虑梁惯性的影响, 止屈器的止屈效率会明显下降, 因此基于准静态的设计准则是偏于危险的; 第二, 如果止屈器的刚度小于某个值 (对于准静态问题是 1.60, 而对于动态问题是 2.10), 那么这时再增加止屈器的宽度也不能明显地提高止屈效率, 因此,  $\bar{L}$  和  $\bar{k}$  之间不仅有匹配问题, 而且还有一个合适的选择范围 (图 5)。以上两点对于止屈器的合理设计十分重要。

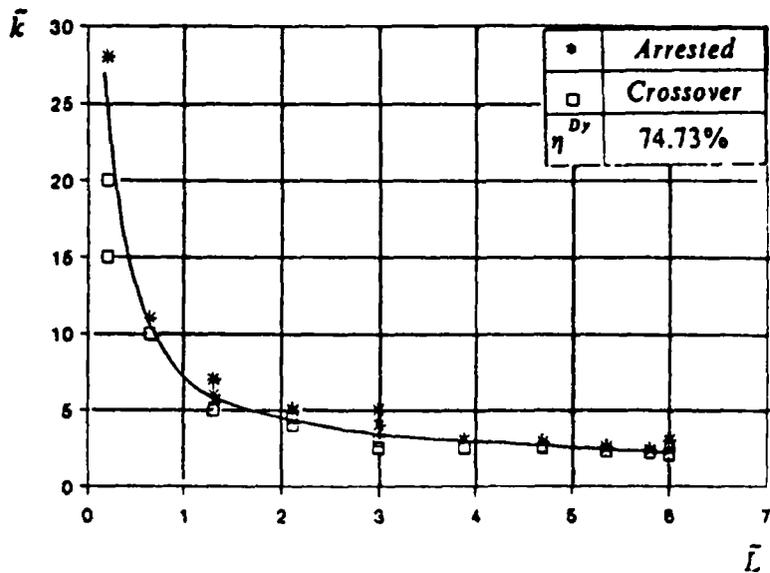


图 5

参 考 文 献

- (1) Youn S K. Study of buckle propagation and its arrest on a beam on a nonlinear foundation using finite element method. Computers & Structures, 1991, 39(3/4): 381-386
- (2) 刘志宏, 黄玉盈. Chater梁屈曲传播的动态分析. 力学学报, 1993, 25(4):460-467
- (3) Kyriakides S, Babcock C D. On the dynamics and the arrest of the propagating buckle in offshore pipelines. proceedings of the offshore Technology Conference, OTC 3479, 1979, 1035-1045
- (4) 刘志宏. 屈曲传播的动态特性分析及其数值模拟. 华中理工大学博士学位论文, 1993